УДК 519.853.6

О МЕТОДАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С РАСШИРЕНИЕМ МНОЖЕСТВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ МИНИМИЗАЦИИ

Ф. П. Васильев[1]

Предложены модификации методов регуляризации для решения задач минимизации с неточно заданными входными данными, основанные на идее расширения множества. Ослаблены условия согласования характеристик погрешностей задания ограничений, определяющих множество, со стабилизатором задачи, что позволяет конструировать регуляризованные задачи из того же класса, что и исходная задача. Так, например, если исходная задача была задачей линейного программирования, то регуляризованные задачи также будут задачами того же класса. Исследована сходимость основных методов регуляризации (стабилизации, невязки, квазирешений), построен регуляризующий оператор.

Ключевые слова: метод регуляризации, численный анализ, численные методы, минимизация, линейное программирование, регуляризующий оператор, сходимость.

1. Будем рассматривать задачу минимизации

$$J(u) \longrightarrow \inf, \quad u \in U, \tag{1}$$

$$U = \big\{u \in U_0 : \ g_i(u) \leqslant 0, \ i = \overline{1, m}; \ g_i(u) = 0, \ i = \overline{m+1, s}\big\}, \tag{2}$$

где U_0 — заданное множество из метрического пространства M, функции $J(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1, s}$, определены на U_0 и принимают конечные значения во всех точках $u \in U_0$. В (2) не исключаются возможности, когда отсутствуют либо ограничения типа неравенств ($m = 0$), либо типа равенств ($s = m$). Предполагается, что

$$U \neq \emptyset, \quad J_* = \inf_{u \in U} J(u) > -\infty, \quad U_* = \big\{u \in U : \ J(u) = J_*\big\} \neq \emptyset. \tag{3}$$

Задачу (1), (2) будем рассматривать как задачу второго типа [1 – 3], когда ищется какая-либо точка, близкая ко множеству U_* в метрике M.

Пусть множество U_0 известно точно, а вместо функций $J(u)$, $g_i(u)$ известны их приближения $J_\delta(u)$, $g_{i\delta}(u)$, $u \in U_0$, где $\delta > 0$ – параметр погрешности. Пусть

$$\lim_{\delta \to 0} |J_\delta(u) - J(u)| = 0, \quad \lim_{\delta \to 0} |g_{i\delta}(u) - g_i(u)| = 0, \quad \forall u \in U_0, \quad i = \overline{1, s}.$$

Тогда для получения приближенного решения задачи (1), (2) можно попытаться воспользоваться следующей возмущенной задачей

$$J_\delta(u) \longrightarrow \inf, \quad u \in U(\delta) = \big\{u \in U_0 : \ g_{i\delta}(u) \leqslant 0, \ i = \overline{1, m}; \ \ g_{i\delta}(u) = 0, \ i = \overline{m+1, s}\big\},$$

составленной по аналогии с исходной задачей. Однако так поступать можно, если мы уверены, что задача (1), (2) устойчива к возмущениям входных данных $J(u)$, $g_i(u)$. Если же задача (1), (2) неустойчива, то даже при условии

$$J_{\delta *} = \inf_{u \in U(\delta)} J_\delta(u) > -\infty, \quad U_*(\delta) = \big\{u \in U(\delta) : \ J_\delta(u) = J_{\delta *}\big\} \neq \emptyset$$

величины $J_{\delta *}$ и точки множества $U_*(\delta)$ не всегда будут приближаться при $\delta \to 0$ к J_* и U_* соответственно. Более того, может оказаться, что $U(\delta) = \emptyset$ при любых сколь угодно малых $\delta > 0$ и возмущенная задача не будет иметь смысла (примеры таких задач см. в [3, 4]). Для решения возникающих здесь проблем и для надежного получения хороших приближений решения задачи (1), (2) нужно пользоваться специальными методами, называемыми методами регуляризации [1 – 3].

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Основываясь на известной идее расширения множеств (см., например, [3–7]), ниже предлагаются и исследуются модификации основных методов регуляризации (стабилизации, невязки, квазирешений) в предположении, что погрешности задания входных данных задачи (1), (2) удовлетворяют условиям

$$\big|J_\delta(u)-J(u)\big|\leqslant\delta\big(1+\Omega(u)\big),\quad \big|g_{i\delta}(u)-g_i(u)\|\leqslant\delta\big(1+\Omega_i(u)\big),\quad u\in U_0,\quad i=\overline{1,s},\tag{4}$$

где $\Omega(u)$ — стабилизатор задачи (1), (2) в метрике M, функции $\Omega_1(u),\ldots,\Omega_s(u)$ неотрицательны на U_0 и необязательно являются стабилизаторами, $\delta>0$ — параметр погрешности. Напомним [1–3], что функция $\Omega(u)$ называется стабилизатором задачи (1), (2) в метрике M, если $\Omega(u)$ определена и неотрицательна на U_0, и множество $\Omega_c=\big\{u\in U_0:\ \Omega(u)\leqslant c\big\}$ при всех $c\geqslant 0$, при которых $\Omega_c\neq\emptyset$, относительно компактно в метрике $\rho(u,v)$ пространства M, т.е. из любой последовательности $\{u_k\}\in\Omega_c$ можно выбрать последовательность, которая сходится в метрике M к некоторой точке $u\in M$.

