

УДК 517.983

ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА И КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОБРАЩЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. В. Баев¹

Работа посвящена применению принципа Лагранжа для оптимального восстановления в задаче решения операторного уравнения. Приводятся постановки задач оптимального восстановления и формулируется более общая задача. Исследуется связь задачи в бесконечномерном пространстве с ее аналогом в конечномерном пространстве. Доказывается теорема об общих оптимальных методах восстановления у задач в бесконечномерном пространстве и в конечномерном. Исследуется приближение задачи в бесконечномерном пространстве задачами в конечномерных пространствах. Описан новый, оптимальный метод решения операторного уравнения в конечномерном пространстве (системы линейных алгебраических уравнений), использующий априорную информацию о решении. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00049).

Ключевые слова: оптимальное восстановление, обратные задачи на компактных множествах, конечномерная аппроксимация, линейные алгебраические уравнения, операторные уравнения.

1. Постановка задач.

1.1. Введение. Введем обозначение: если X и Y — некоторые множества, то Y^X — множество всех отображений из X в Y . Пусть Z и U — нормированные пространства над полем $\mathbb{R}$. Будем рассматривать лишь случаи, когда $Z \subset \mathbb{R}^{[a;b]}$ и $U \subset \mathbb{R}^{[c;d]}$, где $[a;b]$ и $[c;d]$ — отрезки из множества $\mathbb{R}$. Пусть A и A' — линейные непрерывные операторы из Z в U . Рассмотрим множество $M \subset Z$ и зафиксируем элемент $\bar{u} \in A(M)$. Из включения $\bar{u} \in A(M)$ следует, что $\exists \bar{z} \in M: A\bar{z} = \bar{u}$. Рассмотрим задачу решения уравнения

$$Az = \bar{u}, \quad z \in M. \quad (1)$$

Такое уравнение имеет решение (например, $z = \bar{z}$). В практических задачах не всегда известны точные значения элемента $\bar{u}$ и оператора A . Одной из особенностей задачи решения уравнения (1) является то, что вне зависимости от того, конечна ли размерность пространства U или нет, об элементе $\bar{u}$ известна лишь конечная информация, причем она является неточной, т.е. задана с какой-то погрешностью.

Допустим, что информация об $\bar{u}$ задается набором из m действительных чисел. Введем линейный оператор $Q_m : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Зададим ограниченное выпуклое замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, такое, что $0 \in \Omega$. Пусть приближенно известен m -мерный вектор $Q_m \bar{u}$, а именно: точно задан элемент $v \in \mathbb{R}^m$, такой, что $(v - Q_m \bar{u}) \in \Omega$. Если $\Omega = \{0\}$, то будем говорить, что правая часть уравнения (1) задана точно; в противном случае говорят, что правая часть уравнения задана с погрешностью. Будем считать, что оператор A может быть не известен точно или мы его не умеем точно вычислять, а умеем вычислять лишь оператор A' и некоторые характеристики оператора $A - A'$. Если $A = A'$, то оператор уравнения (1) задан точно; в противном случае говорят, что оператор уравнения задан с погрешностью. Известные характеристики оператора $A - A'$ будут конкретизированы позже.

В качестве ответа задачи имеет смысл требовать лишь конечный набор чисел. Разобьем задачу их поиска на несколько задач поиска одного числа. Подобные задачи сформулируем в таком виде: для заданного линейного (не обязательно непрерывного) функционала $\ell : Z \rightarrow \mathbb{R}$ требуется найти приближенное значение числа $\ell(\bar{z})$. Образ элемента z при отображении линейным функционалом ℓ будем обозначать как $\langle \ell, z \rangle$. Таким же образом будем обозначать стандартное скалярное произведение в конечномерных пространствах. Итак, мы свели задачу приближенного решения уравнения (1) к задаче поиска приближения для числа $\langle \ell, \bar{z} \rangle$ по информации $(\ell, v, \Omega, M, U, Q_m, A')$, а также некоторой информации об операторе $A - A'$. Представим метод этого поиска в виде отображения $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, переводящего вектор v в число, близкое к $\langle \ell, \bar{z} \rangle$, т.е. приближением к числу $\langle \ell, \bar{z} \rangle$ считаем число $\varphi(v)$. Любое отображение $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *методом восстановления*.

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; e-mail: andrewbayev@newmail.ru

Для случаев точных и неточных заданий оператора и правой части уравнения (1) дадим определение метода оптимального восстановления и погрешности оптимального восстановления и приведем постановку задач поиска метода оптимального восстановления и его погрешности.

1.2. Постановка задачи оптимального восстановления в случае точного задания оператора и правой части уравнения. Рассмотрим сначала случай $A' = A$ и $\Omega = \{0\} \subset \mathbb{R}^m$. Это соответствует тому, что оператор A и вектор $Q_m \bar{u}$ заданы точно. Задача поиска метода оптимального восстановления и погрешности оптимального восстановления для этого случая исследовалась во многих работах, в частности в [1, 2]. Сформулируем полученный там результат. Погрешность любого метода восстановления φ задается так: $\mathcal{E}(\ell, M, Q_m, A, \varphi) := \sup_{z \in M} |\langle \ell, z \rangle - \varphi(Q_m A z)|$. Очевидно, что $\mathcal{E}(\ell, M, Q_m, A, \varphi)$ зависит лишь от произведения операторов $Q_m A$, а не от каждого из них в отдельности. В связи с этим обобщим определение метода восстановления и его погрешности.

Определение. Подмножество M линейного пространства над полем $\mathbb{R}$ назовем уравновешенным, если верно, что $-x \in M \quad \forall x \in M$.

Если X — линейное пространство над $\mathbb{R}$, то через X' обозначим множество всех линейных отображений из X в $\mathbb{R}$. Пусть X и Y — линейные пространства над полем $\mathbb{R}$, $x' \in X'$, $F : X \rightarrow Y$ — линейный оператор, который будем называть *оператором информации*, $M \subset X$ и M — выпуклое уравновешенное подмножество. Любую функцию $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *методом восстановления функционала x' на множестве M по информации F* , а погрешностью метода восстановления φ будем называть величину $\mathcal{E}(x', M, F, \varphi) := \sup_{x \in M} |\langle x', x \rangle - \varphi(Fx)|$. Величину $E(x', M, F) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^Y} \mathcal{E}(x', M, F, \varphi)$ назовем *погрешностью оптимального восстановления*, а любой $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^Y$, на котором достигается этот минимум, назовем *методом оптимального восстановления*. Если M уравновешенное и выпуклое, то среди методов оптимального восстановления существует метод $\hat{\varphi}$, который линейен, т.е. $\hat{\varphi} \in Y'$. Этот факт доказывался в работах [15, 16], а для более общей постановки задачи подобное утверждение было доказано в [3, 11]. Из сказанного следует, что $E(x', M, F) = \inf_{\varphi \in Y'} \sup_{x \in M} |\langle x', x \rangle - \langle \varphi, Fx \rangle|$.

Как уже упоминалось, при решении задач на практике информация об искомом элементе всегда конечна, поэтому будем полагать $Y = \mathbb{R}^m$. Далее будем стандартным образом отождествлять пространства $(\mathbb{R}^m)'$ и $\mathbb{R}^m$.

В дальнейшем задачи на поиск минимума и экстремалей будем записывать следующим образом:

$$f(x) \rightarrow \min_x, \quad P(x).$$

Подобная запись означает, что ищется минимум значения функционала f по аргументу x ; на месте выражения $P(x)$ будут стоять условия, задающие множество изменения аргумента x ; решением такой задачи на экстремум будем считать элемент x , который удовлетворяет условию $P(x)$ и на котором достигается минимум. Задачу поиска метода оптимального восстановления функционала x' на множестве M по информации F теперь будем записывать так:

$$\sup_{x \in M} |\langle x', x \rangle - \langle \varphi, Fx \rangle| \rightarrow \min_{\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Сопоставим этой задаче экстремальную задачу, которую назовем ассоциированной к задаче (2) [1, 2]:

$$\langle x', x \rangle \rightarrow \max_x, \quad x \in M, \quad Fx = 0. \quad (3)$$

В работе [1] доказана следующая

Теорема 1 (принцип Лагранжа для задачи оптимального восстановления). Пусть X и Y — линейные пространства над полем $\mathbb{R}$, $x' \in X'$, $M \subset X$ — выпуклое уравновешенное подмножество, $F : X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Определим функцию Лагранжа $\mathcal{L}_0 : X \times Y' \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_0(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -\langle x', x \rangle + \langle \lambda, Fx \rangle$. Если $\hat{x}$ является допустимой точкой в ассоциированной задаче (3) (т.е. $\hat{x} \in M$ и $F\hat{x} = 0$), то

1) следующие два условия эквивалентны: а) $\hat{x}$ является решением задачи (3);

$$\text{б) } \exists \hat{\lambda} \in Y' : \mathcal{L}_0(\hat{x}, \hat{\lambda}) = \inf_{x \in M} \mathcal{L}_0(x, \hat{\lambda});$$

2) при выполнении этих двух эквивалентных условий $\varphi = \hat{\lambda}$ является методом оптимального восстановления в задаче (2) и его погрешность такова: $E(x', M, F) = \langle x', \hat{x} \rangle$.

