УДК 519.6

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

И. В. Колос[1], М. В. Колос[2]

Рассмотрена задача восстановления сигналов в системах с операторными коэффициентами при наличии цветных (небелых) шумов в измерениях. Задача линейной фильтрации в этом случае, вообще говоря, некорректно поставлена. Предложен метод нахождения приближенного решения задачи, основанный на идее регуляризации А. Н. Тихонова и сведении задачи линейной фильтрации в системах с операторными коэффициентами к задаче линейной фильтрации в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Доказана сходимость алгоритма решения задачи. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04–01–00026).

Ключевые слова: линейная фильтрация, восстановление сигналов, цветной шум, белый шум, некорректно поставленные задачи, обыкновенные дифференциальные уравнения, сходимость.

Пусть H_u и H_r — сепарабельные вещественные гильбертовы пространства; $[0,t]$ — сегмент, $t<\infty$; $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ и $L_2\big(H_r;[0,t]\big)$ — пространства измеримых по Лебегу функций $f(\tau)$ при $\tau\in[0,t]$, отображающих сегмент $[0,t]$ соответственно в пространства H_u и H_r со скалярным произведением $(f,g)_{0H_i} = \int\limits_0^t (f,g)_{H_i}\,d\tau$ и нормой $\|\,f\,\|_{0H_i} = \left(\int\limits_0^t \|\,f\,\|^2_{H_i}\,d\tau\right)^{1/2}$, где индекс $i\in\{u,r\}$ указывает на пространство, в котором вычисляется скалярное произведение (или норма). Через $\mathcal{F}(X,Y)$ будем обозначать банахово пространство всех линейных операторов, непрерывно отображающих гильбертово пространство X в гильбертово пространство Y. Пополнение множества дважды дифференцируемых на $[0,t]$ функций $u(\tau)$, отображающих $[0,t]$ в H_u, для которых $u(t)=0$, $\left.\dfrac{du}{d\tau}\right|_{\tau=t}=0$ по норме

$$\|\,u\,\|_{1u} = \left[\int\limits_0^t \left(\|\,u\,\|^2_{H_u} + \left\|\frac{du}{d\tau}\right\|^2_{H_u}\right)d\tau\right]^{1/2}, \tag{1}$$

обозначим через $W^1_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ с нормой $\|\,.\,\|_{1tu}$. Пусть $W^{-1}_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ — пополнение $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ по негативной норме $\|\,v\,\|_{-1tu} = \sup\limits_u \dfrac{\big|(v,u)_{0H_u}\big|}{\|\,u\,\|_{1tu}}$, $u\in W^1_{2tu}\big(H_u;[0,t]\big)$, $u\neq 0$; $\langle u,v\rangle_u$ — билинейная форма, определенная для элементов $u\in W^1_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ и $v\in W^{-1}_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ и совпадающая со скалярным произведением в $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$, если v принадлежит $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ [1–4]; $(\Omega,\mathcal{G},p)$ — вероятностное пространство, в котором рассматриваются все случайные процессы.

Постановка задачи. Пусть H_u-значный полезный сигнал $u(\tau)=u(\tau,\omega)$ описывается уравнением

$$\begin{gathered}\mathcal{L}u \equiv \frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2} + \mathcal{B}u(\tau) = v(\tau),\\ u(0)=u_0,\quad \left.\frac{du(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = u_1,\end{gathered} \tag{2}$$

где $u_0=u_0(\omega)$, $u_1=u_1(\omega)$ — случайные процессы, реализации которых с вероятностью 1 принадлежат $L_2(H_u)$, $M[u_0]=M[u_1]=0$, $M[u_0,u_0]=\mathcal{U}_0$, $M[u_1,u_1]=\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0$ и $\mathcal{U}_1$ суть корреляционные операторы

[1] Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, д. 58, 109180, Москва; e-mail: kolos_v@mail.ru