Введем множество

$$\begin{aligned}W(\theta)=&\Big\{u\in U_0:\ \ g_i(u)\leqslant\theta\big(1+\Omega_i(u)\big),\ i=\overline{1,m};\ |g_i(u)|\leqslant\theta\big(1+\Omega_i(u)\big),\ i=\overline{m+1,s}\Big\}=\\ &=\Big\{u\in U_0:\ g^+_{i\delta}(u)\leqslant\theta\big(1+\Omega_i(u)\big),\ i=\overline{1,s}\Big\},\end{aligned}\tag{5}$$

где $z_i^+=\max\{z_i;0\}$, $i=\overline{1,m}$; $z_i^+=|z_i|$, $i=\overline{m+1,s}$; $\theta\geqslant\delta$. Убедимся, что $W(\theta)\neq\emptyset$, $\forall\theta\geqslant\delta$. Заметим, что в силу (4)

$$\big|g^+_{i\delta}(u)-g^+_i(u)\big|\leqslant\big|g_{i\delta}(u)-g_i(u)\big|\leqslant\delta\big(1+\Omega_i(u)\big)\leqslant\theta\big(1+\Omega_i(u)\big),\quad u\in U_0,\quad i=i=\overline{1,s}.\tag{6}$$

Возьмем произвольную точку $u\in U$. Тогда $g_i^+(u)=0$, $i=\overline{1,s}$, и из (6) имеем

$$g^+_{i\delta}(u)\leqslant g^+_i(u)+\theta\big(1+\Omega_i(u)\big)=\theta\big(1+\Omega_i(u)\big),\quad u\in U_0,\quad i=\overline{1,s}.$$

Отсюда следует, что $U\subseteq W(\theta)$, $\forall\theta\geqslant\delta$, т.е. $W(\theta)$ — расширение множества U.

Отметим, что для задачи (1), (2) множество (5) использовалось в [3, 4, 7] при описании и исследовании методов регуляризации для случая, когда все функции $\Omega_i(u)$, $i=\overline{1,s}$, в (4) были одинаковыми и совпадали со стабилизатором $\Omega(u)$. В [4] для задач линейного программирования, когда $U_0=E^n_+=\{u\in E^n:\ u\geqslant 0\}$, были использованы функции $\Omega(u)=\Omega_1(u)=\ldots=\Omega_s(u)=\sum\limits_{i=1}^n u^i$ и было показано, что регуляризованные задачи также являются задачами линейного программирования. В настоящей работе предполагаем, что функции $\Omega_i(u)$ в (4) необязательно одинаковые и удовлетворяют лишь условиям

$$0\leqslant\Omega_i(u)\leqslant M\Omega(u),\quad i=\overline{1,s};\quad u\in U_0,\quad M=\mathrm{const}>0,\tag{7}$$

что дает возможность точнее учитывать индивидуальные характеристики погрешностей функций $g_i(u)$, $i=\overline{1,s}$, при формировании множества (5) и, более того, в описываемых ниже методах удается получить регуляризованные задачи того же класса, что и исходная задача (1), (2). Проиллюстрируем эти соображения на примере канонической задачи квадратичного программирования [3], когда в (1), (2)

$$J(u)=\big\langle Du,u\big\rangle+\big\langle d,u\big\rangle,\quad U_0=E^n_+,\quad g_i(u)=\big\langle a_i,u\big\rangle+b^i,\quad i=\overline{1,s},$$

где $D=\{d_{l\,j},\ l,j=\overline{1,n}\}$ — квадратная матрица, $d=(d^1,\ldots,d^n)\in E^n$, $a_i=(a_{i1},\ldots,a_{in})\in E^n$, $i=\overline{1,s}$, $b=(b^1,\ldots,b^s)\in E^s$. Пусть вместо точных D, d, a_i, b известны их приближения $D_\delta=\{d_{lj\delta},\ l,j,=\overline{1,n}\}$, $d_\delta=(d^1_\delta,\ldots,d^n_\delta)$, $a_{i\delta}=(a_{i1\delta},\ldots,a_{in\delta})$, $i=\overline{1,s}$, $b_\delta=(b^1_\delta,\ldots,b^n_\delta)$, такие, что

$$|d_{lj\delta}-d_{lj}|\leqslant\delta,\quad \big|d^i_\delta-d^i\big|\leqslant\delta,\quad |a_{ij\delta}-a_{ij}|\leqslant\delta,\quad \big|b^i_\delta-b^i\big|\leqslant\delta,\quad l=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n},\quad i=\overline{1,s}.$$

Если теперь положим

$$J_\delta(u)=\big\langle D_\delta u,u\big\rangle+\big\langle d_\delta,u\big\rangle,\quad g_{i\delta}(u)=\big\langle a_{i\delta},u\big\rangle+b^i_\delta,\quad i=\overline{1,s},$$

то получим

$$\big|J_\delta(u)-J(u)\big|\leqslant\delta\big(|u|_1^2+|u|_1\big),\quad \big|g_{i\delta}(u)-g_i(u)\big|\leqslant\delta\big(1+|u|_1\big),\quad u\in E^n_+,\quad i=\overline{1,s},$$

где $|u|_1=\sum\limits_{i=1}^n\big|u^i\big|=\sum\limits_{i=1}^n u^i$ на $U_0=E^n_+$. Как видим, условия (4) здесь выполнены при $\Omega(u)=|u|_1^2+|u|_1$, $\Omega_i(u)=|u|_1$, $i=\overline{1,s}$, неравенства (7) — при $M=1$, множество $W(\theta)$ из (5), как и исходное множество U в рассматриваемой задаче квадратичного программирования, является многогранным множеством. Нетрудно проследить, что регуляризованные задачи (10), (27), (28) и (36), к которым сводятся излагаемые ниже методы регуляризации, также будут задачами квадратичного программирования.