Для применения теоремы к нашему случаю следует положить $X = Z$, $Y = \mathbb{R}^m$, $M = M$, $x' = \ell$ и $F = Q_m A$. Аргумент λ функции Лагранжа будем называть множителем Лагранжа. Таким образом,

поиск метода и погрешности оптимального восстановления сводится к поиску $\hat{x}$, являющемуся решением задачи (3), и поиску множителя Лагранжа $\hat{\lambda}$. В дальнейшем задачей *оптимального восстановления* будем называть задачу поиска метода и погрешности оптимального восстановления.

1.3. Постановка задачи оптимального восстановления в случае погрешности задания правой части уравнения. Случай, когда $A' = A$, а $\Omega \neq \{0\}$, рассмотрен в [2]. Сформулируем полученные там результаты. Пусть X — линейное пространство, $M \subset X$ — его подмножество, $F : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$. Для этих объектов определим семейство множеств

$$\mathfrak{M}(X, M, F, \mathcal{O}) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}^m \mid x \in M, (y - Fx) \in \mathcal{O}\}. \quad (4)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать различные множества из этого семейства. Используем обозначение $M_F := \mathfrak{M}(Z, M, F, \Omega)$.

Лемма. Пусть оператор $F : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$ линейный. Верны следующие утверждения:

- 1) если M и Ω выпуклы, то M_F выпукло.
- 2) если M и Ω уравновешены, то M_F уравновешено.

Если на Z введена норма, то на линейном пространстве $Z \times \mathbb{R}^m$ введем норму следующим образом:

пусть $z \in Z$, $y \in \mathbb{R}^m$, тогда $\|(z, y)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\|z\|^2 + \|y\|^2}$. В этом случае верны следующие утверждения:

- 3) если M и Ω ограничены, а F непрерывен, то M_F ограничено.
- 4) если M и Ω замкнуты, а F непрерывен, то M_F замкнуто.

Доказательство тривиально.

Замечание 1. Вместо множества M_F в лемме можно брать любое множество из семейства (4). При выполнении соответствующих условий для них будут верны утверждения леммы.

Задачу поиска погрешности и метода оптимального восстановления для $A' = A$ и $\Omega \neq \{0\}$ сформулируем так:

$$\sup_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: (y - Q_m A z) \in \Omega}} |\langle \ell, z \rangle - \langle \varphi, y \rangle| \rightarrow \min_{\varphi} \quad \varphi \in \mathbb{R}^m, \text{ что эквивалентно}$$

$$\sup_{(z, y) \in M_{Q_m A}} |\langle \ell, z \rangle - \langle \varphi, y \rangle| \rightarrow \min_{\varphi} \quad \varphi \in \mathbb{R}^m. \quad (5)$$

Если в условии теоремы 1 положить $X = Z \times \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^m$, $M = M_{Q_m A}$, а для любого $(z, y) \in Z \times \mathbb{R}^m$ определить оператор $F : X \rightarrow Y$ и функционал $x' \in X'$ как $F(z, y) = y$ и $\langle x', (z, y) \rangle = \langle \ell, z \rangle$, то задача (5) примет вид (2) и для задачи (5) будет выполнена теорема 1. Ассоциированная задача имеет вид

$$\langle \ell, z \rangle \rightarrow \max_{(z, y)} \quad (z, y) \in M_{Q_m A}, \quad y = 0. \quad (6)$$

Для $x' \in X'$ и $M \subset X$ сформулируем задачи (5) и (6) в общем виде:

$$\sup_{\substack{x \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Fx \in \mathcal{O}}} |\langle x', x \rangle - \langle \varphi, y \rangle| \rightarrow \min_{\varphi} \quad \varphi \in \mathbb{R}^m, \quad (7)$$

$$\langle x', x \rangle \rightarrow \max_{(x, y)} \quad (x, y) \in X \times \mathbb{R}^m, \quad x \in M, \quad y - Fx \in \mathcal{O}, \quad y = 0. \quad (8)$$

Погрешностью оптимального восстановления в задаче (7) назовем значение минимума в этой задаче и обозначим его $E(x', M, F, \mathcal{O})$, а методом оптимального восстановления назовем решение задачи (7). Сформулируем теорему, доказательство которой следует из результатов [2].

Теорема 2. Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$, $x' \in X'$, $Y = \mathbb{R}^m$, множества $M \subset X$ и $\mathcal{O} \subset Y$ выпуклы и уравновешены, а оператор $F : X \rightarrow Y$ линейный. Определим функцию Лагранжа $\mathcal{L} : (X \times Y) \times Y' \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{L}((x, y), \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -\langle x', x \rangle + \langle \lambda, y \rangle$. Если элемент $(\hat{x}, 0) \in X \times Y$ является допустимой точкой в задаче (8) (т.е. $(\hat{x}, 0) \in \mathfrak{M}(X, M, F, \mathcal{O})$ или, что то же самое, $\hat{x} \in M$ и $-F\hat{x} \in \mathcal{O}$), то

- 1) следующие два условия эквивалентны: а) $(\hat{x}, 0)$ является решением задачи (8);

$$\text{б) } \exists \hat{\lambda} \in Y' : \mathcal{L}((\hat{x}, 0), \hat{\lambda}) = \inf_{\substack{x \in M, \\ y \in Y: y - Fx \in \mathcal{O}}} \mathcal{L}((x, y), \hat{\lambda});$$

- 2) при выполнении этих условий $\varphi = \hat{\lambda}$ является методом оптимального восстановления в задаче (7) и его погрешность (т.е. значение минимума в задаче (7)) имеет вид $E(x', M, F, \mathcal{O}) = \langle x', \hat{x} \rangle \equiv -\mathcal{L}((\hat{x}, 0), \hat{\lambda})$.

Замечание 2. В задаче (7) метод оптимального восстановления может быть не единственным. Множитель Лагранжа, существование которого утверждается в п. 1 теоремы 2, также может быть не единственным.

1.4. Постановка задачи оптимального восстановления в случае погрешности задания оператора и правой части уравнения. Когда $A' \neq A$ и $\Omega \neq \{0\}$, задачу поиска погрешности и метода оптимального восстановления сведем к задачам в форме (7) и (8), для которых выполнена теорема 2. Введем подмножество $\Theta \subset \mathbb{R}^m$: $\Theta := \{Q_m(A - A')z \mid z \in M\}$. Для любого $(z, y) \in \mathcal{M}_{Q_m A}$ имеем

$$y - Q_m A' z = (y - Q_m A z) + Q_m(A - A')z \in \Omega + \Theta.$$

Из этого следует, что $\mathcal{M}_{Q_m A} \subset \mathfrak{M}(Z, M, Q_m A', \Omega + \Theta)$ и вместо $\mathcal{M}_{Q_m A}$ можно использовать множество $\mathfrak{M}(Z, M, Q_m A', \Omega + \Theta)$. Здесь нам понадобится задание множества $\Omega + \Theta$, однако точное задание этого множества возможно не всегда. Будем считать, что нам задано множество $\mathcal{O}$, содержащее $\Omega + \Theta$: $\mathcal{O} \supset \Omega + \Theta$. Тогда $\mathcal{M}_{Q_m A} \subset \mathfrak{M}(Z, M, Q_m A', \mathcal{O})$. Задачу поиска погрешности и метода оптимального восстановления сформулируем так:

$$\sup_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A' z \in \mathcal{O}}} |\langle \ell, z \rangle - \langle \varphi, y \rangle| \rightarrow \min_{\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m. \quad (9)$$

Эта задача имеет форму задачи (7), а значит, для нее применима теорема 2.

Предложение 1. Пусть $Q_m(A - A')$ линейный оператор. Тогда

- 1) если M и Ω выпуклы, то $\Omega + \Theta$ выпукло,
- 2) если M и Ω уравновешены, то $\Omega + \Theta$ уравновешено.

Доказательство тривиально.

Имея в виду предложение 1, будем считать, что множества M и $\mathcal{O}$ выпуклы и уравновешены. Множество $\mathcal{O}$ в задаче оптимального восстановления (9) и других подобных задачах имеет смысл окрестности, с помощью которой можно задавать погрешность правой части уравнения (1) и погрешность задания оператора того же уравнения. Множество $\mathcal{O}$ будем называть *окрестностью погрешности*.

Замечание 3. В задаче (7) минимизируется значение точной верхней грани. Для некоторых задач эта грань не существует (равна бесконечности) при любых методах восстановления φ . В таком случае будем говорить, что любой метод восстановления имеет бесконечную погрешность, а метода оптимального восстановления не существует.

