УДК 519.6

АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ НА СЕТКАХ СО СГУЩАЮЩИМИСЯ УЧАСТКАМИ

П. А. Мазуров[1], А. В. Цепаев[1]

Разработаны численные алгоритмы для распараллеливания решения трехмерных задач двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками: один алгоритм — для решения сеточных уравнений по давлению, другой — для решения сеточных уравнений по насыщенности. Показана эффективность алгоритмов, возрастающая с увеличением числа сгущающихся участков сетки.

Ключевые слова: численные методы, распараллеливание алгоритмов, фильтрация жидкости, сгущающиеся сетки, сеточные уравнения, многопроцессорные вычислительные системы.

1. Введение. С развитием компьютерной техники появилась возможность использования многопроцессорных вычислительных систем для решения сложных математических задач [1]. К таким задачам относятся задачи фильтрации жидкости в трехмерных пластах. Основная трудность заключается в решении систем уравнений большой размерности из-за трехмерности объекта и необходимости сгущения сетки в прискважинных зонах (при этом часто размерность сгущающихся сеток достигает размерности грубой сетки). В связи с этим встает вопрос создания алгоритмов, пригодных для распараллеливания вычислений. Одним из развивающихся направлений в создании таких алгоритмов являются методы разделения области [2 – 7].

При решении задач двухфазной фильтрации на каждом временно́м шаге приходится определять поля давлений и насыщенностей. Для распараллеливания решения сеточных систем уравнений по давлению и насыщенности предлагаются два различных метода разделения области: один метод — для решения сеточных уравнений по давлению, другой — для решения сеточных уравнений по насыщенности. Отметим, что в отличие от традиционных методов в предлагаемых методах разбиения области на подобласти допускается нулевое пересечение между подобластями, что имеет место между прискважинными подобластями в моделировании реальных пластов.

Распараллеливание сеточной системы уравнений для давления основано на независимом решении уравнений для сгущающихся участков и новом типе согласования этих решений с решением на грубой сетке. Согласование достигается за счет введения дополнительных грубых сеток на сгущающихся участках. Алгоритм решения сеточных систем уравнений по давлению строится таким образом, что при итерационном процессе все дополнительные сетки обесточиваются, и итерационный процесс сходится к решению исходной системы уравнений для давления. Подобный алгоритм использовался при решении трехмерных задач напорной и напорно-безнапорной фильтрации с линейным и нелинейным законами фильтрации [8 – 12].

Распараллеливание сеточной системы уравнений для насыщенности основано на сочетании элементов явной и неявной схем. Распараллеливание явных схем не представляет трудностей, но из-за наличия размерности ячеек, соизмеримой с диаметром скважин, требуется мелкий шаг по времени, что приводит к большим вычислительным затратам. Распараллеливание неявных схем требует использования предиктор–корректор процедуры. В предлагаемом алгоритме на каждом временно́м шаге сеточные уравнения по насыщенности для сгущающихся участков решаются независимо по неявной схеме. Согласование полученных решений с решением на грубой сетке достигается за счет сочетания элементов явной и неявной схем в определении насыщенности крупных ячеек, окружающих сгущающиеся участки, без использования предиктор–корректор процедуры.

Алгоритмы тестировались при решении модельных задач двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости с различным числом скважин со сгущающимися сетками в прискважинных зонах. Системы уравнений на грубой сетке решались на одном процессоре. Системы уравнений на сгущающихся участках решались параллельно с использованием библиотеки MPI на многопроцессорной вычислительной системе МВС-1000. Алгоритмы имеют общий характер и могут быть использованы в других задачах с большим числом особенностей, требующих сгущения сетки.

[1] Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, г. Казань; e-mail: mazurov@mail.knc.ru, tsepaev@mail.knc.ru

2. Описание алгоритмов распараллеливания для решения задач двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости на сетках со сгущающимися участками. Область решения представляется многосвязной областью, внутренние поверхности которой определены интервалами вскрытия скважин. Интервалы вскрытия скважин являются особенностями задачи, требующими сгущения сетки. Диаметр скважины на 5 – 6 порядков, а толщина пласта на 2 – 3 порядка меньше характерных размеров пласта в горизонтальной плоскости.