Кратко остановимся на более общей задаче. Пусть задача (1), (2) является задачей полиномиального программирования, т.е. функции $J(u) = g_0(u), g_1(u), \dots, g_s(u)$ являются полиномами степени $p_0, p_1, \dots, p_s$ соответственно (для наших целей достаточно считать, что p_i — это максимальная степень i-го полинома по совокупности всех переменных $u = (u^1, \dots, u^n)$). Пусть $U_0 = E^n$, коэффициенты каждого полинома задаются с погрешностью $\tilde{\delta}$. Тогда, выбирая приближения $J_\delta(u)$, $g_{i\delta}(u)$ полиномами тех же степеней, что и исходные полиномы, взяв их с коэффициентами, равными приближенным значениям коэффициентов исходных полиномов, нетрудно добиться выполнения условий (4), (7), например, при $\Omega_i(u) = |u|_1^{p_i}$, $i = \overline{1,s}$, $\Omega(u) = |u|_1^p$, $p = \max\{p_0, \dots, p_s\}$, $\delta = a\tilde{\delta}$, $a = \mathrm{const}$, что приведет к регуляризованным задачам (10), (27), (28) и (36), также являющимися задачами полиномиального программирования.

2. Перейдем к изложению методов регуляризации. Начнем с метода стабилизации. Введем функцию Тихонова
$$t_\delta(u) = J_\delta(u) + \alpha\Omega(u), \quad u \in U_0, \quad \alpha > 0. \tag{8}$$
Пусть нам известна точка u_δ, удовлетворяющая условиям
$$u_\delta \in W(\theta), \quad t_\delta(u_\delta) \leqslant t_{\delta *} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad t_{\delta *} = \inf_{u \in W(\theta)} t_\delta(u). \tag{9}$$
Заметим, что для практического определения точки u_δ нужно приближенно решать регуляризованную задачу минимизации
$$t_\delta(u) \to \inf, \quad u \in W(\theta), \tag{10}$$
рассматривая ее как задачу первого типа [1 − 3], когда вместо точного значения величины $t_{\delta *}$ ищется значение функции $t_\delta(u_\delta)$, близкое к $t_{\delta *}$. Устойчивые методы решения задач минимизации первого типа вида (10) рассматривались в [8]. Дальнейшее изложение не зависит от метода определения точки u_δ, удовлетворяющей условию (9), нам важен лишь сам факт ее существования. Метод стабилизации, заключающийся в определении такой точки u_δ, формально описан. Укажем условия на входные данные задачи (1), (2) и условия согласования параметров $\theta = \theta(\delta)$, $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ метода (9), обеспечивающие существование точки u_δ и сходимость этого метода.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) *множество U_0 замкнуто в метрике M; функции $J(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$, $|g_i(u)|$, $i = \overline{m+1,s}$, полунепрерывны снизу на U_0, выполнены условия* (3)*; функция Лагранжа*
$$L(u, \lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u), \quad u \in U_0, \quad \lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda \in E^s : \lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_m \geqslant 0\}$$
задачи (1), (2) *на множестве $U_0 \times \Lambda_0$ имеет седловую точку $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda_0$, т.е.*
$$L(u_*, \lambda) \leqslant L(u_*, \lambda^*) \leqslant L(u, \lambda^*) \quad \forall u \in U_0, \quad \forall \lambda \in \Lambda_0; \tag{11}$$

2) $\Omega(u)$ — *стабилизатор задачи* (1), (2) *в метрике M, функции $\Omega_i(u)$, $i = \overline{1,s}$, удовлетворяют условиям* (7)*;*

3) *для приближений $J_\delta(u)$, $g_{i\delta}(u)$, $i = \overline{1,s}$, выполнены условия* (4)*;*

4) *параметры $\theta = \theta(\delta)$, $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ метода* (9) *таковы, что*
$$\theta(\delta) \geqslant \delta, \quad \alpha(\delta) > 0, \quad \varepsilon(\delta) > 0 \quad \forall \delta > 0, \quad \lim_{\delta \to 0}\big(\alpha(\delta) + \theta(\delta) + \varepsilon(\delta)\big) = 0, \tag{12}$$
$$\sup_{\delta > 0} \frac{\delta + 2\theta(\delta)\, |\lambda^*|_1\, M}{\alpha(\delta)} < 1, \quad \sup_{\delta > 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} < \infty, \quad |\lambda^*|_1 = \sum_{i=1}^{s} |\lambda_i^*|\,. \tag{13}$$
Тогда точка u_δ, определяемая условиями (9)*, существует при всех $\delta > 0$ и*
$$\lim_{\delta \to 0} J(u_\delta) = J_*, \quad \lim_{\delta \to 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = \overline{1,s}, \quad \lim_{\delta \to 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0, \tag{14}$$
где $\rho(u, U_*) = \inf\limits_{v \in U_*} \rho(u, v)$. Пусть наряду с 1) – 4) *еще выполнено условие*

5) *стабилизатор* $\Omega(u)$ *полунепрерывен снизу на* U_0 *и*

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta+\theta(\delta)+\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)}=0. \tag{15}$$

Тогда наряду с (14)

$$\lim_{\delta\to 0}\Omega(u_\delta)=\Omega_*, \quad \lim_{\delta\to 0}\rho(u_\delta,U_{**})=0, \tag{16}$$

где $\Omega_*=\inf\limits_{u\in U_*}\Omega(u)$, $U_{**}=\big\{u\in U_*:\ \Omega(u)=\Omega_*\big\}$.