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

процессов u_0 и $u_1, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1 \in \mathcal{F}\big(L_2(H_u), L_2(H_u)\big)$; $v(\tau) = v(\tau,\omega)$ — случайный процесс типа белого шума, реализации которого почти наверное принадлежат негативному пространству $W_{2t}^{-1}\big(H_u;[0,t]\big)$ с нулевым средним $M\big[v(\tau)\big] = 0$ и корреляцией $M\big[v(\tau), v(\sigma)\big] = \mathcal{V}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $\mathcal{V}(\tau) \in \mathcal{F}\Big(W_{2t}^{1}\big(H_u;[0,t]\big), W_{2t}^{-1}\big(H_u;[0,t]\big)\Big)$; $\delta(\tau-\sigma)$ — δ-функция Дирака, $\delta(\tau-\sigma) \in W_{2t}^{-1}\big([0,t]\big)$; $\mathcal{B}$ — замкнутый линейный оператор в H_u со всюду плотной областью определения $D(\mathcal{B})$, симметричный $(\mathcal{B}u, v)_{0H_u} = (u, \mathcal{B}v)_{0H_u}$ для $\forall u,\, v \in D(\mathcal{B})$, положительно определенный $(\mathcal{B}u, u)_{0H_u} \geqslant c\|\,u\,\|^2_{0H_u}$ и такой, что справедливы неравенства: $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu} \geqslant c\|\,u\,\|_{0H_u}$, $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu} \leqslant c\|\,u\,\|_{10u}$, где $\|\,.\,\|_{10u}$ — норма в пространстве $W_{20}^{1}\big(H_u;[0,t]\big)$, полученном пополнением по норме (1) множества дважды дифференцируемых на $[0,t]$ функций $u(\tau)$, отображающих $[0,t]$ в H_u и для которых выполняются условия $u(0) = 0$, $\left.\dfrac{du(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0$.

Наблюдается процесс $\big\{r(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\big\}$, связанный с $u(\tau)$ соотношением

$$r(\tau) = \mathcal{S}u(\tau) + w(\tau), \tag{3}$$

где $w(\tau) = w(\tau,\omega)$ — гауссовский вырожденный шум с нулевым средним $M\big[w(\tau)\big] = 0$ и корреляцией $M\big[w(\tau), w(\sigma)\big] = \mathcal{W}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $\mathcal{W}(\tau) \in \mathcal{F}\Big(W_{2t}^{1}\big(H_r;[0,t]\big), W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)\Big)$, $\mathcal{W}(\tau)$ — вырожденный оператор; реализации $w(\tau)$ почти наверное принадлежат негативному пространству $W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$.

Требуется найти последовательность оценок $\big\{\widehat{u}_\alpha(t)\big\}_{\alpha>0}$ из пространства состояний H_u, такую, что

$$\lim_{\alpha\to 0} M\big[(z, \mathcal{A}_\alpha r - u)^2_{H_u}\big] = \inf_{\mathcal{A}} M\big[(z, \mathcal{A}r - u)^2_{H_u}\big] = m(z), \quad \mathcal{A}_\alpha r = \widehat{u}_\alpha(t), \tag{4}$$

где $\mathcal{A}_\alpha$ — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства наблюдений $W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$ в пространство состояний H_u; z — произвольный элемент из H_u; нижняя грань берется по всем линейным непрерывным операторам $\mathcal{A}$, действующим из $W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$ в H_u.

Решение задачи фильтрации (2) – (4) эквивалентно решению операторного уравнения Винера–Хопфа

$$\mathcal{A}_0\mathcal{R}_r = \mathcal{R}_{ur}, \tag{5}$$

где $\mathcal{A}_0$ — линейный оператор, удовлетворяющий критерию (4); $\mathcal{R}_r$ — корреляционный оператор случайного процесса $r(\tau)$; $\mathcal{R}_r \in \mathcal{F}\Big(W_{2t}^{1}\big(H_r;[0,t]\big), W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)\Big)$; $\mathcal{R}_{ur}$ — взаимнокорреляционный оператор случайных процессов $u(\tau)$ и $r(\tau)$, $\mathcal{R}_{ur} \in \mathcal{F}\Big(W_{2t}^{1}\big(H_r;[0,t]\big), H_u\Big)$.

Уравнение (5) является уравнением первого рода, задача решения которого некорректна (неустойчива) [1, 2].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Последовательность операторов* $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$, $\mathcal{A}_\alpha \in \mathcal{F}\Big(W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big), H_u\Big)$, *удовлетворяющая критерию* (4), *находится из операторного уравнения*

$$\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_r + \alpha\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{R}_{ur}, \tag{6}$$

где α *— параметр регуляризации,* $\alpha > 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующих теорем из [3, 5].

Приближенное решение задачи линейной фильтрации. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$— ортонормированные базисы в гильбертовых сепарабельных пространствах H_u и H_r.

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде $u_n(\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(\tau)e_i$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $x_i(\tau)$ — искомые функции.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет вектор-столбец $\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)$ с координатами $\big(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau), \ldots, x_n(\tau)\big)$, имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)}{d\tau^2} + F\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau) = \boldsymbol{v}_{(n)}(\tau),\\ \boldsymbol{x}_{(n)}(0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \left.\frac{d\,\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \boldsymbol{x}_{10}.\end{gathered} \tag{7}$$

В выражении (7) F — матрица размерности $n \times n$ с элементами $F_{ij} = (\mathcal{B}e_i, e_j)_{0H_u}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $\boldsymbol{v}_{(n)}(\tau)$ — случайный n-мерный белый гауссовский шум с нулевым средним и корреляционной матрицей $M\big[\boldsymbol{v}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}_{(n)}(\sigma)\big] = V_{(n)}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $V_{(n)}(\tau) = \Big[\big(\mathcal{V}(\tau)e_i, e_j\big)_{0H_u}\Big]_{i,j=1}^{n}$ (здесь верхний индекс т — знак транспонирования). Задача (7) является обобщенной задачей Коши [3, 5].

