

УДК 523.1

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ  
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**Д. А. Грачев<sup>1</sup>, Д. Д. Соколов<sup>2</sup>

Проведено численное моделирование простейшего дифференциального уравнения  $y'(x) = ay(x)$  со случайным коэффициентом  $a(x)$ . Результаты сравниваются с известными результатами численного исследования решений уравнения Якоби на геодезической на многообразии со случайной кривизной. Численно подтверждено, что для рассматриваемого уравнения решение растет субэкспоненциально, тогда как решение уравнения Якоби выборочно имеет экспоненциальный рост. Продемонстрирован прогрессивный рост статистических моментов решения. Показано, что объем выборки, необходимый для демонстрации прогрессивного роста моментов, составляет около  $10^3$  независимых реализаций, в то время как для уравнения Якоби объем выборки достигает  $10^5$  реализаций. Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 04-02-16094).

**Ключевые слова:** численное моделирование, уравнение со случайным коэффициентом, уравнение Якоби, многообразия со случайной кривизной.

**1. Введение.** Решения дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами обнаруживают многие неожиданные свойства [1, 2]. Например, статистические моменты решения могут расти с разной скоростью, причем среднее значение четвертой степени решения обычно растет быстрее, чем квадрат среднего квадрата (явление перемежаемости). При этом выборочно (с вероятностью 1) решение в некоторой точке может даже убывать. Напомним, что в обычной молекулярно-кинетической теории газов средние разных порядков обычно приблизительно равны. Поскольку дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами часто описывают интересные физические процессы [3], встает вопрос о поддержке выводов аналитической теории численным экспериментом. Это тем более важно, что аналитическая теория, как правило, предлагает некоторые предельные утверждения, из которых неясно, начиная с каких значений асимптотического параметра (например, объема выборки) они справедливы. В то же время, численное моделирование решений уравнений со случайными коэффициентами пока делает только первые шаги.

При численном моделировании уравнений со случайными коэффициентами с целью сравнения результатов с аналитической теорией естественно выбрать простейшие примеры таких уравнений, которые тем не менее отражают интересующий нас класс эффектов. В частности, полезно моделировать обыкновенные дифференциальные уравнения, хотя в приложениях часто встречаются уравнения с частными производными. Одним из показательных примеров такого рода является уравнение Якоби

$$y''(x) + Ky(x) = 0 \quad (1)$$

со случайным коэффициентом  $K$ , предложенное Я. Б. Зельдовичем [4] для описания распространения света во Вселенной с неоднородностями. Численное моделирование задачи Коши для этого уравнения выполнено Артюшковой и Соколовым [5–7]. Они численно показали наличие перемежаемости решений, свойства которых близки к предсказанным теорией. В то же время оказалось, что для полного воспроизведения поведения статистических средних, предсказанного теорией, необходим колоссальный объем выборки — порядка  $10^5$  реализаций.

Уравнение Якоби является простейшим уравнением, воспроизводящим явление перемежаемости. Однако существуют и более простые уравнения со случайными коэффициентами, воспроизводящие явление перемежаемости лишь частично. Показательным примером такого рода является уравнение

$$y'(x) = ay(x), \quad (2)$$

где  $a$  — случайная функция  $x$  [1]. В уравнении Якоби ожидается экспоненциальный рост типичной реализации, тогда как при обращении в нуль среднего значения  $a$  в уравнении (2) типичная реализация растет

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, 119992, Москва, Ленинские горы; e-mail: sokoloff@dds.srcc.msu.su

<sup>2</sup> Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва, Ленинские горы; e-mail: sokoloff@dds.srcc.msu.su

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

лишь как  $\exp \zeta \sqrt{x}$ , где  $\zeta$  — гауссовская случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. В этом и состоит простота уравнения (2) по сравнению с уравнением Якоби. Численное моделирование таких уравнений в контексте сравнения с данными аналитической теории и численного эксперимента для уравнения Якоби также представляет очевидный интерес и составляет предмет данной работы.