В качестве параметров $\theta(\delta)$, $\alpha(\delta)$, $\varepsilon(\delta)$, удовлетворяющих условиям (12), (13) и (15), можно, например, взять функции $\theta(\delta)=a_1\delta^{b_1}$, $\alpha(\delta)=a_2\delta^{b_2}$, $\varepsilon(\delta)=a_3\delta^{b_3}$, где a_i, b_i, $i=1,2,3$, – некоторые положительные постоянные. Достаточные условия существования седловой точки в смысле (11) приведены, например, в [3].

Доказательство. Из условия (11) следует неравенство

$$J_*=L(u_*,\lambda^*)\leqslant J(u)+\sum_{i=1}^{s}|\lambda_i^*|\,g_i^+(u) \quad \forall u\in U_0. \tag{17}$$

Для любой точки $u\in W(\theta)$ с учетом (5)–(7) и условия $\theta\geqslant\delta$ имеем

$$g_i^+(u)\leqslant g_{i\delta}^+(u)+\theta\big(1+\Omega_i(u)\big)\leqslant 2\theta\big(1+M\Omega(u)\big), \quad i=\overline{1,s}. \tag{18}$$

Из (17), (18) получаем

$$J_*\leqslant J(u)+2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big(1+M\Omega(u)\big) \quad \forall u\in W(\theta). \tag{19}$$

Из (4), (8), (13), (19) вытекают неравенства

$$\begin{aligned} t_\delta(u) \;=\; & J_\delta(u)+\alpha(\delta)\Omega(u)\geqslant J(u)-\delta\big(1+\Omega(u)\big)+\alpha(\delta)\Omega(u)\geqslant \\ \geqslant\; & J_*+\big[\alpha(\delta)-\delta-2\theta(\delta)|\lambda^*|_1M\big]\Omega(u)-\big[\delta+2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big]\geqslant J_*-\big[\delta+2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big] \quad \forall u\in W(\theta). \end{aligned}$$

Тогда $t_{\delta *}=\inf\limits_{u\in W(\theta)}t_\delta(u)\geqslant J_*-\big[\delta+2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big]>-\infty$ $\forall\delta>0$ и существование точки u_δ со свойствами (9) следует из определения нижней грани. Возьмем произвольные точки $u_*\in U_*$, u_δ из (9). Пользуясь (4), (9) и (19), можем написать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} J(u_\delta) & \leqslant J(u_\delta)+\alpha(\delta)\Omega(u_\delta)\leqslant J_\delta(u_\delta)+\delta\big(1+\Omega(u_\delta)\big)+\alpha(\delta)\Omega(u_\delta)=t_\delta(u_\delta)+\delta\big(1+\Omega(u_\delta)\big)\leqslant \\ & \leqslant t_{\delta *}+\varepsilon(\delta)+\delta\big(1+\Omega(u_\delta)\big)\leqslant t_\delta(u_*)+\varepsilon(\delta)+\delta\big(1+\Omega(u_\delta)\big)\leqslant \\ & \leqslant J(u_*)+\delta\big(1+\Omega(u_*)\big)+\alpha(\delta)\Omega(u_*)+\varepsilon(\delta)+\delta\big(1+\Omega(u_\delta)\big)\leqslant \\ & \leqslant J(u_\delta)+2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big(1+M\Omega(u_\delta)\big)+\delta\big(1+\Omega(u_*)\big)+\alpha(\delta)\Omega(u_*)+\varepsilon(\delta)+\delta\big(1+\Omega(u_\delta)\big). \end{aligned} \tag{20}$$

Выделим второе и последнее звенья этой цепочки:

$$\alpha(\delta)\Omega(u_\delta)\leqslant 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big(1+M\Omega(u_\delta)\big)+\delta\big(1+\Omega(u_*)\big)+\alpha(\delta)\Omega(u_*)+\varepsilon(\delta)+\delta\big(1+\Omega(u_\delta)\big).$$

Пользуясь произволом в выборе точки $u_*\in U_*$ в (20), в полученном неравенстве величину $\Omega(u_*)$ можем заменить на $\Omega_*=\inf\limits_{u\in U_*}\Omega(u)$ и переписать его в виде

$$\Omega(u_\delta)\big(\alpha(\delta)-\delta-2\theta(\delta)|\lambda^*|_1M\big)+\big(\alpha(\delta)+\delta\big)\Omega_*+2\delta+2\theta(\delta)|\lambda^*|_1+\varepsilon(\delta)$$

или с учетом первого неравенства (13)

$$\begin{aligned} & \Omega(u_\delta)\leqslant\Omega_*+\gamma(\delta), \\ & \gamma(\delta)=\left(1-\frac{\delta+2\theta(\delta)|\lambda^*|_1M}{\alpha(\delta)}\right)^{-1}\left(\frac{2\delta+2\theta(\delta)|\lambda^*|_1M}{\alpha(\delta)}\,\Omega_*+\frac{2\delta+2\theta(\delta)|\lambda^*|_1+\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)}\right) \quad \forall\delta>0. \end{aligned} \tag{21}$$