Наблюдения для приближенной задачи фильтрации строим следующим образом. Умножим скалярно наблюдения $r(\tau)$ на векторы $\{\rho_j\}_{j=1}^{m}$ и введем обозначения: $\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau) \equiv \Big[\big(r(\tau), \rho_j\big)_{0H_r}\Big]_{j=1}^{m}$; C — матрица размерности $m \times n$ с элементами $C_{ji} = (\mathcal{S}e_i, \rho_j)_{0H_r}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$; $\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)$ — векторный гауссовский шум, $\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau) = \Big[\big(w(\tau), \rho_j\big)_{0H_r}\Big]_{j=1}^{m}$, $M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\big] = 0$, $M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\big] = W_{(m)}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $W_{(m)}(\tau)$ — вырожденная матрица размерности $m \times m$, $W_{(m)}(\tau) = \Big[\big(\mathcal{W}(\tau)\rho_i, \rho_j\big)_{0H_r}\Big]_{i,j=1}^{m}$.

Тогда измерения для приближенной задачи будут иметь вид

$$\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau) = C\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau) + \boldsymbol{w}_{(m)}(\tau). \tag{8}$$

Требуется найти последовательность оценок $\big\{\widehat{\boldsymbol{x}}_\alpha(\tau)\big\}_{\alpha>0}$ процесса $\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)$ в момент $\tau = t$, такую, что

$$\lim_{\alpha\to 0} M\Big[\big(z, \boldsymbol{x}_{(n)}(t) - \widehat{\boldsymbol{x}}_\alpha(t)\big)^2_{E_n}\Big] = \inf_{\mathcal{H}} M\Big[\big(z, \boldsymbol{x}_{(n)}(t) - \mathcal{H}\boldsymbol{r}_{(m)}(t)\big)^2_{E_n}\Big] = m(z); \tag{9}$$

нижняя грань берется по всем линейным непрерывным операторам $\mathcal{H}$, действующим из пространства наблюдений в пространство состояний, $\mathcal{H}\boldsymbol{r}_{(m)}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau)\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\,d\tau$, $h(t,\tau)$ — матрица размерности $m \times n$ с элементами $h_{ij}(t,\tau)$, по аргументу τ принадлежащими позитивному пространству $W_2^1\big([0,t]\big)$, z — произвольный вектор из евклидова n-мерного пространства E_n.

Имеют место следующие статистики:

$$\begin{aligned}
&M[\boldsymbol{x}_0] = 0, \quad M[\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}] = P_0, \quad P_0^{ij} = (\mathcal{U}_0 e_i, e_j)_{0H_u}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;\\
&M[\boldsymbol{x}_{10}] = 0, \quad M[\boldsymbol{x}_{10}\boldsymbol{x}_{10}^{\mathrm{T}}] = P_{10}, \quad P_{10}^{ij} = (\mathcal{U}_1 e_i, e_j)_{0H_u}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;\\
&M\big[\boldsymbol{v}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\big] = 0, \quad M\big[\boldsymbol{v}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{x}_{10}^{\mathrm{T}}\big] = 0,\\
&M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\big] = 0, \quad M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{x}_{10}^{\mathrm{T}}\big] = 0, \quad M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}_{(n)}(\sigma)\big] = 0.
\end{aligned}$$

Матрица $W_{(m)}(\tau)$ может быть вырожденной. Поэтому для решения задачи фильтрации (7) – (9) необходимо использовать алгоритм, аналогичный изученному в [3, 5].

Покажем, что построенное согласно (7) – (9) приближенное решение задачи линейной оптимальной фильтрации (2) – (4) $\widehat{u}_n^\alpha(\tau, x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \widehat{x}_i^\alpha(\tau)e_i(x)$ при $n \to \infty$ сходится в соответствующей норме к точному решению.

Отметим, что при выполнении неравенств $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu} \geqslant c\|\,u\,\|_{0H_u}$ и $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu} \leqslant c\|\,u\,\|_{10u}$ существует и единственно обобщенное решение уравнения (2), а последовательность приближенных решений системы (2) при $n \to \infty$ сходится по норме пространства $L_2\big(H_u; [0,t]\big)$ при каждом фиксированном t к точному решению (2), т.е. $\|u_n - \overline{u}\,\|_{0H_u} \to 0$, $n \to \infty$, где $\overline{u}$ — точное решение уравнения (2). Доказательство этих фактов аналогично доказательствам, приведенным в [3, 5, 6, 8, 9].