Замечание 4. Теорема 2 утверждает, что если существует решение ассоциированной задачи, то метод оптимального восстановления существует. Однако имеются задачи, для которых не существует решения у ассоциированной задачи. Это может быть связано не только с тем, что не существует метода оптимального восстановления. Например, это может быть из-за незамкнутости множеств M и $\mathcal{O}$. Если в задаче (8) пространство X конечномерно, функционал x' и оператор F непрерывны, $x' \neq 0$, а множества M и $\mathcal{O}$ открыты, то решения ассоциированной задачи (8) не существует. Однако легко построить пример, для которого при таких условиях существует метод оптимального восстановления.

2. Сведение задачи оптимального восстановления для бесконечномерного пространства к конечномерной задаче. Целью настоящей статьи является исследование задачи оптимального восстановления в случае погрешности в задании и оператора, и правой части уравнения (1). Положим $\langle \ell, z \rangle = z(\theta)$, где θ — некоторая фиксированная точка из отрезка $[a; b]$.

Вместо функций из бесконечномерного пространства Z часто можно оперировать лишь с конечномерными аналогами этих функций. Замена пространства Z на некоторый конечномерный аналог может быть представлена в виде действия линейного оператора. Рассмотрим пару линейных пространств Z и $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, и пару линейных операторов $P_n : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $L_n : \mathbb{R}^n \rightarrow Z$: оператор P_n сопоставляет элементу из Z его конечномерный аналог, а оператор L_n по конечномерному вектору строит функцию. Наложим требования на операторы. Пусть $\hat{1}_{\mathbb{R}^n}$ — единичный оператор в $\mathbb{R}^n$, тогда

$$L_n P_n(M) \subset M, \quad P_n L_n = \hat{1}_{\mathbb{R}^n}. \quad (10)$$

Оператор $L_n P_n$ является проектором в Z : $(L_n P_n)(L_n P_n) = L_n(P_n L_n)P_n = L_n \hat{1}_{\mathbb{R}^n} P_n = L_n P_n$.

Определение. Подмножество $\{t_i\}_{i=1}^n \subset [a'; b']$, где $n \in \mathbb{N}$, называется сеткой на отрезке $[a'; b'] \subset \mathbb{R}$, если $a' \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \leq b'$. Если $[a'; b'] = [a; b]$, то будем считать, что $\exists q \in \{1; \dots; n\} : \theta = t_q$.

Определим оператор P_n следующим образом:

$$(P_n z)_i \stackrel{\text{def}}{=} z(t_i) \quad \forall i \in \{1; \dots; n\}, \quad (11)$$

где $(P_n z)_i$ — i -я координата вектора $P_n z$. Из определений следует, что $(P_n z)_q = z(t_q) = z(\theta)$. Такие операторы P_n и L_n применялись, например, в [4–7, 18, 19].

Теорема 2 позволяет свести задачу оптимального восстановления к поиску решения ассоциированной задачи и поиску множителя Лагранжа, при котором функция Лагранжа достигает минимума на решении ассоциированной задачи. Задача оптимального восстановления имеет вид

$$\sup_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A' z \in \mathcal{O}}} |z(\theta) - \langle \varphi, y \rangle| \rightarrow \min_{\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m, \quad (12)$$

а ассоциированная задача формулируется в виде

$$z(\theta) \rightarrow \max_{(z, y)}, \quad (z, y) \in Z \times \mathbb{R}^m, \quad z \in M, \quad y - Q_m A' z \in \mathcal{O}, \quad y = 0. \quad (13)$$

В дальнейшем будем считать, что решение ассоциированной задачи существует. Обозначим одно из решений задачи (13) как $(\hat{z}, 0)$. Если в теореме 2 положить $X = Z$, $\langle x', z \rangle = z(\theta)$, $\mathcal{M} = M$ и $F = Q_m A'$, то из нее следует, что метод оптимального восстановления для задачи (12) существует (обозначим его $\hat{\lambda}$), его погрешность равна $\hat{z}(\theta)$,

$$-\hat{z}(\theta) = \inf_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A' z \in \mathcal{O}}} (-z(\theta) + \langle \hat{\lambda}, y \rangle),$$

а точка $(\hat{z}, 0)$ принадлежит множеству, по которому берется последний $\inf$ (поэтому минимум в нем достигается на точке $(\hat{z}, 0)$). Функция Лагранжа для задачи (12) будет такой: $\mathcal{L}((z, y), \lambda) = -z(\theta) + \langle \lambda, y \rangle$. Рассмотрим случай, когда оператор A' задан в виде $A' = A_0 L_n P_n$, где линейный оператор $A_0 : Z \rightarrow U$ мы умеем вычислять. Такой вид оператора A' рассматривался в [4–7]. Рассмотрим любые $z_1, z_2 \in Z$: $P_n z_1 = P_n z_2$. Для них имеем $z_1(\theta) = z_1(t_q) = (P_n z_1)_q = (P_n z_2)_q = z_2(t_q) = z_2(\theta)$,

$$\{y \in \mathbb{R}^m \mid y - Q_m A_0 L_n P_n z_1 \in \mathcal{O}\} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y - Q_m A_0 L_n P_n z_2 \in \mathcal{O}\}.$$

Из этого следует, что

$$\inf_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} (-z(\theta) + \langle \hat{\lambda}, y \rangle) = \inf_{\substack{x \in P_n(M), \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} (-x_q + \langle \hat{\lambda}, y \rangle), \quad (14)$$

причем левый $\inf$ достигается в точке $(z, y) = (\hat{z}, 0)$, а правый $\inf$ — в точке $(x, y) = (P_n \hat{z}, 0)$. Для задачи (13) получим

$$\sup_{\substack{z \in M, \\ -Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} z(\theta) = \sup_{\substack{z \in M, \\ -Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} (P_n z)_q = \sup_{\substack{x \in P_n(M), \\ -Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} x_q, \quad (15)$$

причем левый $\sup$ достигается в $\hat{z}$, а правый $\sup$ достигается в $P_n \hat{z}$.

Рассмотрим базис в $\mathbb{R}^n$: $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$, $(e_i)_k = \delta_{ik}$, где δ — символ Кронекера. Введем аналогичный базис в $\mathbb{R}^m$: $\{g_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^m$, $(g_j)_l = \delta_{jl}$. Далее любой линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ всюду будем отождествлять с его матрицей относительно введенных базисов, векторы конечномерных пространств представлять в виде столбцов, а действие оператора на вектор представлять в виде произведения матрицы оператора на этот столбец. Обозначим: $B \stackrel{\text{def}}{=} Q_m A_0 L_n$ (т.е. $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$); $M_n \stackrel{\text{def}}{=} P_n(M)$ (т.е. $M_n \subset \mathbb{R}^n$). В правой части (14) мы получили задачу минимизации новой функции Лагранжа: $\mathcal{L}_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_n((x, y), \lambda) = -x_q + \langle \lambda, y \rangle = \langle -e_q, x \rangle + \langle \lambda, y \rangle$. Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального восстановления функционала на конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\sup_{\substack{x \in M_n, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Bx \in \mathcal{O}}} |\langle e_q, x \rangle - \langle \varphi, y \rangle| \rightarrow \min_{\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m. \quad (16)$$

Ассоциированной к ней будет задача

$$\langle e_q, x \rangle \rightarrow \max_{(x, y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad x \in M_n, \quad y - Bx \in \mathcal{O}, \quad y = 0. \quad (17)$$

Теорема 3 (о сведении к конечномерной задаче). *Положим в задачах (12) и (13) $A' = A_0 L_n P_n$. Тогда*

1) если $(\hat{z}, 0) \in Z \times \mathbb{R}^m$ — решение задачи (13), а $\hat{\lambda}$ — множитель Лагранжа, при котором минимум функции Лагранжа для задачи (12) достигается на $(\hat{z}, 0)$, т.е.

$$-\hat{z}(\theta) = \inf_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} (-z(\theta) + \langle \hat{\lambda}, y \rangle),$$

то $(P_n \hat{z}, 0)$ является решением задачи (17), $\hat{\lambda}$ является методом оптимального восстановления задачи (16) и его погрешность равна $(P_n \hat{z})_q$;

2) если $(\hat{x}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — решение задачи (17), а $\hat{\lambda}_n$ — множитель Лагранжа, при котором минимум функции Лагранжа $\mathcal{L}_n$ задачи (16) достигается на $(\hat{x}, 0)$, т.е.

$$-\hat{x}_q = \inf_{\substack{x \in M_n, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Bx \in \mathcal{O}}} (-x_q + \langle \hat{\lambda}_n, y \rangle),$$

то $\forall \hat{z} \in M$: $P_n \hat{z} = \hat{x}$ точка $(\hat{z}, 0)$ является решением задачи (13), $\hat{\lambda}_n$ является методом оптимального восстановления задачи (12) и его погрешность равна $\hat{x}_q$. Если при этом выполнены условия (10), то элемент $L_n \hat{x}$ удовлетворяет условиям на $\hat{z}$.