Кроме естественного сопоставления результатов для простого уравнения с результатами для более сложного, мы ожидаем, что уравнение, лишь частично воспроизводящее явление перемежаемости, должно быть в каком-то смысле проще уравнения Якоби. Мы действительно обнаружили, что полное воспроизведение эффектов перемежаемости, воспроизводимых в рамках уравнения (2), требует лишь около  $10^3$  реализаций, т.е. на два порядка меньше, чем для уравнения Якоби.

**2. Численный эксперимент.** Численное моделирование уравнения (2) требует конструктивного описания случайного процесса  $a$ . Мы выбираем это описание, ориентируясь на модели, удобные для аналитических исследований (а именно, на так называемые модели с обновлением).

Пусть полупрямая  $x \geq 0$  разбита на равные отрезки (интервалы обновления) длины  $\delta$ , которую мы для определенности выбираем в качестве единицы длины. Пусть случайный процесс  $a$  кусочно-постоянен на этих отрезках, так что его значения на полусегментах  $[0; \delta)$ ,  $[\delta; 2\delta)$ ,  $\dots$ ,  $[n\delta; (n+1)\delta)$  представляют собой статистически независимые и равномерно распределенные случайные величины  $a_n$ , которые имеют среднее и дисперсию. Для конкретности мы считаем, что они равномерно распределены на отрезке  $[-1; 1]$ . Ради определенности мы будем интересоваться поведением решения в точках обновления  $x = n\delta$ .

В качестве генератора случайных чисел мы использовали генераторы, встроенные в язык Visual C++ и в пакет Maple 5; эти генераторы дают цепочку псевдослучайных чисел с периодом повторения  $2^{32}$ , что, как оказалось, существенно превосходит наши потребности. Эти же генераторы использовались Артюшковой и Соколовым [5–7].

Для определенности мы рассматриваем решения уравнения (2) с начальным условием  $y(0) = 1$ .

Уравнение (2) можно решать обычным методом Рунге–Кутты (мы применяли метод второго порядка), однако можно заметить, что в силу кусочного постоянства  $a$  решение можно найти как произведение случайных чисел, а именно экспонент от  $a_n$ . Второй метод, разумеется, гораздо точнее. Сопоставляя результаты моделирования методом Рунге–Кутты с произведением независимых случайных чисел, можно оценить роль погрешностей численного метода, что трудно сделать для более сложных задач. Отметим, что для уравнения Якоби с кусочно-постоянным  $K$  решение формируется как произведение независимых случайных матриц [7]. С точки зрения теории вероятностей, в этом и состоит отличие нашего уравнения от уравнения Якоби. В силу центральной предельной теоремы произведение большого числа независимых случайных чисел растет как экспонента от  $\sqrt{n}$ , а произведение независимых случайных матриц растет экспоненциально (так называемая теория Ферстенберга [8]).

**3. Результаты.** Прежде всего мы изучили поведение типичной реализации решения. На рис. 1 приведены (для  $x \leq 1000$ ) по две типичных реализации решений (1) и (2), полученных с помощью метода Рунге–Кутты и вычисленных с помощью произведения случайных чисел и, соответственно, матриц. Для метода Рунге–Кутты мы брали 10 узлов сетки на интервал обновления. Кривые 1, 2 отвечают типичным реализациям решений уравнения Якоби, а кривые 3, 4 — типичным реализациям решений уравнения (2). Как видно из рисунка,  $\ln |y|$  для уравнения Якоби растет практически линейно, что хорошо согласуется с предсказаниями теории, тогда как типичная реализация для (2) ведет себя совершенно иначе и экспоненциальный рост отсутствует. Для получения этих четырех случайных последовательностей использовался генератор C++. Обратим внимание на то, что решения, построенные по методу Рунге–Кутты, лежат несколько выше, чем те, которые строились как произведения случайных чисел и матриц, причем это обстоятельство имеет место для решений обоих уравнений. Мы связываем это различие с погрешностями метода Рунге–Кутты. В то же время мы отмечаем, что указанное различие невелико, так что экспоненциальный рост решения уравнения Якоби нельзя считать артефактом численного метода. Мы проверили, что, подбирая подходящим образом число узлов сетки в методе Рунге–Кутты, можно добиться того, что он будет давать практически тот же результат, что и вычисление произведения случайных чисел. Для этого достаточно взять 40 узлов сетки на интервал обновления. Далее мы строим решения как произведения случайных чисел.