Известно [3], что для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий из $W_{2t}^{-1}\big(H_r; [0,t]\big)$ в $L_2\big(H_u; [0,t]\big)$ и определяемый выражением $\mathcal{A}g \equiv \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i(\tau)e_i$, $g \in W_{2t}^{-1}\big(H_r; [0,t]\big)$, был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\tau) = \big(y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_i(\tau), \dots\big)$ имел вид: $\boldsymbol{y}(\tau) = \int\limits_0^\tau H(\tau,s)\boldsymbol{\vartheta}(s)\,ds$, где $H(\tau,s)$ — бесконечная матрица с элементами $h_{ij}(\tau,s)$, принадлежащими по аргументу s позитивному пространству $W_2^1[0,t]$, а $\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}(\tau) = \big(\vartheta_1(\tau), \vartheta_2(\tau), \dots, \vartheta_i(\tau), \dots\big)$ — вектор с координатами из $W_2^{-1}\big([0,t]\big)$. Напомним, что если оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве имеет матричное представление, то он ограничен [3, 4].

Лемма 1. *Для почти всех значений $t < \infty$ справедливо равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} M\Big[\big\|u_n(t) - u(t)\big\|^2_{0H_u}\Big] = 0$, *где* $u_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(\tau)e_i$, *а* $u(\tau)$ *— решение уравнения* (2) *в точке* $\tau = t$.

Доказательство. Используя неравенства $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu} \geqslant c\|\,u\,\|_{0H_u}$, $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu} \leqslant c\|\,u\,\|_{10u}$, легко показать [7], что для почти всех $\omega \in \Omega$ имеет место соотношение $\int\limits_0^t \big\|u_n(\tau) - u(\tau)\big\|^2_{H_u}\,d\tau \to 0$, $n \to \infty$. Отсюда $M\Big[\int\limits_0^t \big\|u_n(\tau) - u(\tau)\big\|^2_{H_u}\,d\tau\Big] \to 0$, $n \to \infty$. Лемма доказана.

Уравнение Винера–Хопфа для задачи (7) – (9) можно записать следующим образом:

$$M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\big] = \int\limits_0^t h_{mn}(t,\tau)M\big[\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\big]\,d\tau.$$

Регуляризованное уравнение имеет вид

$$M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\big] = \int\limits_0^t h^{\alpha}_{mn}(t,\tau)M\big[\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\big]\,d\tau + \alpha h^{\alpha}_{mn}(t,\sigma). \tag{10}$$

Представим корреляционную матрицу $M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\big]$ в виде бесконечной матрицы

$$K_{nm}(t,\sigma) = \begin{bmatrix} M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\big] & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Эта матрица задает над пространством $W^{-1}_{2t}\big(H_r;[0,t]\big)$ линейный непрерывный оператор, действующий из $W^{-1}_{2t}\big(H_r;[0,t]\big)$ в $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ [3, 5]. Обозначим этот оператор через $\mathcal{R}_{nm}$.

Аналогично, бесконечная матрица $K_{mm}(\tau,\sigma)$, построенная по $M\big[\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\big]$, задает линейный оператор $\mathcal{R}_{mm}$, действующий из $W^{-1}_{2t}\big(H_r;[0,t]\big)$ в $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$.

Пусть $H^{\alpha}_{mn}(t,\sigma) = \begin{bmatrix} h^{\alpha}_{mn}(t,\sigma) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$. Тогда с использованием бесконечных матриц уравнение (10) можно записать в виде $K_{nm}(t,\sigma) = \int\limits_0^t H^{\alpha}_{mn}(t,\tau)K_{mm}(\tau,\sigma)\,d\tau + \alpha H^{\alpha}_{mn}(t,\sigma)$, или в операторной форме

$$\mathcal{A}^{\alpha}_{mn}\mathcal{R}_{mm} + \alpha\mathcal{A}^{\alpha}_{mn} = \mathcal{R}_{nm}, \tag{11}$$

где $\mathcal{A}^{\alpha}_{mn}$ — искомый оператор, определяемый матрицей $H^{\alpha}_{mn}(t,\sigma)$.

Покажем, что решение уравнения (11) задает приближенное решение уравнения (6).

Лемма 2. *Справедливо соотношение* $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{nm}\| = 0$.

Доказательство. Для почти всех $t < \infty$ и элементов $\varphi \in W^{-1}_{2t}\big(H_r;[0,t]\big)$ и $\psi \in L_2\big(H_u;[0,t]\big)$, таких, что $\|\varphi\|_{-1tr} \neq 0$, $\|\psi\|_{0H_u} \neq 0$, имеем $\|\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{nm}\| = \sup\limits_{\varphi,\psi}\left\{\dfrac{\Big|\big([\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{nm}]\varphi,\psi\big)_{0H_u}\Big|}{\|\varphi\|_{-1tr}\|\psi\|_{0H_u}}\right\}$.