Доказательство. 1) Из формулы (15) и комментария после нее следует, что $(P_n \hat{z}, 0)$ является решением задачи (17). Задача минимизации функции $\mathcal{L}_n$ со значением множителя Лагранжа, равным $\hat{\lambda}$, имеет вид

$$\langle -e_q, x \rangle + \langle \hat{\lambda}, y \rangle \rightarrow \min, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad x \in M_n, \quad y - Bx \in \mathcal{O}.$$

Из формулы (14) и комментария после нее следует, что в этой задаче минимум достигается на элементе $(x, y) = (P_n \hat{z}, 0)$. Из этого по теореме 2, примененной к случаю, когда $X = \mathbb{R}^n$, $x' = e_q$, $M = M_n$, $F = B$, получаем, что $\hat{\lambda}$ — метод оптимального восстановления в задаче (16) и его погрешность равна $\langle e_q, P_n \hat{z} \rangle = (P_n \hat{z})_q = \hat{z}(\theta)$.

2) Так же, как и при выводе формул (14) и (15), получим равенство максимумов для задач (17) и (13):

$$\hat{x}_q = \sup_{\substack{x \in P_n(M), \\ -Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} x_q = \sup_{\substack{z \in M, \\ -Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} (P_n z)_q = \sup_{\substack{z \in M, \\ -Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} z(\theta). \quad (18)$$

Рассмотрим любой элемент $\hat{z} \in M$: $P_n \hat{z} = \hat{x}$. Убедимся, что он удовлетворяет обоим условиям, ограничивающим множество, по которому ищется последний sup в (18), и убедимся, что на $\hat{z}$ достигается этот максимум (из этого будет следовать, что $(\hat{z}, 0)$ является решением задачи (13)): $\hat{z} \in M$; $-Q_m A_0 L_n P_n \hat{z} = -Q_m A_0 L_n \hat{x} = -B\hat{x} \in \mathcal{O}$ (вложение следует из того, что $(\hat{x}, 0)$ — решение задачи (17)); из (18) получаем $(P_n \hat{z})_q = \hat{x}_q = \sup_{\substack{z \in M, \\ -Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} (P_n z)_q$.

Итак, мы получили, что $(\hat{z}, 0)$ является решением задачи (13). Как и при выводе формулы (14), примем во внимание, что $z(\theta) = (P_n z)_q$; тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m$ получим равенство минимумов функций Лагранжа для задач (12) и (16):

$$\inf_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} (-z(\theta) + \langle \lambda, y \rangle) = \inf_{\substack{x \in P_n(M), \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} (-x_q + \langle \lambda, y \rangle). \quad (19)$$

Слева ищется минимум функции $\mathcal{L}$, справа — функции $\mathcal{L}_n$. При $\lambda = \hat{\lambda}_n$ правый inf равен $-\hat{x}_q$ и достигается на элементе $(x, y) = (\hat{x}, 0)$. Поскольку $-\hat{x}_q = -(P_n \hat{z})_q = -\hat{z}(\theta) = \mathcal{L}((\hat{z}, 0), \hat{\lambda}_n)$, то минимум функции Лагранжа $\mathcal{L}$ достигается на элементе $(\hat{z}, 0)$, если множитель Лагранжа равен $\hat{\lambda}_n$. Из этого по теореме 2, примененной к случаю, когда $X = Z$, $\langle x', z \rangle = z(\theta)$, $M = M$, $F = Q_m A_0 L_n P_n$, получим, что $\hat{\lambda}_n$ — метод оптимального восстановления в задаче (12) и его погрешность равна $\hat{z}(\theta) = (P_n \hat{z})_q = \hat{x}_q$. Покажем, наконец, что при выполнении условий (10) элемент $z_1 := L_n \hat{x}$ принадлежит множеству M и $P_n z_1 = \hat{x}$:

$$\hat{x} \in P_n(M) \Rightarrow L_n \hat{x} \in L_n P_n(M) \subset M, \quad P_n z_1 = P_n L_n \hat{x} = \hat{1}_{\mathbb{R}^n} \hat{x} = \hat{x}.$$

Теорема доказана.

Если $\dim \text{span}(M) = \infty$, то смысл только что доказанной теоремы состоит в том, что вместо задачи (12), где фигурируют бесконечномерное пространство Z и его бесконечномерное подмножество M , можно

решать задачу (16). При этом погрешность оптимального восстановления и множество методов оптимального восстановления, найденных в виде множителей Лагранжа по теореме 2, будут совпадать у задачи (12) и у задачи (16). Возникнет проблема: вводя оператор A' в виде $A' = A_0 L_n P_n$, придется расширять множество $\mathcal{O}$ по сравнению с вариантом рассмотрения оператора в виде $A' = A_0$, где оператор A_0 умеем вычислять точно. Исследование этой проблемы проведено ниже.

3. Приближение бесконечномерной задачи конечномерными задачами.

Определение. Рассмотрим сетку $\{t_i\}_{i=1}^n \subset [a; b]$. Ее расширением будем называть любую сетку $\{\bar{t}_i\}_{i=1}^{\bar{n}} \subset [a; b]$, где $\bar{n} \in \mathbb{N}$, для которой $\bar{n} \geq n$ и $\{\bar{t}_i\}_{i=1}^{\bar{n}} \supset \{t_i\}_{i=1}^n$.

Представим любую сетку $\{t_i\}_{i=1}^n \subset [a; b]$ вектором $t \in [a; b]^n$. Для любой сетки $t \in [a; b]^n$ введем

1) номер $q(t) \in \{1; \dots; n\} : t_{q(t)} = \theta$;

2) операторы L_n и P_n , которые мы ввели для сетки t в начале раздела 2.

Задачу (12) мы свели к задаче (16), положив $A' := A_0 L_n P_n$. Так можно сделать для любой сетки на отрезке $[a; b]$, при этом будут верны соответствующие утверждения теоремы 3. Однако оператор A' можно не модифицировать умножением справа на проекционный оператор $L_n P_n$, а положить $A' := A_0$ (при этом задача (12) не изменится; в ней изменятся только обозначения). Исследуем связь модифицированных и немодифицированной задач.

Теорема 4. Рассмотрим последовательность сеток $\{\{t_i^n\}_{i=1}^n\}_{n=1}^\infty$, где для любого $n \in \mathbb{N}$ $t^n \in [a; b]^n$ — сетка из n узлов на отрезке $[a; b]$ и $t_i^n \equiv (t^n)_i$. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ сетка t^{n+1} является расширением сетки t^n , $(\tilde{x}_n, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — решение задачи (17), $\tilde{z}_n := L_n \tilde{x}_n$, оператор P_n определен в (11) и выполнены условия:

$$L_n P_n(M) \subset L_{(n+1)} P_{(n+1)}(M) \subset M, \quad (20)$$

$$z(\theta) = L_n P_n z(\theta) \quad \forall z \in M, \quad (21)$$

$$P_n L_n = \hat{1}_{\mathbb{R}^n}. \quad (22)$$

Пусть $(\hat{z}, 0) \in Z \times \mathbb{R}^m$ — решение задачи (13) при $A' = A_0$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$(\tilde{x}_n)_{q(t^n)} = \tilde{z}_n(\theta) = \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} z(\theta), \quad (23)$$

$$0 \leq \tilde{z}_n(\theta) \leq \tilde{z}_{n+1}(\theta) \leq \hat{z}(\theta). \quad (24)$$

Доказательство. Из (22) получим, что $\tilde{x}_n = P_n L_n \tilde{x}_n = P_n \tilde{z}_n$. Из этого по определению оператора P_n и индекса $q(t^n)$ следует, что $(\tilde{x}_n)_{q(t^n)} = (P_n \tilde{z}_n)_{q(t^n)} = \tilde{z}_n(\theta)$. Первое равенство в (23) доказано. Из определения $\tilde{x}_n$ получим $\tilde{z}_n(\theta) = (\tilde{x}_n)_{q(t^n)} = \langle e_{q(t^n)}, \tilde{x}_n \rangle = \sup_{\substack{x \in M_n: \\ Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} \langle e_{q(t^n)}, x \rangle$, где $\sup$ берется от линейного

функционала по уравновешенному множеству; следовательно, он неотрицателен: $\tilde{z}_n(\theta) \geq 0$. Используя определение $\tilde{x}_n$, докажем, что $\tilde{z}_n(\theta) = \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} z(\theta)$:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_n(\theta) &= (\tilde{x}_n)_{q(t^n)} = \sup_{\substack{x \in M_n: \\ Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} \langle e_{q(t^n)}, x \rangle = \sup_{\substack{x \in P_n(M): \\ Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} x_{q(t^n)} = \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} (P_n z)_{q(t^n)} = \\ &= \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} z(\theta) \stackrel{(21)}{=} \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} L_n P_n z(\theta) = \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} z(\theta). \end{aligned}$$

Формула (23) доказана для любого $n \in \mathbb{N}$. Для любых $M', M'' \subset M : M' \subset M''$ выполнено вложение $\{z \in M' \mid Q_m A_0 z \in \mathcal{O}\} \subset \{z \in M'' \mid Q_m A_0 z \in \mathcal{O}\}$. Из этого вложения следует $\sup_{\substack{z \in M': \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} z(\theta) \leq \sup_{\substack{z \in M'': \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} z(\theta)$.