Теперь сравним решения нашего уравнения, которые получены для случайных последовательностей, выданных двумя генераторами случайных чисел из C++ и Maple (рис. 2, кривые 1 соответствуют генератору C++, кривые 2 — генератору Maple). Видно, что, как и предсказывает теория, решение растет приблизительно как  $\exp \zeta \sqrt{n}$ , где  $\zeta$  — гауссовская случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. Видно также, что оба генератора дают сходные результаты.

Для изучения поведения статистических моментов решения мы воспроизвели  $5 \cdot 10^5$  реализаций слу-

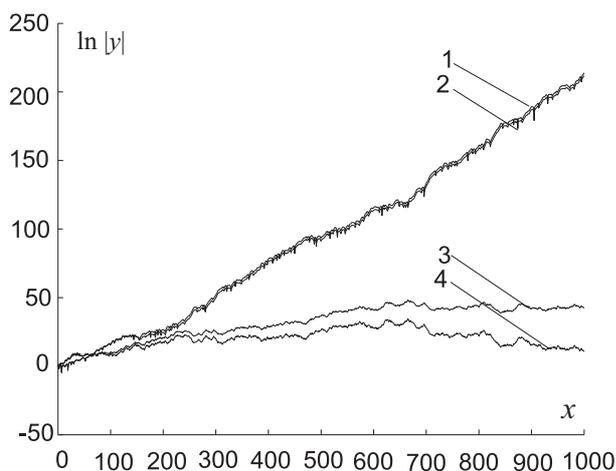


Рис. 1. Типичные реализации для уравнения Якоби (кривые 1, 2) и для уравнения (2) (кривые 3, 4), построенные по методу Рунге–Кутты (кривые 1, 3) и по специальным формулам (кривые 2, 4)

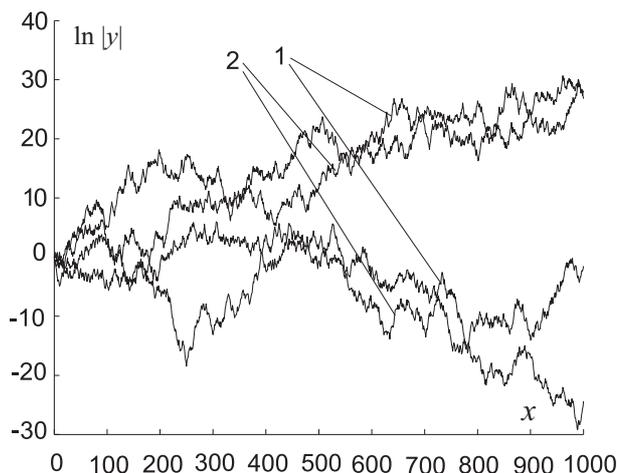


Рис. 2. Типичные реализации  $\ln(y)$ , построенные на генераторах случайных чисел C++ и Maple