Числитель в правой части этого равенства представим в виде

$$\Big|\big([\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{nm}]\varphi,\psi\big)_{0H_u}\Big| = \Big|M\big[(u,\psi)_{0H_u}(r,\varphi)_{-1tr} - (u_n,\psi)_{0H_u}(\boldsymbol{r}_m,\varphi)_{-1tr}\big]\Big|.$$

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского [10], находим, что

$$\Big|\big([\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{nm}]\,\varphi,\psi\big)_{0H_u}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \bigg|\Big(M\big[\,\|u - u_n\|^2_{0H_u}\big]\,M\big[\,\|r\|^2_{-1tr}\big]\Big)^{1/2} + \Big(M\big[\,\|u_n\|^2_{0H_u}\big]\,M\big[\,\|r - \boldsymbol{r}_m\|^2_{-1tr}\big]\Big)^{1/2}\bigg|\,\|\varphi\|_{-1tr}\,\|\psi\|_{0Q}.$$

Из леммы 1 следует, что первое слагаемое в правой части при $n \to \infty$ стремится к 0. Покажем, что $M\big[\|r - \boldsymbol{r}_m\|^2_{-1tr}\big] \to 0$ при $m \to \infty$.

Рассмотрим норму $\|r - \boldsymbol{r}_{(m)}\|_{-1tr}$. Отметим, что здесь $r = \boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_m$ понимаются как бесконечные векторы. Координаты вектора $\boldsymbol{r}$ имеют вид $r_i = (r, \rho_i)_{0H_r}$, вектора $\boldsymbol{r}_{(m)}$ — $r^i_m = \begin{cases} (r,\rho_i)_{0H_r}, & i \leqslant m, \\ 0, & i > m. \end{cases}$
Кроме того, справедливо равенство $\|\boldsymbol{r} - r_{(m)}\|_{-1tr} = \|r - r_{(m)}\|_{-1tr}$, где r и $r_{(m)}$ представлены обобщенными рядами Фурье $j^*_t r = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (j^*_t r, \rho_i)_{0H_r}\,\rho_i$, $j^*_t r_{(m)} = \sum\limits_{i=1}^{m} (j^*_t r_{(m)}, \rho_i)_{0H_r}\,\rho_i$, где j^*_t — изометрический оператор, переводящий пространство $W^{-1}_{2t}\big(H_r;[0,t]\big)$ на $L_2\big(H_r;[0,t]\big)$ [3, 5]. Тогда при $m \to \infty$ имеем

$$\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{(m)}\|_{-1tr} = \bigg\| \sum_{i=m+1}^{\infty} (j^*_t r, \rho_i)_{0H_r}\,\rho_i \bigg\|_{0H_r} \leqslant \sum_{i=m+1}^{\infty} \big\|(j^*_t r, \rho_i)_{0H_r}\,\rho_i\big\|_{0H_r} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \big\|(r, \rho_i)_{0H_r}\,\rho_i\big\|_{-1tr} \to 0$$

в силу стремления к нулю остаточного члена разложения функции в ряд Фурье.

Таким образом, $M\big[\|r - r_m\|^2_{-1tG}\big] \to 0$, $m \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для почти всех $t < \infty$ и $\alpha > 0$ имеет место соотношение $\lim\limits_{m\to\infty} \|\mathcal{R}^\alpha_r - \mathcal{R}^\alpha_{mm}\| = 0$, где $\mathcal{R}^\alpha_r = \mathcal{R}_r + \alpha I \delta(\tau - \sigma)$ и $\mathcal{R}^\alpha_{mm} = \mathcal{R}_{mm} + \alpha I\delta(\tau - \sigma)$.*

Доказательство. Операторы $\mathcal{R}^\alpha_r$ и $\mathcal{R}^\alpha_{mm}$ для всех $\alpha > 0$ определены на всем $W^1_{2t}\big(H_r;[0,t]\big)$. По определению операторной нормы имеем

$$\|\mathcal{R}^\alpha_r - \mathcal{R}^\alpha_{mm}\| = \sup_g \left\{ \frac{\big|\big\langle [\mathcal{R}^\alpha_r - \mathcal{R}^\alpha_{mm}]g, g\big\rangle\big|}{\|g\|^2_{1tr}}, \quad g \in W^1_{2t}\big(H_r;[0,t]\big), \quad \|g\|_{1tr} \neq 0 \right\}.$$

Оценим числитель. После несложных преобразований находим

$$\Big|\big\langle [\mathcal{R}^\alpha_r - \mathcal{R}^\alpha_{mm}]g, g\big\rangle\Big| = \Big| M\big[\langle r_\alpha, g\rangle^2 - \langle r_{m\alpha}, g\rangle^2\big]\Big| = \Big| M\big[\langle r_\alpha - r_{m\alpha}, g\rangle \langle r_\alpha + r_{m\alpha}, g\rangle\big]\Big|, \tag{12}$$