Тогда из (20) получим $\sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} z(\theta) \leq \sup_{\substack{z \in L_{n+1} P_{n+1}(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} z(\theta) \leq \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} z(\theta)$, что в силу определения $\hat{z}$ и доказанных равенств (23) для $\tilde{z}_n(\theta)$ и $\tilde{z}_{n+1}(\theta)$ равносильно

$$\tilde{z}_n(\theta) \leq \tilde{z}_{n+1}(\theta) \leq \hat{z}(\theta). \quad (25)$$

Теорема доказана.

Неравенства (25) дают оценку снизу для величины $\widehat{z}(\theta)$, которая является погрешностью оптимального восстановления для задачи (12) при $A' = A_0$. Найдем оценку сверху, модифицировав окрестности погрешности для конечномерных задач. Введем векторы дополнительных погрешностей $\{\Delta^{(n,0)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$:

$$(\Delta^{(n,0)})_j \equiv \Delta_j^{(n,0)} := \sup_{z \in M} |(Q_m A_0(z - L_n P_n z))_j| \quad \forall j \in \{1; \dots; m\}.$$

Будем считать, что в задачах известны не сами векторы $\Delta^{(n,0)}$, а лишь оценки сверху для их координат. Эти оценки мы объединим в векторы $\Delta^n \in \mathbb{R}^m$:

$$\Delta_j^n \equiv (\Delta^n)_j \geq \Delta_j^{(n,0)} \quad \forall j \in \{1; \dots; m\}. \quad (26)$$

Пусть $\mathcal{O}_0$ — некоторое выпуклое уравновешенное множество, такое, что $\mathcal{O}_0 \supset \Omega + \{Q_m(A - A_0)z \mid z \in M\}$; $\mathcal{O}'_n := \{w \in \mathbb{R}^m \mid |w_l| \leq \Delta_l^n \forall l \in \{1; \dots; m\}\}$; $\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_0 + \mathcal{O}'_n$. Из обозначений следует, что $\forall z \in M$ выполнено $Q_m A_0(z - L_n P_n z) \in \mathcal{O}'_n$. Множество $\mathcal{O}_n$ будет задавать окрестность погрешности в задаче (17).

Теорема 5. Введем последовательность сеток $\{\{t_i^n\}_{i=1}^n\}_{n=1}^{\infty}$, где для любого $n \in \mathbb{N}$ $t^n \in [a; b]^n$ — сетка из n узлов на отрезке $[a; b]$ и $t_i^n \equiv (t^n)_i$. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ сетка t^{n+1} является расширением сетки t^n . Для этих сеток введем векторы $\Delta^n \in \mathbb{R}^m$, такие, что выполнено (26) и при любом $j \in \{1; \dots; m\}$ последовательность $\{\Delta_j^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю, монотонно не возрастая. Пусть $(\widehat{z}, 0) \in Z \times \mathbb{R}^m$ — решение задачи (13) при $A' = A_0$ и $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$; для любого $n \in \mathbb{N}$ $(\widehat{x}_n, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — решение задачи (17), где вместо $\mathcal{O}$ стоит $\mathcal{O}_n$, $\widehat{z}_n := L_n \widehat{x}_n$, оператор P_n определен в (11), выполнены условия (21), (22) и

$$L_n P_n(M) \subset M. \quad (27)$$

Пусть на пространстве Z введена sup-норма, множество M компактно в Z , оператор $Q_m A_0 : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывен, $\mathcal{O}_0$ замкнуто. Тогда

$$\widehat{z}(\theta) \leq \widehat{z}_n(\theta), \quad (28)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{z}_n(\theta) = \widehat{z}(\theta). \quad (29)$$

Доказательство. По определению $\widehat{z}$ является экстремалью такой задачи:

$$z(\theta) \rightarrow \max_z, \quad z \in M, \quad Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_0. \quad (30)$$

Из определений $\widehat{x}_n$ и $\widehat{z}_n$ и условий (21) и (22) (см. теорему 4) следует, что $\widehat{z}_n$ является экстремалью для точной верхней грани в формуле (23) при $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$:

$$\widehat{z}_n(\theta) = \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n}} z(\theta). \quad (31)$$

Докажем, что функция $L_n P_n \widehat{z}$ является допустимой точкой в этой экстремальной задаче. Очевидно, что $L_n P_n \widehat{z} \in L_n P_n(M)$. Остается проверить, что $Q_m A_0 L_n P_n \widehat{z} \in \mathcal{O}_n$:

$$Q_m A_0 L_n P_n \widehat{z} = Q_m A_0 \widehat{z} + Q_m A_0 (\widehat{z} - L_n P_n \widehat{z}) \in \mathcal{O}_0 + \mathcal{O}'_n = \mathcal{O}_n.$$

Из условия (21) и того, что функция $L_n P_n \widehat{z}$ является допустимой точкой в экстремальной задаче для функции $\widehat{z}_n$, следует неравенство (28): $\widehat{z}(\theta) = L_n P_n \widehat{z}(\theta) \leq \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n}} z(\theta) = \widehat{z}_n(\theta)$. Рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу:

$$z(\theta) \rightarrow \max_z, \quad z \in M, \quad Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n.$$

В этой задаче ищется максимум непрерывного (по условию) функционала на компактном множестве: оператор $Q_m A_0$ непрерывен, следовательно, прообраз замкнутого множества $\mathcal{O}_n$ при отображении этим оператором замкнут, пересечение этого замкнутого множества с компактным множеством M компактно. Из этого следует, что максимум существует и достигается. Пусть $\widehat{\zeta}_n$ — экстремаль вспомогательной задачи. Имеем

$$\widehat{z}(\theta) \leq \widehat{z}_n(\theta) = \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n}} z(\theta) \stackrel{(27)}{\leq} \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n}} z(\theta) = \widehat{\zeta}_n(\theta). \quad (32)$$

Из монотонного невозрастания последовательности $\{\Delta_j^n\}_{n=1}^\infty$ следует, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно $\mathcal{O}_{n+1} \subset \mathcal{O}_n$. Из этого следует монотонное невозрастание последовательности $\{\hat{\zeta}_n(\theta)\}_{n=1}^\infty$:

$$\hat{\zeta}_{n+1}(\theta) = \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_{n+1}}} z(\theta) \leq \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n}} z(\theta) = \hat{\zeta}_n(\theta).$$

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\zeta}_n(\theta) = \hat{z}(\theta)$ (с учетом оценок в (32) из этого будет следовать (29) и теорема будет полностью доказана). По определению $\{\hat{\zeta}_n\}_{n=1}^\infty \subset M$. Это последовательность в компакте M . У нее существует сходящаяся подпоследовательность, предел которой принадлежит M . Обозначим эту подпоследовательность как $\{\hat{\zeta}_{p_n}\}_{n=1}^\infty$, а ее предел как $\hat{\zeta}$. Отсюда

$$|\hat{\zeta}_{p_n}(\theta) - \hat{\zeta}(\theta)| \leq \sup_{\tau \in [a; b]} |\hat{\zeta}_{p_n}(\tau) - \hat{\zeta}(\tau)| = \|\hat{\zeta}_{p_n} - \hat{\zeta}\|_Z \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Однако, учитывая монотонность последовательности $\{\hat{\zeta}_n(\theta)\}_{n=1}^\infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\zeta}_n(\theta) = \hat{\zeta}(\theta). \quad (33)$$

Теперь докажем, что $\hat{\zeta}$ является допустимой точкой в экстремальной задаче (30). По построению $\hat{\zeta} \in M$. Проверим, что $Q_m A_0 \hat{\zeta} \in \mathcal{O}_0$: для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$Q_m A_0 \hat{\zeta} = Q_m A_0 (\hat{\zeta} - \hat{\zeta}_{p_n}) + Q_m A_0 \hat{\zeta}_{p_n}, \quad (34)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_m A_0 (\hat{\zeta} - \hat{\zeta}_{p_n}) = Q_m A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\zeta} - \hat{\zeta}_{p_n}) = Q_m A_0 (0) = 0. \quad (35)$$

По определению $\hat{\zeta}_{p_n}$ получим $Q_m A_0 \hat{\zeta}_{p_n} \in \mathcal{O}_{p_n} = \mathcal{O}_0 + \mathcal{O}'_{p_n}$, т.е. $\exists w_n \in \mathcal{O}_0, w'_n \in \mathcal{O}'_{p_n}: Q_m A_0 \hat{\zeta}_{p_n} = w_n + w'_n$. Из (34), (35) и условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_j^{p_n} = 0$ следует, что

$$w_n = Q_m A_0 \hat{\zeta} - Q_m A_0 (\hat{\zeta} - \hat{\zeta}_{p_n}) - w'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q_m A_0 \hat{\zeta}.$$