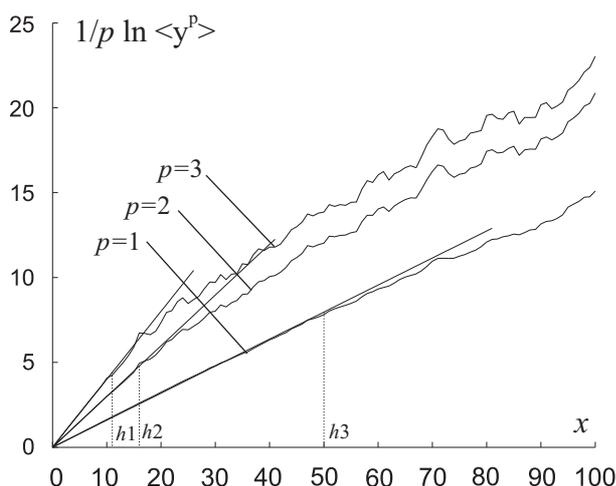


Рис. 3. Среднее  $\ln \langle y \rangle$  и моменты  $\ln \langle y^p \rangle^{1/p}$  ( $p = 2, 3$ ), построенные с помощью генератора C++ для  $5 \cdot 10^5$  реализаций

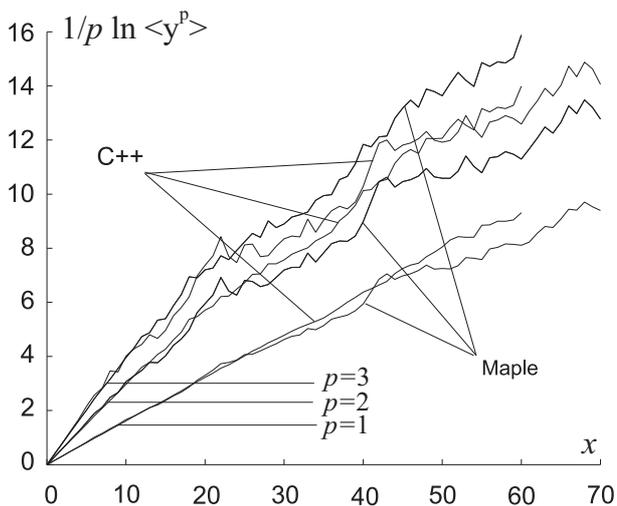


Рис. 4. Статистические моменты  $\ln \langle y^p \rangle^{1/p}$  ( $p = 1, 2, 3$ ), построенные с помощью генераторов C++ и Maple для  $10^5$  реализаций

чайного процесса  $a$ , полученных при помощи генератора C++, и построили среднее и два последующих статистических момента решения, поведение которых показано на рис. 3. Объем выборки определялся тем, что такой же объем выборки использовался для уравнения Якоби в [7]. На рисунке видно, что моменты растут экспоненциально и скорость этого роста увеличивается с номером момента. С увеличением  $x$  рост статистических моментов начинает (в силу ограниченности объема выборки) замедляться, причем точка начала замедления  $h_p$  удаляется от начала координат с уменьшением номера момента. Теория предсказывает, что объем выборки, необходимый для воспроизведения прогрессивного роста статистических моментов, должен экспоненциально расти с ростом  $x$ .

На рис. 4 мы продемонстрировали результаты сравнения генератора C++ с генератором Maple. Показаны средние  $\ln \langle y \rangle$  и высшие статистические моменты  $\ln \langle y^p \rangle^{1/p}$  ( $p = 2, 3$ ) для  $10^5$  реализаций соответствующих генераторов. Видно, что с использованием генератора C++ систематически получается большая длина участка линейного роста для данного момента  $p$ -го порядка по сравнению с длиной, полученной с использованием генератора Maple. Сами скорости роста, полученные по данным обоих генераторов, практически совпадают. Впрочем, с увеличением объема выборки указанное различие начинает уменьшаться. Мы заключаем, что генератор C++ лучше воспроизводит теоретические свойства решения,

чем генератор Maple. Похожие результаты получены в [6] для уравнения Якоби, однако в этом случае два генератора дают различные оценки скорости роста данного статистического момента.