Выделим первое и предпоследнее звенья цепочки неравенств (20). С учетом уже доказанной оценки (21) получим

$$J(u_\delta)\leqslant J_*+\beta(\delta), \quad \beta(\delta)=\big(\alpha(\delta)+\delta\big)\Omega_*+\delta\big(1+\Omega_*+\gamma(\delta)\big)+2\delta+\varepsilon(\delta) \quad \forall\delta>0. \tag{22}$$

Кроме того, из (18), (21) имеем

$$g_i^+(u_\delta) \leqslant 2\theta(\delta)\Big[1 + M\big(\Omega_* + \gamma(\delta)\big)\Big] \equiv \rho(\delta), \quad \delta > 0, \tag{23}$$

а из (19), (21), (22) следует

$$-|\lambda^*|_1 \rho(\delta) \leqslant J(u_\delta) - J_* \leqslant \beta(\delta), \quad \delta > 0. \tag{24}$$

При выполнении условий (12), (13)

$$\sup_{\delta>0} \gamma(\delta) < \infty, \quad \lim_{\delta\to 0} \beta(\delta) = \lim_{\delta\to 0} \rho(\delta) = 0,$$

поэтому из оценок (23) и (24) вытекают первые два равенства (14). Для доказательства третьего равенства (14) заметим, что в силу (21)

$$u_\delta \in \Omega_c = \big\{u \in U_0 : \Omega(u) \leqslant \Omega_* + \sup_{\delta>0} \gamma(\delta) = c\big\}.$$

Т.к. множество Ω_c относительно компактно в метрике M, то семейство $\{u_\delta,\, \delta > 0\}$ при $\delta \to 0$ имеет хотя бы одну предельную точку $v_* \in M$, т.е. существуют последовательности $\{u_k = u_{\delta_k}\}$, $\{\delta_k\} \to 0$, такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k, v_*) = 0$. Из замкнутости U_0 в метрике M и из $\{u_k\} \in U_0$ следует, что $v_* \in U_0$. Из полунепрерывности снизу функций $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$, $|g_i(u)|$, $i = \overline{m+1,s}$ в точке v_* с учетом уже доказанных равенств (14) имеем:

$$g_i(v_*) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} g_i(u) \leqslant 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad |g_i(v_*)| \leqslant \varliminf_{k\to\infty} |g_i(u_k)| = 0, \quad i = \overline{m+1,s}.$$

Это означает, что $v_* \in U$. Отсюда и из полунепрерывности снизу функции $J(u)$ в точке v_* получаем: $J_* \leqslant J(v_*) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$, т.е. $J(v_*) = J_*$ или $v_* \in U_*$. Тогда $0 \leqslant \rho(u_k, U_*) \leqslant \rho(u_k, v_*)$, $k = 1, 2, \ldots$, так что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = 0$. Отсюда следует, что семейство $\big\{\rho(u_\delta, U_*),\, \delta > 0\big\}$ имеет единственную предельную при $\delta \to 0$ точку, равную нулю, т.е. $\lim\limits_{\delta\to 0} \rho(u_\delta, U_*) = 0$. Равенства (14) доказаны.

Пусть теперь выполнены все условия 1) − 5) теоремы. Снова возьмем произвольную предельную точку v_* семейства $\{u_\delta,\, \delta > 0\}$ и последовательность $\{u_k = u_{\delta_k}\}$, сходящуюся к v_* в метрике M, где $\{\delta_k\} \to 0$. По доказанному $v_* \in U_*$. Тогда в силу полунепрерывности снизу $\Omega(u)$ в точке v_* из оценки (21) с учетом $\lim\limits_{\delta\to 0} \gamma(\delta) = 0$ имеем:

$$\Omega_* \leqslant \Omega(v_*) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \Omega(u_k) \leqslant \varlimsup_{\delta\to 0} \Omega(u_\delta) \leqslant \Omega_*,$$

т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(u_k) = \Omega(v_*) = \Omega_*, \quad v_* \in U_{**}.$$

Тогда $0 \leqslant \rho(u_k, U_{**}) \leqslant \rho(u_k, v_*)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k, U_{**}) = 0$. Это означает, что каждое из числовых множеств $\big\{\Omega(u_\delta),\, \delta > 0\big\}$, $\big\{\rho(u_\delta, U_{**}),\, \delta > 0\big\}$ при $\delta \to 0$ имеет единственную предельную точку Ω_* и 0 соответственно, что эквивалентно равенствам (16). Теорема 1 доказана.

3. Изложим метод невязки с расширением множества. Введем множество

$$V(\delta) = \Big\{u \in W\big(\theta(\delta)\big) : \, J_\delta(u) \leqslant \bar{J}_{\delta*} + \sigma\Big\}, \quad \sigma > 0, \tag{25}$$

где $\bar{J}_{\delta*} = \inf\limits_{u\in W(\theta(\delta))} \Big(J_\delta(u) + \big(\delta + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1 M\big)\Omega(u)\Big)$, $\theta(\delta) \geqslant \delta$. Предположим, что $V(\delta) \neq \emptyset$, и определим точку u_δ из условий

$$u_\delta \in V(\delta), \quad \Omega(u_\delta) \leqslant \Omega_{\delta*} + \mu, \quad \Omega_{\delta*} = \inf_{u\in V(\delta)} \Omega(u), \quad \mu > 0, \tag{26}$$