Так как $\mathcal{O}_0$ замкнуто и $w_n \in \mathcal{O}_0$, то $Q_m A_0 \hat{\zeta} \in \mathcal{O}_0$. Мы получили, что $\hat{\zeta}$ является допустимой точкой в экстремальной задаче (30). Из этого следует, что

$$\hat{\zeta}(\theta) \leq \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_0}} z(\theta) = \hat{z}(\theta). \quad (36)$$

Из (32) и (33) получим $\hat{z}(\theta) \leq \hat{\zeta}_n(\theta)$ и $\hat{z}(\theta) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\zeta}_n(\theta) = \hat{\zeta}(\theta)$. Объединяя эти неравенства с неравенством (36), получим $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\zeta}_n(\theta) = \hat{\zeta}(\theta) = \hat{z}(\theta)$. Из (32) имеем $\hat{z}(\theta) \leq \hat{z}_n(\theta) \leq \hat{\zeta}_n(\theta)$. Левая и правая части сходятся при $n \rightarrow \infty$ к значению $\hat{z}(\theta)$, следовательно, предел последовательности $\{\hat{z}_n(\theta)\}_{n=1}^\infty$ существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{z}_n(\theta) = \hat{z}(\theta)$. Теорема доказана.

Теперь конкретизируем, какие характеристики оператора $A - A'$ известны в задаче. Всю информацию о разности $A - A'$ будем включать в окрестность погрешности $\mathcal{O}$. Оператор $B = Q_m A_0 L_n$ представим $m \times n$ -матрицей. Будем считать, что эта матрица и окрестность погрешности $\mathcal{O}$ заданы точно.

4. Конечномерная задача оптимального восстановления. Множество M в задаче (12) имеет смысл множества, в котором лежит точное решение уравнения (1). Множество $M_n = P_n(M)$ является конечномерным аналогом множества M . Вместо (1) можно рассмотреть задачу решения уравнения для оператора $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, имеющую вид

$$Bx = \bar{y}, \quad x \in M_n.$$

Множество $\mathcal{O}$ в этом случае будет задавать погрешность задания правой части этого уравнения. Ограничимся исследованием случая, когда M_n — непустой замкнутый ограниченный выпуклый уравновешенный многогранник и задается полупространствами, пересечением которых он является.

Зададим выпуклый уравновешенный многогранник $M_n: M_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -c_\sigma \leq \langle a_\sigma, x \rangle \leq c_\sigma \ \forall \sigma \in \Sigma_0\}$, где Σ_0 — конечное множество индексов (номеров), и $c_\sigma \geq 0, a_\sigma \in \mathbb{R}^n, a_\sigma \neq 0 \ \forall \sigma \in \Sigma_0$. Пусть при этом M_n ограничен. В этом разделе исследуем задачу (16) — задачу оптимального восстановления функционала

на конечномерном пространстве. Будем искать погрешность и методы оптимального восстановления этой задачи. Теорема 2 обосновывает следующий алгоритм поиска:

- 1) находим $(\hat{x}, 0)$ — решение ассоциированной задачи (т.е. задачи (17));
- 2) ищем множитель Лагранжа $\hat{\lambda}$, при котором функция Лагранжа достигает минимума на $(\hat{x}, 0)$;
- 3) ответ в задаче будет такой: $\hat{\lambda}$ — метод оптимального восстановления, $\langle e_q, \hat{x} \rangle$ — его погрешность.

Функцию Лагранжа для задачи (16) можно рассматривать как линейный функционал $(-e_q, \hat{\lambda})$ в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$: $\mathcal{L}((x, y), \lambda) = \langle -e_q, x \rangle + \langle \lambda, y \rangle =: \langle (-e_q, \lambda), (x, y) \rangle$. Задача минимизации функции Лагранжа выглядит следующим образом:

$$\langle -e_q, \hat{x} \rangle = \inf_{\substack{x \in M_n, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Bx \in \mathcal{O}}} \langle (-e_q, \hat{\lambda}), (x, y) \rangle. \quad (37)$$

Положим $\mathcal{O} = \{w \in \mathbb{R}^m \mid |w_l| \leq \varepsilon_l \ \forall l \in \{1; \dots; m\}\}$, где $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^m$ — набор неотрицательных чисел. Выпишем условия задания множества пар $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, по которому ищется минимум в (37):

$$-c_\sigma \leq \langle a_\sigma, x \rangle \leq c_\sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma_0, \quad -\varepsilon_j \leq y_j - (Bx)_j \leq \varepsilon_j \quad \forall j \in \{1; \dots; m\}. \quad (38)$$

Эти условия являются линейными относительно вектора (x, y) неравенствами, т.е. они задают полупространства в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Пересечением этих полупространств является непустое замкнутое ограниченное выпуклое уравновешенное множество, являющееся многогранником в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Заметим, что этот многогранник ограничен, потому что ограничен многогранник M_n . Перепишем условия (38) в следующем виде:

$$\langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq \bar{c}_\sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad (39)$$

где Σ — новое множество индексов, и для любого $\sigma \in \Sigma$ $\bar{a}_\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\bar{b}_\sigma \in \mathbb{R}^m$, $(\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma) \neq 0$, $\bar{c}_\sigma \geq 0$.

1) Ассоциированная задача (17) имеет вид

$$\langle e_q, x \rangle \rightarrow \max_{(x, y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq \bar{c}_\sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad y = 0.$$

Очевидно, что эта задача сводится к следующей задаче максимизации линейного функционала в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ на непустом замкнутом ограниченном выпуклом уравновешенном многограннике:

$$\langle e_q, x \rangle \rightarrow \max_x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \bar{a}_\sigma, x \rangle \leq \bar{c}_\sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (40)$$

Для решения этой задачи можно применить симплекс-метод [8]. Существует несколько модификаций этого метода. В нашей задаче понадобится модификация, возвращающая в качестве ответа номера всех гиперплоскостей, которые задаются уравнениями $\langle \bar{a}_\sigma, x \rangle = \bar{c}_\sigma$ и которым принадлежит найденная симплекс-методом экстремаль $\hat{x}$ задачи (40). А именно, пусть симплекс-метод возвращает такое подмножество индексов $I \subset \Sigma$:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in \Sigma \mid \langle \bar{a}_\sigma, \hat{x} \rangle = \bar{c}_\sigma\}. \quad (41)$$

2) После простых преобразований задача минимизации функции Лагранжа (37) примет вид следующей задачи максимизации: $0 = \sup_{\substack{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m: \\ \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq \bar{c}_\sigma \ \forall \sigma \in \Sigma}} \left(\langle (e_q, -\hat{\lambda}), (x, y) \rangle - \langle e_q, \hat{x} \rangle \right)$, что эквивалентно выполнению неравенства

$$\langle (e_q, -\hat{\lambda}), (x, y) - (\hat{x}, 0) \rangle \leq 0, \quad (42)$$

$$\text{при любой } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m: \quad \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq \bar{c}_\sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (43)$$

Мы получили, что задача минимизации функции Лагранжа приобрела вид задачи решения вариационного неравенства. Отличие состоит в том, что экстремаль задачи известна (это элемент $(x, y) = (\hat{x}, 0)$), а найти требуется функционал $\langle e_q, -\hat{\lambda} \rangle$, для которого выполнено неравенство (42) на множестве, заданном условием (43). Для нахождения множителя Лагранжа $\hat{\lambda}$ нам понадобится доказать несколько утверждений.

Предложение 2. Для $\forall \sigma \in \Sigma$ введем гиперплоскость $\pi_\sigma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle = \bar{c}_\sigma\}$. Для $\forall \sigma \in \Sigma$ имеет место эквивалентность условий: $(\hat{x}, 0) \in \pi_\sigma \Leftrightarrow \sigma \in I$.

Доказательство. Зафиксируем любой индекс $\sigma \in \Sigma$. Имеем цепочку равносильных условий:

$$(\hat{x}, 0) \in \pi_\sigma \Leftrightarrow \bar{c}_\sigma = \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (\hat{x}, 0) \rangle = \langle \bar{a}_\sigma, \hat{x} \rangle \Leftrightarrow \sigma \in I.$$

Доказательство завершено.

Введем следующие множества: $H_\Sigma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq \bar{c}_\sigma \forall \sigma \in \Sigma\}$ — многогранник в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и $H_I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq \bar{c}_\sigma \forall \sigma \in I\}$ — конус в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ с вершиной $(\hat{x}, 0)$.

Предложение 3. Чтобы неравенство (42) было выполнено для всех точек из H_I , необходимо и достаточно, чтобы оно было выполнено для всех точек из H_Σ .