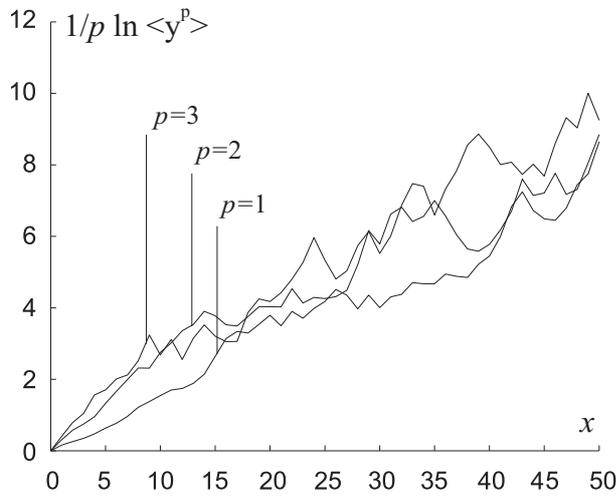


Рис. 5. Среднее  $\ln \langle y \rangle$  и моменты  $\ln \langle y^p \rangle^{1/p}$  ( $p = 2, 3$ ), построенные на генераторе C++ для 800 реализаций

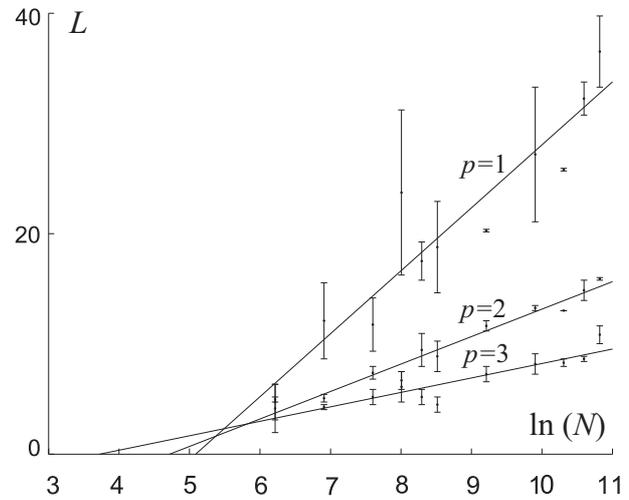


Рис. 6. Зависимость длины линейного роста  $L$  момента  $p$ -го порядка от объема выборки (в логарифмическом масштабе)

Мы провели аналогичные вычисления, меняя объем выборки (рис. 5). Видно, что для воспроизведения прогрессивного роста моментов достаточно объема выборки порядка  $10^3$ , тогда как для уравнения Якоби соответствующий объем выборки составляет  $10^4 - 10^5$  реализаций. Хотя определение объема выборки, необходимого для воспроизведения прогрессивного роста моментов, является приблизительным, различие свойств двух уравнений представляется очевидным. На рис. 6 мы дали другую иллюстрацию этого результата.

Количественные данные о характеристиках роста моментов приведены в таблице. Здесь  $N$  — размер выборки,  $h_p$  и  $\gamma_p$  — точка начала замедления и скорость роста  $p$ -го статистического момента ( $p = 1, 2, 3$ ). В этой таблице проверена также устойчивость результата к изменению объема выборки  $N$ .

Заметим, что соотношения между последовательными статистическими моментами, как это видно из таблицы, отличаются от соотношений, которые дает теория. Так, при  $N = 10^6$  скорость роста первого момента  $\gamma_1 = 0.1625$ , тогда как для момента третьего порядка имеем  $\gamma_3 = 0.4066$ . Однако центральная предельная теорема, которая утверждает, что сумма большого числа слагаемых  $a_n$  близка к гауссовской случайной величине, дает  $\gamma_3 = 3\gamma_1 = 0.4875$ , что существенно расходится с данными численного эксперимента. Дело в том, что свойства перемежаемости определяются большими отклонениями величин  $a_n$  и их суммы, для которых выводы центральной предельной теоремы с достаточной точностью не применимы.