приближенно решая регуляризованную задачу минимизации первого типа

$$\Omega(u) \to \inf, \quad u \in V(\delta), \tag{27}$$

аналогично задаче (10). Для определения величины $\bar{J}_{\delta*}$ или ее оценки $\bar{J}_{\delta*} + \sigma$, входящих в описание множества (25), предварительно нужно решить задачу минимизации первого типа:

$$\bar{J}_\delta(u) = J_\delta(u) + \big(\delta + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1 M\big)\Omega(u) \to \inf, \quad u \in W\big(\theta(\delta)\big). \tag{28}$$

Заметим, что в (28) величину $|\lambda^*|_1$ можно заменить какой-либо ее оценкой сверху. Однако величина $|\lambda^*|_1$ или ее оценка редко бывают известны. Поэтому метод невязки обычно применяют, когда известна величина J_* или какая-либо ее оценка $\bar{J}_*$, полученная, например, в результате решения задачи (1), (2) как задачи первого типа, и в (25) вместо $\bar{J}_{\delta *}$ берут $\bar{J}_*$. Метод невязки формально описан. Приведем условия на входные данные задачи (1), (2) и условия согласования параметров $\theta = \theta(\delta)$, $\sigma = \sigma(\delta)$, $\mu = \mu(\delta)$, гарантирующих непустоту множества $V(\delta)$ и сходимость метода (26).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1) –3) *теоремы* 1 *и параметры* $\theta(\delta)$, $\sigma(\delta)$, $\mu(\delta)$ *таковы, что*

$$\theta(\delta) \geqslant \delta > 0, \quad \sigma(\delta) > 0, \quad \mu(\delta) > 0, \quad \lim_{\delta\to 0}\big(\theta(\delta) + \sigma(\delta)\big) = 0, \quad \sup_{\delta>0}\mu(\delta) < \infty, \tag{29}$$

$$\delta(3 + \Omega_*) + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1 \leqslant \sigma(\delta), \quad \Omega_* = \inf_{u\in U_*}\Omega(u). \tag{30}$$

Тогда множество $V(\delta)$, *определенное согласно* (25), *непусто при всех* $\delta > 0$, *и для семейства* $\{u_\delta,\ \delta > 0\}$, *определенного условиями* (26), *справедливы равенства* (14). *Если кроме того функция* $\Omega(u)$ *полунепрерывна снизу на* U_0 *и* $\lim_{\delta\to 0}\mu(\delta) = 0$, *то выполняются равенства* (16).

Доказательство. Из (4), (19), $\theta(\delta) \geqslant \delta$ имеем

$$\bar{J}_\delta(u) \geqslant J(u) - \delta\big(1 + \Omega(u)\big) + \big(\delta + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1 M\big)\Omega(u) \geqslant J_* - \big(\delta + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big) \quad \forall u \in W\big(\theta(\delta)\big).$$

Отсюда следует, что

$$\bar{J}_{\delta *} = \inf_{u\in W(\theta(\delta))}\bar{J}_\delta(u) \geqslant J_* - \big(\delta + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big) > -\infty.$$

Далее, по определению Ω_* для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, найдется точка $w_\varepsilon \in U_* \subset W\big(\theta(\delta)\big)$, такая, что $\Omega(w_\varepsilon) \leqslant \Omega_* + \varepsilon$. Тогда с учетом (4), (19) и (30) получаем

$$\begin{aligned}J_\delta(w_\varepsilon) &\leqslant J(w_\varepsilon) + \delta\big(1 + \Omega(w_\varepsilon)\big) \leqslant J_* + \delta(1 + \Omega_* + \varepsilon) \leqslant J(u) + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big(1 + M\Omega(u)\big) + \delta(2 + \Omega_*) \leqslant \\ &\leqslant J_\delta(u) + \delta\big(1 + \Omega(u)\big) + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big(1 + M\Omega(u)\big) + \delta(2 + \Omega_*) \leqslant \bar{J}_\delta(u) + \sigma(\delta) \quad \forall u \in W\big(\theta(\delta)\big),\end{aligned}$$

т.е. $J_\delta(w_\varepsilon) \leqslant \bar{J}_{\delta *} + \sigma(\delta)$. Это значит, что $w_\varepsilon \in V(\delta)$, так что $V(\delta) \neq \emptyset\ \forall\delta > 0$. Тогда точка u_δ, удовлетворяющая условиям (26), существует по определению нижней грани. Для любой такой точки u_δ с учетом включения $w_\varepsilon \in V(\delta)$ имеем

$$\Omega(u_\delta) \leqslant \Omega(w_\varepsilon) + \mu(\delta) \leqslant \Omega_* + \varepsilon + \mu(\delta) \quad \forall\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\Omega(u_\delta) \leqslant \Omega_* + \mu(\delta) \quad \forall\delta > 0. \tag{31}$$