Доказательство. Так как $I \subset \Sigma$, то $H_\Sigma \subset H_I$, а отсюда следует необходимость. Докажем достаточность. Пусть неравенство (42) выполнено $\forall (x, y) \in H_\Sigma$. Рассмотрим любую $(x, y) \in H_I$ и докажем для этой точки справедливость неравенства (42). Запишем эквивалентное определение множества I (предложение 2): $I = \{\sigma \in \Sigma \mid \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (\hat{x}, 0) \rangle = \bar{c}_\sigma\}$. Из этого равенства и из того, что $(\hat{x}, 0) \in H_\Sigma$, следует, что

$$\begin{aligned} \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (\hat{x}, 0) \rangle &= \bar{c}_\sigma \quad \forall \sigma \in I, \\ \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (\hat{x}, 0) \rangle &< \bar{c}_\sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma \setminus I. \end{aligned}$$

Эти условия дают следующее равенство: $\Sigma \setminus I = \{\sigma \in \Sigma \mid \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (\hat{x}, 0) \rangle < \bar{c}_\sigma\}$. Определим множество $I' \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in \Sigma \mid \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle > \bar{c}_\sigma\}$. Поскольку $(x, y) \in H_I$, то $\langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq \bar{c}_\sigma \forall \sigma \in I$. Из этого и определения множества I' следует, что $I \cap I' = \emptyset$ или, что то же самое, $I' \subset \Sigma \setminus I$. Это значит, что если $\langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle > \bar{c}_\sigma$, то $\langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (\hat{x}, 0) \rangle < \bar{c}_\sigma$. Получаем, что имеют место лишь следующие два случая:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sigma \in I' &\Rightarrow \begin{cases} \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (\hat{x}, 0) \rangle < \bar{c}_\sigma, \\ \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle > \bar{c}_\sigma, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists t_\sigma \in (0; 1) : \forall t \in (0; t_\sigma] \text{ выполнено} \\ \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), t(x, y) + (1-t)(\hat{x}, 0) \rangle \leq \bar{c}_\sigma. \end{cases} \\ \text{б) } \sigma \in \Sigma \setminus I' &\Rightarrow \begin{cases} \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (\hat{x}, 0) \rangle \leq \bar{c}_\sigma, \\ \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq \bar{c}_\sigma, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall t \in (0; 1] \text{ выполнено} \\ \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), t(x, y) + (1-t)(\hat{x}, 0) \rangle \leq \bar{c}_\sigma. \end{cases} \end{aligned}$$

Для случая $\sigma \in \Sigma \setminus I'$ обозначим $t_\sigma := 1$; тогда получим

$$\forall \sigma \in \Sigma \quad \exists t_\sigma \in (0; 1] : \forall t \in (0; t_\sigma] \quad \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), t(x, y) + (1-t)(\hat{x}, 0) \rangle \leq \bar{c}_\sigma. \quad (44)$$

Рассмотрим линейную функцию $\psi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} t \langle (e_q, -\hat{\lambda}), (x, y) - (\hat{x}, 0) \rangle = \langle (e_q, -\hat{\lambda}), (t(x, y) + (1-t)(\hat{x}, 0)) - (\hat{x}, 0) \rangle.$$

Если положить $\bar{t} := \min_{\sigma \in \Sigma} t_\sigma \in (0; 1]$ и $z_{\bar{t}} := t(x, y) + (1-t)(\hat{x}, 0)$, то условие (44) дает включение $z_{\bar{t}} \in H_\Sigma$, из которого по условию доказываемого утверждения следует неравенство (42) для элемента $z_{\bar{t}}$: $\psi(\bar{t}) = \langle (e_q, -\hat{\lambda}), z_{\bar{t}} - (\hat{x}, 0) \rangle \leq 0$. Допустим, что (42) не выполнено, т.е. $\psi(1) > 0$. Тогда в силу линейности ψ имеем $\psi(t) > 0 \forall t \in (0; 1]$. Это противоречит неравенству $\psi(\bar{t}) \leq 0$. Предложение доказано.

Учитывая предложение 3, в задаче (42), (43) можно заменить множество Σ на множество I . Учтем, что $\bar{c}_\sigma = \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (\hat{x}, 0) \rangle \forall \sigma \in I$, тогда предложение 3 доказывает эквивалентность задачи поиска вектора $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющего условию (42), (43), следующей задаче:

$$\langle (e_q, -\hat{\lambda}), (x, y) - (\hat{x}, 0) \rangle \leq 0,$$

$$\text{при } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) - (\hat{x}, 0) \rangle \leq 0 \quad \forall \sigma \in I,$$

а эта задача эквивалентна такой:

$$\langle (e_q, -\hat{\lambda}), (x, y) \rangle \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq 0 \quad \forall \sigma \in I.$$

Определим конус в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$: $K \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq 0 \forall \sigma \in I\}$. Его сопряженный определим так: $K' \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \langle f, (x, y) \rangle \leq 0 \quad \forall (x, y) \in K\}$. В итоге для $\hat{\lambda}$ получаем следующую задачу: найти все $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, такие, что $(e_q, -\hat{\lambda}) \in K'$. Теорема 2 утверждает, что такое $\hat{\lambda}$ существует.

Предложение 4 [9]. Для конечномерных пространств со стандартным скалярным произведением множество K' является множеством всех неотрицательных линейных комбинаций векторов $(\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ с индексами $\sigma \in I$, т.е. $K' = \left\{ (\bar{f}, \bar{\bar{f}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \forall \sigma \in I \quad \exists \alpha_\sigma \in [0; \infty) : (\bar{f}, \bar{\bar{f}}) = \sum_{\sigma \in I} \alpha_\sigma (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma) \right\}$. Из этого предложения вытекает, что $\hat{\lambda}$ следует искать из условия $(e_q, -\hat{\lambda}) = \sum_{\sigma \in I} \alpha_\sigma (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma)$, где $\alpha_\sigma \geq 0 \quad \forall \sigma \in I$. Для такого поиска достаточно найти набор неотрицательных коэффициентов $\{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in I}$, являющихся решением уравнений

$$\sum_{\sigma \in I} \alpha_\sigma (\bar{a}_\sigma)_i = (e_q)_i = \delta_{qi} \quad \forall i \in \{1; \dots; n\}. \quad (45)$$

В итоге получили систему линейных алгебраических уравнений. Теорема 2 утверждает, что решение $\{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in I}$ этой системы существует и среди всех решений есть такое, что $\alpha_\sigma \geq 0 \quad \forall \sigma \in I$.

3) Сформулируем алгоритм поиска метода и погрешности оптимального восстановления задачи (16). Пусть в задаче (37) минимизации функции Лагранжа множество, по которому ищется минимум, задается системой неравенств (39): $\langle (\bar{a}_\sigma, \bar{b}_\sigma), (x, y) \rangle \leq \bar{c}_\sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma$. Симплекс-методом решается задача (40): $\langle e_q, x \rangle \rightarrow \max, x \in \mathbb{R}^n, \langle \bar{a}_\sigma, x \rangle \leq \bar{c}_\sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma$. В результате своей работы симплекс-метод возвращает подмножество $I \subset \Sigma$. Оно удовлетворяет условию (41): $I = \{\sigma \in \Sigma \mid \langle \bar{a}_\sigma, \hat{x} \rangle = \bar{c}_\sigma\}$; решение $\hat{x}$ задачи (40) принадлежит множеству $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \bar{a}_\sigma, x \rangle = \bar{c}_\sigma \quad \forall \sigma \in I\}$. Далее рассматривается система уравнений (45). Из теоремы 2 следует, что решение в неотрицательных числах существует. Пусть $\{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in I}$ — любое такое решение системы (45). Тогда

$$\hat{\lambda} = - \sum_{\sigma \in I} \alpha_\sigma \bar{b}_\sigma \quad (46)$$

является методом оптимального восстановления, а его погрешностью будет $\hat{x}_q$. В качестве $\hat{x}$ берется любое решение системы уравнений $\langle \bar{a}_\sigma, x \rangle = \bar{c}_\sigma \quad \forall \sigma \in I, x \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 5. Элемент $\hat{x}$ может быть не единственным решением ассоциированной задачи, но значение $\hat{x}_q$, очевидно, не зависит от того, какое именно решение $\hat{x}$ выбрано. Метод оптимального восстановления тоже может быть не единственным. Это зависит от того, каково множество решений системы (45).