**4. Обсуждение.** В предыдущих статьях данного цикла [5–7] мы рассматривали численное моделирование обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами с точки зрения того, насколько такое моделирование поучительно при исследовании уравнений с частными производными. Воспроизведем здесь соответствующие рассуждения применительно к интересующему нас случаю.

Пусть мы рассматриваем некоторое уравнение вида

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\hat{u} = \hat{L}(t, \mathbf{x})\hat{u} + \nu\Delta\hat{u}. \quad (3)$$

Здесь  $\hat{u}$  — скалярное или векторное (не обязательно трехмерное) поле (для того чтобы подчеркнуть эту

Основные характеристики роста статистических моментов выборки размера  $N$

$N$	Точки замедления			Скорости роста		
	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
$10^5$	35	16	12	0.1610	0.2980	0.3932
$5 \cdot 10^5$	49	15	11	0.1593	0.2989	0.4007
$10^6$	56	22	13	0.1625	0.3017	0.4066

степень свободы, мы снабдили переменную “шляпкой”). Оператор  $\hat{L}$  является алгебраическим, т.е. в скалярном случае сводится к умножению на число, а в векторном — к умножению на матрицу. Мы будем считать, что он содержит случайный параметр. Переносной член  $(\mathbf{v}\nabla)\hat{u}$  тоже может содержать случайную скорость. Мы интересуемся решением задачи Коши в безграничном пространстве, т.е. эволюцией первоначально заданного распределения  $\hat{u}$ .

Коэффициент  $\nu$  при лапласиане мы считаем малым. В силу малости коэффициента при вторых производных представляется полезным рассмотреть в качестве начального приближения для интересующей нас задачи так называемое лагранжево решение. Для этого нужно перейти в систему отсчета, движущуюся вместе со средой, и отбросить член со вторыми производными. В результате получается простое уравнение

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{L}\hat{u}, \tag{4}$$

в котором значения пространственной переменной вычисляются вдоль траектории частицы среды. Уравнение (4) легко решается. Если корреляционное время среды  $\delta$  мало, то это решение имеет вид

$$\hat{u} = \hat{A}_n \hat{A}_{n-1} \dots \hat{A}_1 \hat{u}_0,$$

где  $\hat{A}_i = \exp(\hat{L}(t_i, x_i)\delta)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Другими словами, лагранжево решение представимо как результат действия на начальное условие произведения независимых операторов или скалярных множителей.

Рассмотренное в данной работе простейшее уравнение моделирует свойство лагранжева решения для уравнения (3) в том случае, когда все операторы  $\hat{A}_n$  коммутируют друг с другом. Уравнение Якоби, рассмотренное в [5–7], моделирует свойства лагранжева решения для уравнения (3) для некоммутирующих операторов  $A_n$ .

Конечно, лагранжево решение является приближенным, поскольку в нем отброшен член со вторыми производными. Однако на его основе можно построить и точное решение — путем усреднения лагранжева решения по пучку случайных винеровских траекторий (подробнее см. [1]).

Авторы благодарны М.Е. Артюшковой и В.В. Никитину за оказанную поддержку и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Перемежаемость в случайной среде // УФН. 1987. **152**, № 1. 3–32.
2. Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Molchanov S.A., Sokoloff D.D. Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium // Sov. Sci. Rev., C. Math. Phys. 1988. **7**. 1–110.
3. Михайлов А.С., Упоров И.В. Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией // УФН. 1984. **144**, № 1. 79.
4. Зельдович Я.Б. Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // Астрон. ж. 1964. **41**. 19–24.
5. Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д. Численное моделирование распределения сопряженных точек на геодезической со случайной кривизной // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 2. 172–177.
6. Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д. Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // Астрон. ж. 2005. **82**, № 7. 584–589.
7. Artyushkova M.E., Sokoloff D.D. Modelling small-scale dynamo by the Jacobi equation // Magnetohydrodynamics. 2006. **42**, N 1. 3–19.
8. Furstenberg H. Noncommuting random products // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. **108**, N 3. 377–428.

Поступила в редакцию  
03.11.2006