Далее, из (4), (26), (31) с учетом включения $w_\varepsilon \in V(\delta)$ имеем

$$\begin{aligned}J(u_\delta) &\leqslant J_\delta(u_\delta) + \delta\big(1 + \Omega(u_\delta)\big) \leqslant \bar{J}_{\delta *} + \sigma(\delta) + \delta\big(1 + \Omega_* + \mu(\delta)\big) \leqslant \bar{J}_\delta(w_\varepsilon) + \sigma(\delta) + \delta\big(1 + \Omega_* + \mu(\delta)\big) = \\ &= J_\delta(w_\varepsilon) + \big(\delta + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1 M\big)\Omega(w_\varepsilon) + \sigma(\delta) + \delta\big(1 + \Omega_* + \mu(\delta)\big) \leqslant \\ &\leqslant J_* + \delta(1 + \Omega_* + \varepsilon) + \big(\delta + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1 M\big)(\Omega_* + \varepsilon) + \sigma(\delta) + \delta\big(1 + \Omega_* + \mu(\delta)\big) \quad \forall\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.\end{aligned}$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получаем оценку

$$J(u_\delta) \leqslant J_* + \beta(\delta), \quad \beta(\delta) = \big(2\delta + 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1 M\big)\Omega_* + \delta\big(2 + \Omega_* + \mu(\delta)\big) + \sigma(\delta) \quad \forall\delta > 0. \tag{32}$$

Оценки (31), (32) аналогичны оценкам (21), (22), и дальнейшее доказательство в этой теореме проводится так же, как в теореме 1.

Заметим, что неравенство (30), содержащее трудно оцениваемые постоянные Ω_*, $|\lambda^*|_1$, на практике следует заменить равенством

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta + \theta(\delta)}{\sigma(\delta)} = 0. \tag{33}$$

Из (33) следует, что неравенство (30) будет выполняться при всех достаточно малых $\delta > 0$.

4. Наконец, кратко изложим метод квазирешений с расширением множества. Этот метод применяется в тех случаях, когда известно число $r > 0$, такое, что

$$U_* \cap Q(r) \neq \emptyset, \quad Q(r) = \{u \in U_0 :\ \Omega(u) \leqslant r\}. \tag{34}$$

Тогда множество $Q_{r\delta} = \{u \in W(\theta(\delta)) : \Omega(u) \leqslant r\} \neq \emptyset$ при всех $\delta > 0$, $\theta(\delta) \geqslant \delta$, т.к. $U_* \cap Q(r) \subset Q_{r\delta}$. Определим точку u_δ из условий

$$u_\delta \in Q_{r\delta}, \quad J_\delta(u_\delta) \leqslant J_{\delta*} + \xi, \quad J_{\delta*} = \inf_{u \in Q_{r\delta}} J_\delta(u), \quad \xi > 0, \tag{35}$$

приближенно решая регуляризованную задачу минимизации первого типа:

$$J_\delta(u) \to \inf, \quad u \in Q_{r\delta}. \tag{36}$$

Замечания, высказанные выше по отношению к аналогичным задачам (10), (27) и (28), с очевидными изменениями сохраняют силу и для задачи (36).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 1, *известно число* $r > 0$ *со свойством* (34) *и параметры* $\theta = \theta(\delta)$, $\xi = \xi(\delta)$ *таковы, что*

$$\theta(\delta) \geqslant \delta, \quad \xi(\delta) > 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \big(\theta(\delta) + \xi(\delta)\big) = 0. \tag{37}$$

Тогда точки u_δ, *определяемые условиями* (35), *существуют при всех* $\delta > 0$ *и для них справедливы равенства* (14).

Доказательство. С учетом (4), (19) для любой точки $u \in Q_{r\delta}$ имеем

$$J_\delta(u) \geqslant J(u) - \delta\big(1 + \Omega(u)\big) \geqslant J_* - 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1\big(1 + M\Omega(u)\big) - \delta(1 + r) \geqslant J_* - 2\theta(\delta)|\lambda^*|_1(1 + Mr) - \delta(1 + r).$$

Следовательно, $J_{\delta*} = \inf_{u \in Q_{r\delta}} J_\delta(u) > -\infty$ и точка u_δ из (35) существует по определению нижней грани. Возьмем произвольные точки u_δ из (35) и u_* из $U_* \cap Q(r)$. Тогда

$$\Omega(u_\delta) \leqslant r = \Omega_* + \gamma, \quad \gamma = r - \Omega_* \geqslant 0, \quad \forall \delta > 0. \tag{38}$$

Кроме того, с учетом (4), (35) получаем

$$\begin{aligned} J(u_\delta) &\leqslant J_\delta(u_\delta) + \delta\big(1 + \Omega(u_\delta)\big) \leqslant J_{\delta*} + \xi(\delta) + \delta(1 + r) \leqslant J_\delta(u_*) + \xi(\delta) + \delta(1 + r) \leqslant \\ &\leqslant J(u_*) + \delta\big(1 + \Omega(u_*)\big) + \xi(\delta) + \delta(1 + r) \leqslant J_* + \beta(\delta), \quad \beta(\delta) = \xi(\delta) + 2\delta(1 + r) \quad \forall \delta > 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Дальнейшее доказательство теоремы проводится так же, как в теореме 1, опираясь на оценки (38), (39), аналогичные оценкам (21), (22).