где $r_\alpha(\tau)$ — наблюдения, связанные с $u(\tau)$ соотношением $r_\alpha(\tau) = \mathcal{S}u + w_\alpha(\tau)$, $w_\alpha(\tau)$ — белый невырожденный шум с нулевым средним и корреляционным оператором $M\big[w_\alpha(\tau), w_\alpha(\sigma)\big] = (\mathcal{W} + \alpha I)\delta(\tau - \sigma)$. Наблюдения $r_{m\alpha}(\tau)$ строятся аналогично.

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского к правой части (12), получим

$$\Big|\big\langle [\mathcal{R}^\alpha_r - \mathcal{R}^\alpha_{mm}]g, g\big\rangle\Big| \leqslant \Big(M\big[\|r_\alpha - r_{m\alpha}\|^2_{-1tr}\big] M\big[\|r_\alpha + r_{m\alpha}\|^2_{-1tr}\big]\Big)^{1/2} \|g\|^2_{1tr} \to 0, \quad m \to \infty,$$

так как поведение r_α и $r_{m\alpha}$ такое же, как у r и $r_{(m)}$ (см. доказательство леммы 2).

Теорема 2. *Для каждого фиксированного $\alpha > 0$ и почти всех $t < \infty$ выполняется равенство*

$$\lim_{n,m\to\infty} M\big[(z, \widehat{u}^\alpha_{nm} - \widehat{u}_\alpha)^2_{H_u}\big] = 0, \quad z \in H_u, \tag{13}$$

где $\widehat{u}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha r$, $\mathcal{A}_\alpha$ — решение уравнения (6), а $\widehat{u}^\alpha_{nm} = \mathcal{A}^\alpha_{mn} r$, $\mathcal{A}^\alpha_{mn}$ — решение уравнения (11).

Доказательство. Из уравнения (11) находим, что $\mathcal{A}^\alpha_{mn} = \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm} + \alpha I)^{-1}$; отсюда следует, что $\widehat{u}^\alpha_{nm}(t) = \mathcal{A}^\alpha_{mn} r = \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm} + \alpha I)^{-1} r = \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}^\alpha_{mm})^{-1} r$.

Аналогично, из уравнения (6) имеем $\widehat{u}_\alpha(t) = \mathcal{A}_\alpha r = \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r + \alpha I)^{-1} r = \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}^\alpha_r)^{-1} r$. Согласно этим соотношениям математическое ожидание имеет вид

$$\begin{aligned} M\Big[\big(z, \widehat{u}^\alpha_{nm} - \widehat{u}_\alpha(t)\big)^2_{H_u}\Big] &= M\bigg[\Big(z, \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}^\alpha_{mm})^{-1}(r_{(m)} - r) + \big\{\mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}^\alpha_{mm})^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}^\alpha_r)^{-1}\big\} r\Big)^2_{H_u}\bigg] \leqslant \\ &\leqslant 2\Bigg(M\bigg[\Big(z, \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}^\alpha_{mm})^{-1}(r_{(m)} - r)\Big)^2_{H_u}\bigg] + M\bigg[\Big(z, \big\{\mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}^\alpha_{mm})^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}^\alpha_r)^{-1}\big\} r\Big)^2_{H_u}\bigg]\Bigg). \end{aligned} \tag{14}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к первому слагаемому в правой части (14), согласно лемме 2 получим при n, $m \to \infty$, что

$$M\Big[\big(z, \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}^\alpha_{mm})^{-1}(r_{(m)} - r)\big)^2_{H_u}\Big] \leqslant \|z\|^2_{H_u} \big\|\mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}^\alpha_{mm})^{-1}\big\|^2 M\big[\,\|r_{(m)} - r\|^2_{-1tr}\big] \to 0.$$

Оценим второе слагаемое. Прибавим и вычтем $\mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}$ и после преобразований применим неравенство Коши–Буняковского. Тогда согласно леммам 2 и 3 при n, $m \to \infty$ получим

$$M\Big[\Big(z, \big\{\mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\big\} r\Big)_{H_u}^2\Big] \leqslant$$
$$\leqslant 2\Big(\|z\|_{H_u}^2 \,\|\mathcal{R}_{nm}\|^2 \,\big\|(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - (\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\big\|^2 + \big\|(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\big\|^2 \,\|\mathcal{R}_{km} - \mathcal{R}_{ur}\|^2 \,\|r\|_{-1tr}^2\Big) \to 0.$$

Подставляя эти соотношения в (14), получим утверждение теоремы.