Замечание 6. Введем множество $\Sigma_B \subset \Sigma$, состоящее из всех индексов, нумерующих вторую часть условий в (38): $-\varepsilon_j \leq y_j - (Bx)_j \leq \varepsilon_j \quad \forall j \in \{1; \dots; m\}$. В условиях (39) они записаны в виде

$$\left\langle \pm \left(- \sum_{k=1}^n B_{jk} e_k, g_j \right), (x, y) \right\rangle \leq \varepsilon_j.$$

Отсюда следует, что для $\forall \sigma \in \Sigma_B$ вектор $\bar{b}_\sigma$ может принимать значения только из множества $\{-g_1, \dots, -g_m, g_1, \dots, g_m\}$. Если $\varepsilon_j \neq 0 \quad \forall j \in \{1; \dots; m\}$, то справедливо утверждение: если для $\sigma_0 \in \Sigma_B \cap I$ верно $\bar{b}_{\sigma_0} = g_j$, то при любом $\sigma \in \Sigma_B \cap I \setminus \{\sigma_0\}$ верно $\bar{b}_\sigma \neq -g_j$ и $\bar{b}_\sigma \neq g_j$ (то же самое имеет место, если в утверждении всюду заменить g_j на $-g_j$). Для $\forall \sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_B$ из (38) получаем, что $\bar{b}_\sigma = 0$. Отсюда получим $\hat{\lambda}_j = - \sum_{\sigma \in I \cap \Sigma_B} \alpha_\sigma (\bar{b}_\sigma)_j$. В итоге приходим к заключению, что числа $\{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in I \cap \Sigma_B}$ определяют модуль координат вектора $\hat{\lambda}$, а сам индекс $\sigma \in I \cap \Sigma_B$ определяет знак этих координат. Для евклидовой нормы вектора $\hat{\lambda}$ получим $\|\hat{\lambda}\|^2 = \sum_{\sigma \in I \cap \Sigma_B} \alpha_\sigma^2$.

Замечание 7. Описанный алгоритм решения задачи оптимального восстановления существенно не изменится, если в качестве $\mathcal{O}$ взять любой замкнутый ограниченный выпуклый уравновешенный многогранник, задаваемый уравнениями полупространств, пересечением которых он является.

5. Заключение. Неравенства $\tilde{z}_n(\theta) \leq \tilde{z}_{n+1}(\theta) \leq \hat{z}(\theta) \leq \hat{z}_n(\theta)$ и соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{z}_n(\theta) = \hat{z}(\theta)$ являются основным результатом теорем 4 и 5. Пользуясь ими, можно оценивать сверху и снизу погрешность оптимального восстановления для бесконечномерной задачи, если мы умеем решать лишь конечномерные задачи оптимального восстановления. Пусть окрестность погрешности $\mathcal{O}_0$ является прямоугольным параллелепипедом: $\mathcal{O}_0 = \{w \in \mathbb{R}^m \mid |w_l| \leq \Delta_l^0 \quad \forall l \in \{1; \dots; m\}\}$, тогда $\mathcal{O}_n$ также будет прямоугольным параллелепипедом. На практике имеет смысл сначала выбрать сетку $\{t_i\}_{i=1}^n$ на отрезке $[a; b]$ и найти оценки Δ_j^n из (26) так, чтобы выполнялось условие

$$\Delta_j^n \leq \Delta_j^0 \quad \forall j \in \{1; \dots; m\}. \quad (47)$$

Это будет означать, что окрестности $\mathcal{O}_0$ и $\mathcal{O}_n$ отличаются незначительно. Затем, пользуясь алгоритмом решения конечномерной задачи оптимального восстановления, описанным в разделе 4, надо найти погрешность и метод оптимального восстановления задачи (16) при $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$. Обозначим эту погрешность через E_n , а метод через φ_n . Их следует принять в качестве приближения для искомых погрешности и метода оптимального восстановления. Теоремы 2 и 4 (равенства (23) с заменой $\mathcal{O}$ на $\mathcal{O}_n$) дают $E_n = \hat{z}_n(\theta)$ ($\hat{z}_n$ определено в условии теоремы 5). Из теоремы 3 получим

$$E_n = \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^m} \sup_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}_n}} |z(\theta) - \langle \varphi, y \rangle| = \sup_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}_n}} |z(\theta) - \langle \varphi_n, y \rangle|.$$

Погрешность оптимального восстановления в бесконечномерной задаче (12) при $A' = A_0$ и $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$ обозначим через E , а метод оптимального восстановления через $\hat{\varphi}$. Теорема 2 дает $E = \hat{z}(\theta)$ ($\hat{z}$ определено в условии теоремы 5). Из сказанного получим

$$E = \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^m} \sup_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_0}} |z(\theta) - \langle \varphi, y \rangle| = \sup_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_0}} |z(\theta) - \langle \hat{\varphi}, y \rangle|.$$

По определению φ_n является методом восстановления в бесконечномерной задаче (12) при $A' = A_0$ и $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$. Его погрешность в этой задаче обозначим $\bar{E}_n$ ($\bar{E}_n \geq E$, поскольку E — “оптимальная” погрешность). Пользуясь вложением

$$\{(z, y) \in M \times \mathbb{R}^m \mid y - Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_0\} \subset \{(z, y) \in M \times \mathbb{R}^m \mid y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}_n\}$$

(его легко доказать), для $\bar{E}_n$ получим оценку

$$\bar{E}_n := \sup_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_0}} |z(\theta) - \langle \varphi_n, y \rangle| \leq \sup_{\substack{z \in M, \\ y \in \mathbb{R}^m: y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}_n}} |z(\theta) - \langle \varphi_n, y \rangle| = E_n.$$

Используя это неравенство, получим $\hat{z}(\theta) = E \leq \bar{E}_n \leq E_n = \hat{z}_n(\theta)$. В силу теоремы 5 и условия (47) разность $\hat{z}_n(\theta) - \hat{z}(\theta)$ будет мала. В результате мы получили, что найденный метод восстановления φ_n в задаче (12) имеет погрешность, не сильно отличающуюся от погрешности оптимального метода $\hat{\varphi}$, т.е. метод φ_n “почти оптимальный”. Более того, разность погрешностей этих двух методов можно сделать сколь угодно малой: из условий $\hat{z}(\theta) = E \leq \bar{E}_n \leq \hat{z}_n(\theta)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{z}_n(\theta) - \hat{z}(\theta)) = 0$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{E}_n - E) = 0$.

Замечание 8. Условие (47) является правилом, связывающим следующие данные задачи: $\mathcal{O}_0$, M , $Q_m A_0$, $L_n P_n$ (см. определение $\Delta_j^{(n,0)}$ и (26)). Среди этих данных мы можем менять лишь $L_n P_n$. Таким образом, условие (47) накладывает ограничения на количество узлов сетки и на их размещение на отрезке $[a; b]$. Когда правая часть уравнения (1) измеряется в эксперименте, то возможно варьирование параметра m и оператора Q_m . Пусть m — количество измерений в эксперименте. В этом случае условие (47) можно использовать для того, чтобы найти оптимальное количество измерений.

Из литературы по рассмотренным вопросам можно также отметить работы [10, 12–14, 17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Magaril-Il'yayev G.G., Osipenko K.Yu., Tikhomirov V.M. Optimal recovery and extremum theory // Comput. Methods and Function Theory. 2002. **2**, N 1. 87–112.
2. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
3. Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Матем. заметки. 1991. **50**, вып. 6. 85–93.
4. Nikolaeva N.N., Titarenko V.N., Yagola A.G. An error estimation for a solution of Abel equation // Numer. Funct. Anal. Optimization. 2004. **25**, N 1. 1–13.
5. Николаева Н.Н., Рычагов М.Н., Титаренко В.Н., Ягола А.Г. Оценка погрешности реконструкции симметричных профилей скорости в многоплоскостных измерительных модулях // ЖВМ и МФ. 2004. **44**, № 1. 23–34.
6. Николаева Н.Н., Ручкин С.В., Рычагов М.Н., Ягола А.Г. Численное моделирование задачи реконструкции аксиальных осесимметричных профилей скорости // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 1. 13–20.
7. Titarenko V.N., Yagola A.G. The problems of linear and quadratic programming for ill-posed problems on some compact sets // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. **11**, N 3. 311–328.

8. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
9. *Рокафеллар Р.Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
10. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 1965.
11. *Арестов В.В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Труды МИАН СССР. **189**. М.: Наука, 1989. 3–20.
12. *Трауб Дж., Вожьянковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
13. *Sukharev A.G.* On the existence of optimal affine methods for approximating linear functionals // J. Complexity. 1986. **2**. 317–322.
14. *Melkman A.A., Micchelli C.A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal. 1979. **16**, N 1. 87–105.
15. *Scharlach R.* Optimal recovery by linear functionals // J. Approxim. Theory. 1985. **44**, N 2. 167–172.
16. *Магарил-Ильяев Г.Г., Чан Тхи Ле.* К задаче оптимального восстановления функционалов // УМН. 1987. **42**, № 2. 237–238.
17. *Дорофеев К.Ю., Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* Алгоритмы построения апостериорных погрешностей решения для некорректных задач // ЖВМ и МФ. 2003. **43**, № 1. 12–25.
18. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
19. *Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Конечно-разностная аппроксимация линейных некорректных задач // ЖВМ и МФ. 1974. **14**, № 1. 15–24.

Поступила в редакцию
15.10.2006