5. В выпуклых задачах (1), (2), когда $M = B$ — банахово пространство, в описанных выше методах регуляризации могут быть использованы слабые стабилизаторы [3]. Напомним, что функция $\Omega(u)$ называется слабым стабилизатором задачи (1), (2), если $\Omega(u)$ определена и неотрицательна на U_0, и множество $\Omega_c = \{u \in U_0 : \ \Omega(u) \leqslant c\}$ при всех $c \geqslant 0$, при которых $\Omega_c \neq \emptyset$, относительно слабо компактно в B, т.е. из любой последовательности $\{u_k\} \in \Omega_c$ можно выбрать последовательность, которая слабо в B сходится к некоторой точке $u \in B$. Описание методов стабилизации (9) и невязки (26) при использовании слабых стабилизаторов не изменится. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:*

1) B — *рефлексивное банахово пространство;* U_0 — *выпуклое замкнутое множество из* B; *функции* $J(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$, $|g_i(u)|$, $i = \overline{m+1,s}$, *выпуклы и полунепрерывны снизу в метрике* B *на* U_0, *выполняются условия* (3), (11);

2) *функция* $\Omega(u)$ *полунепрерывна снизу в метрике* B, *неотрицательна и равномерно выпукла на* U_0;

3) *приближения* $J_\delta(u)$, $g_{i\delta}(u)$, $i = \overline{1,s}$, *удовлетворяют условиям* (4); *выполнены условия* (7);

4) *в методе* (9) *параметры удовлетворяют условиям* (12), (15), *в методе* (26) — *условиям* (29), (33), $\lim_{\delta \to 0} \mu(\delta) = 0$.

Тогда семейство точек $\{u_\delta,\ \delta > 0\}$, *определенное методом* (9) *или* (26), *таково, что*

$$\lim_{\delta \to 0} J(u_\delta) = J_*, \quad \lim_{\delta \to 0} g_i^+(u_\delta) = 0, \quad i = \overline{1,s}; \quad \lim_{\delta \to 0} \Omega(u_\delta) = \inf_{U_*} \Omega(u), \quad \lim_{\delta \to 0} \|u_\delta - v_*\|_B = 0,$$

где v_* — *точка минимума функции* $\Omega(u)$ *на множестве* U_*.

При сделанных предположениях $\Omega(u)$ — слабый стабилизатор задачи (1), (2), функции $J(u)$, $g_i^+(u)$, $i = \overline{1,s}$, $\Omega(u)$ слабо полунепрерывны снизу на U_0 и доказательство теоремы 4 проводится по той же схеме, что и теорем 1, 2.

6. В заключение сделаем несколько замечаний к изложенным выше трем методам регуляризации.

1) При численном решении регуляризованных задач (10), (27), (28) и (36) первого типа могут быть использованы, например, методы из [8] при $\theta(\delta) > \delta$.

2) Неравенства (23), (24) в методе (9) и аналогичные неравенства, получающиеся в методах (26), (35), представляют собой оценки скорости сходимости этих методов по ограничениям и по функции.

3) Изложенные выше методы регуляризации нетрудно модифицировать для случая, когда погрешности входных данных в (4) характеризуются различными параметрами, т.е.

$$\big|J_\delta(u) - J(u)\big| \leqslant \delta_0\big(1 + \Omega(u)\big), \quad \big|g_{i\delta}(u) - g_i(u)\big| \leqslant \delta_i\big(1 + \Omega_i(u)\big), \quad i = \overline{1, s}, \quad \forall u \in U_0.$$

Для задач линейного программирования подобные модификации методов регуляризации исследованы в [4].

4) Как известно [9, 10], каждый из методов регуляризации явно или неявно учитывает какую-то априорную информацию о классе рассматриваемых задач. Применительно к задаче (1), (2) при изложении методов регуляризации мы предполагали выполнение условия (3), существование стабилизатора задачи (1), (2) в нужной метрике, выполнение условий (4) на погрешности, условий (7), (11). Перечисленной информации достаточно для практической реализации метода стабилизации (9). Для реализации метода невязки (26) к этому надо еще добавить знание оценки величины J_* (точнее, величины $\bar{J}_{\delta*}$ из (25)), в методе квазирешений (35) — знание оценки r значения стабилизатора $\Omega(u)$ в какой-либо точке $u_* \in U_*$.

5) Каждый из методов (9), (26), (35) определяет оператор R_δ, который приближениям входных данных $\big\{J_\delta(u),\ g_{i\delta}(u),\ i = \overline{1, s},\ \delta\big\}$ из (4) и своих параметров ставит в соответствие точку u_δ и при выполнении условий теорем 1 – 4 обеспечивает выполнение равенств (14). Это означает, что оператор R_δ является регуляризирующим [1 – 3].

6) Условие (11) (точнее, вытекающее из него неравенство (17)) может быть заменено более общим условием [3]

$$J_* \leqslant J(u) + \sum_{i=1}^{s} c_i\big(g_i^+(u)\big)^\nu, \quad u \in U_0, \tag{40}$$

где постоянные $c_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, s},\ \nu > 0$. При выполнении этого условия описанные выше методы регуляризации и соответствующие теоремы сходимости нужно несколько модифицировать, пользуясь, например, конструкциями из [3, 7]. Классы задач (1), (2) со свойством (40) рассмотрены в [3] (см. леммы 1, 5 из § 15 гл. 5). Представляется интересным как-то обобщить условие (40), ввести новые, более широкие классы задач (1), (2) с неточно заданным множеством, которые допускают распространение на них идей и методов регуляризации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–60064).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
3. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2001.
4. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.
5. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
6. *Молодцов Д.А.* Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987.
7. *Васильев Ф.П.* Методы регуляризации для неустойчивых задач минимизации, основанные на идее расширения множества // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн. 1990. № 1. 3–16.
8. *Васильев Ф.П.* Методы регуляризации для решения неустойчивых задач минимизации первого типа с неточно заданным множеством // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. **41**, № 2. 41–48.
9. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
10. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.

Поступила в редакцию
25.06.2001