Теорема 3. *Для почти всех* $t < \infty$ *справедливо* $\lim\limits_{\alpha\to 0} \varliminf\limits_{n,m\to\infty} M\Big[\big(z, \widehat{u}_{nm}^\alpha(t) - u(t)\big)_{H_u}^2\Big] = m(z)$, *где* $\widehat{u}_{nm}^\alpha(t)$ *— решение приближенной задачи фильтрации* (7)–(9).

Доказательство. Прибавим и вычтем $\widehat{u}_\alpha(t)$ под знаком скалярного произведения и после ряда преобразований находим, что согласно теореме 2 выполнено

$$\lim_{\alpha\to 0} \varliminf_{n,m\to\infty} M\Big[\big(z, \widehat{u}_{nm}^\alpha(t) - u(t)\big)_{H_u}^2\Big] \leqslant \lim_{\alpha\to 0}\Bigg(\varliminf_{n,m\to\infty} M\Big[\big(z, \widehat{u}_{nm}^\alpha(t) - \widehat{u}_\alpha(t)\big)_{H_u}^2\Big] +$$
$$+ 2\Big\{\varliminf_{n,m\to\infty} M\Big[\big(z, \widehat{u}_{nm}^\alpha(t) - \widehat{u}_\alpha(t)\big)_{H_u}^2\Big] M\Big[\big(z, \widehat{u}_\alpha(t) - u(t)\big)_{H_u}^2\Big]\Big\}^{1/2} + M\Big[\big(z, \widehat{u}_\alpha(t) - u(t)\big)_{H_u}^2\Big]\Bigg) = m(z).$$

Таким образом, доказана сходимость решения приближенной регуляризованной задачи линейной фильтрации к решению исходной задачи.

Приведем алгоритм решения приближенной задачи линейной оптимальной фильтрации (7)–(9), основанный на построении последовательности регуляризованных оценок, полученных с помощью фильтра Калмана–Бьюси.

Обозначим через $\chi(\tau)$ вектор с координатами $\chi_i(\tau) = \begin{cases} x_i(\tau) & \text{при } i \leqslant n, \\ dx_{i-n}(\tau)/d\tau & \text{при } k < i \leqslant 2n. \end{cases}$ Пусть $F_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ F & 0 \end{bmatrix}$, где I — единичная матрица порядка n; $\zeta(\tau)$ — вектор с координатами $\zeta_i(\tau) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\zeta_i(\tau) = (v, e_{i-n})_{0H_u}$ при $i = n+1, n+2, \ldots, 2n$, и пусть $\overline{C}$ — матрица размерности $m \times 2n$, $\overline{C} = [C\ \overline{0}]$, где $\overline{0}$ — нулевая матрица размера $m \times n$.

С учетом введенных обозначений задачу линейной оптимальной фильтрации можно сформулировать в следующем виде.

Векторный случайный процесс $\chi(\tau)$ моделируется системой

$$\frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = F_{2n}\chi(\tau) + \zeta(\tau), \quad \chi(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_{10} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где $\zeta(\tau)$ — белый вырожденный шум.

Наблюдается процесс $\big\{\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\big\}$, связанный с $\chi(\tau)$ соотношением

$$\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau) = \overline{C}\chi(\tau) + \boldsymbol{w}_{(m)}(\tau). \tag{16}$$

Требуется найти последовательность оценок $\big\{\widehat{\chi}^\alpha(\tau)\big\}_{\alpha>0}$ процесса $\chi(\tau)$ в момент $\tau = t$, удовлетворяющую критерию

$$\lim_{\alpha\to 0}\Big\{M\Big[\big(z, \chi(t) - \mathcal{H}^\alpha \boldsymbol{r}_{(m)}(t)\big)_{E_{2n}}^2\Big] - \inf_{\mathcal{H}} M\Big[\big(z, \chi(t) - \mathcal{H}\boldsymbol{r}_{(m)}(t)\big)_{E_{2n}}^2\Big]\Big\} = 0, \tag{17}$$

где нижняя грань берется по всем линейным операторам $\mathcal{H}$, действующим из пространства наблюдений в пространство состояний, $\mathcal{H}$ определяется соотношением $\mathcal{H}\boldsymbol{r}_{(m)} = \int\limits_0^t h(t,\tau)\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\,d\tau$, $\widehat{\chi}^\alpha(t) = \mathcal{H}^\alpha \boldsymbol{r}_{(m)} = \int\limits_0^t \widehat{h}^\alpha(t,\tau)\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\,d\tau$, матрица $\widehat{h}^\alpha(t,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$M\big[\chi(t)\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = \int\limits_0^t \widehat{h}^\alpha(t,\tau)\overline{C}(\tau)M\big[\chi(\tau)\chi^{\mathrm{T}}(\sigma)\overline{C}^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]\,d\tau + \widehat{h}^\alpha(t,\sigma)S_\alpha(\sigma), \tag{18}$$

а $S_\alpha(\sigma) = W_{(m)}(\sigma) + \alpha I_m$, I_m — единичная матрица порядка m; z — произвольный вектор из E_{2n}.

Имеют место следующие статистики:

$$M[\boldsymbol{x}_0] = 0, \quad M[\boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}] = P_0, \quad P_0^{ij} = (\mathcal{U}_0 e_i, e_j)_{0H_u}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$
$$M[\boldsymbol{x}_{10}] = 0, \quad M[\boldsymbol{x}_{10} \boldsymbol{x}_{10}^{\mathrm{T}}] = P_{10}, \quad P_{10}^{ij} = (\mathcal{U}_1 e_i, e_j)_{0H_u}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$
$$M\big[\zeta(\tau)\big] = 0, \quad M\Big[\zeta(\tau)\big(\zeta(\sigma)\big)^{\mathrm{T}}\Big] = Q(\tau)\delta(\tau - \sigma), \quad Q_{ij}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{(n)}(\tau) \end{bmatrix},$$
$$M\big[\chi(0)\big] = 0, \quad M\big[\chi(0)\chi^{\mathrm{T}}(0)\big] = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_{10} \end{bmatrix}, \quad M\big[\chi(0)\zeta^{\mathrm{T}}(\tau)\big] = M\big[\chi(0)\boldsymbol{w}_{(m)}^{\mathrm{T}}(\tau)\big] = M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\zeta^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = 0.$$

Запишем матрицу $\widehat{h}^{\,\alpha}(t,\tau)$ в виде $\widehat{h}^{\,\alpha}(t,\tau) = \begin{bmatrix} h_{1mn}^\alpha(t,\tau) \\ h_{2mn}^\alpha(t,\tau) \end{bmatrix}$, где $h_{1mn}^\alpha(t,\tau)$ и $h_{2mn}^\alpha(t,\tau)$ — матрицы размера $n \times m$. Тогда уравнение Винера–Хопфа (18) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}_{(m)}^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] &= \int\limits_0^t h_{1mn}^\alpha(t,\tau)C(\tau)M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{x}_{(n)}^{\mathrm{T}}(\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]\,d\tau + h_{1mn}^\alpha(t,\sigma)S_\alpha(\sigma), \\ M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}_{(m)}^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] &= \int\limits_0^t h_{2mn}^\alpha(t,\tau)C(\tau)M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{x}_{(n)}^{\mathrm{T}}(\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]\,d\tau + h_{2mn}^\alpha(t,\sigma)S_\alpha(\sigma). \end{aligned} \tag{19}$$

Интегральные уравнения в (19) независимы и первое уравнение совпадает с уравнением Винера–Хопфа (10) для задачи (7)–(9), т.е. решение h_{1mn}^α совпадает с h_{mn}^α. Следовательно, оценка состояния $\widehat{\boldsymbol{x}}_{(n)}^\alpha(t)$ системы (7)–(9) равна первым n координатам вектора $\widehat{\chi}^{\,\alpha}(t)$ — решения задачи (15)–(17), которое удовлетворяет уравнению $\dfrac{d\widehat{\chi}^{\,\alpha}(\tau)}{d\tau} = F(\tau)\widehat{\chi}^{\,\alpha}(\tau) + P(\tau)\overline{C}^{\,\mathrm{T}}(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)\big[r_m(\tau) - \overline{C}(\tau)\widehat{\chi}^{\alpha}(\tau)\big]$, $\widehat{\chi}^{\,\alpha}(0) = 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty$, где $P(\tau)$ — решение уравнения Риккати

$$\frac{dP(\tau)}{d\tau} = F(\tau)P(\tau) + P(\tau)F^{\mathrm{T}}(\tau) + Q(\tau) - P(\tau)\overline{C}^{\mathrm{T}}(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)\overline{C}(\tau)P(\tau), \quad P(0) = \begin{bmatrix} P_{10} & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}.$$

Обоснование алгоритма решения задачи (15)–(17) дано в [3, 5]. Параметр регуляризации выбирается согласно одному из методов, приведенных в [1–3, 5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
3. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
4. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
5. *Колос И.В., Колос М.В.* Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. *Колос И.В., Колос М.В.* О разрешимости обобщенной задачи Дирихле для гиперболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 68–78.
7. *Колос И.В., Колос М.В.* О решении линейной задачи фильтрации для гиперболических систем // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 2. 116–126.
8. *Колос И.В., Колос М.В.* О приближенном решении обобщенной смешанной краевой задачи для уравнений параболического и гиперболического типов // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 2. 149–161.
9. *Колос И.В., Колос М.В.* О приближенном решении одной обобщенной краевой задачи для уравнений гиперболического типа с вырождением // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 2. 160–166.
10. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
07.09.2006