Система уравнений двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости без учета капиллярных и гравитационных сил записывается в виде (см. [13, 14])

$$\operatorname{div}\big((K_\text{o}+K_\text{w})\operatorname{grad} p\big)=0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(q_w)+m\,\frac{\partial S_\text{w}}{\partial t}=0, \tag{2}$$

где $p=p(x,y,z)$ — давление, $q_w=\dfrac{K_\text{w}}{K_\text{w}+K_\text{o}}\,q$ — вектор скорости фильтрации вытесняющей жидкости (воды), $q=-(K_\text{w}+K_\text{o})\operatorname{grad} p$ — вектор скорости фильтрации, S_o — нефтенасыщенность, S_w — водонасыщенность, $S_\text{o}+S_\text{w}=1$, $K_\text{o}=K_\text{o}(S_\text{w})=k\,\dfrac{f_\text{o}}{\mu_\text{o}}$, $K_\text{w}=K_\text{w}(S_\text{w})=k\,\dfrac{f_\text{w}}{\mu_\text{w}}$ — фазовые проницаемости, $f_\text{w}=f_\text{w}(S_\text{w})$, $f_\text{o}=f_\text{o}(S_\text{o})$ — относительные фазовые проницаемости, k — абсолютная проницаемость, μ_o, μ_w — динамические вязкости фаз, m — пористость. Для уравнения (1) на внешней поверхности пласта обычно задаются граничные условия 1-го или 2-го рода. Для уравнения (2) в начальный момент времени задается распределение насыщенностей, а на участках внешней поверхности в суммарном потоке жидкости, поступающей в пласт, задаются доли фазовых компонентов. Весь пласт, как односвязная область, от кровли до подошвы покрывается грубой сеткой. Выделяются прискважинные подобласти. От узлов грубой сетки, расположенных на граничной поверхности прискважинных подобластей, строятся сетки, сгущающиеся к интервалам вскрытия скважин. На поверхности интервалов вскрытия задаются суммарные расходы при равенстве давлений в узлах указанной поверхности или давления, а также фазовые компоненты в случае нагнетательных скважин. Грубая сетка вне сгущающихся участков является основной грубой сеткой, а грубые сетки на сгущающихся участках считаются дополнительными грубыми сетками. Дополнительные грубые сетки используются далее при решении уравнения для давления. На каждый момент времени сначала определяются давления из уравнения (1), затем распределение насыщенностей [14] из уравнения (2).

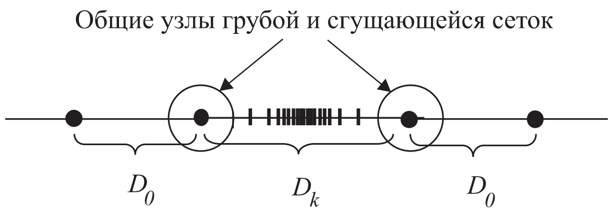

Рис. 1. Фрагмент основной сетки со сгущающимся участком: • — узел грубой сетки, ❙ — узел сгущающегося участка сетки, D_0 — подобласть грубой сетки, D_k — подобласть k-го сгущающегося участка сетки

Фрагмент сетки без интервала вскрытия со сгущающимся участком приведен на рис. 1. На рис. 2 приведен фрагмент сетки для описания решения сеточной системы уравнений по давлению.

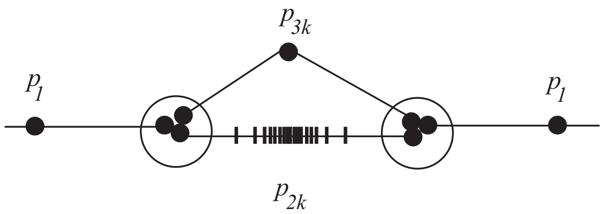

Рис. 2. Фрагмент сетки для описания решения системы уравнений по давлению: p_1 — решение на основной грубой сетке, p_{2k} — решение на сгущающейся сетке, p_{3k} — решение на дополнительной грубой сетке

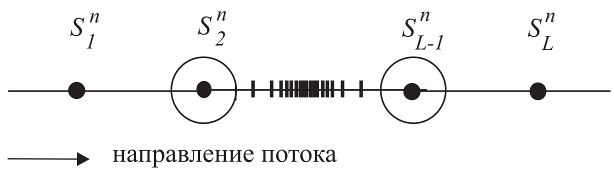

Рис. 3. Фрагмент сетки для описания решения системы уравнений по насыщенности: S_i^n — значения насыщенностей в узлах основной сетки на n-м временно́м шаге

В каждой прискважинной зоне решение на текущий момент времени представляется в виде суперпозиции двух решений: решение p_{2k} — на сгущающейся сетке, решение p_{3k} — на дополнительной грубой сетке. Суперпозиция решений достигается за счет расщепления давлений в общих узлах дополнительной грубой и сгущающейся сеток: $p_1=p_{2k}+p_{3k}$. Решение на сгущающейся сетке — с источниками, решение на дополнительной грубой сетке — без источников. В данной задаче источниками являются скважины.

Сеточная система уравнений решается итерационно. На каждой итерации значения давлений в указанных общих узлах сносятся с дополнительных грубых сеток на сгущающиеся сетки. Далее независимо решаются системы уравнений для сгущающихся участков сетки с граничными условиями по давлению в общих узлах, затем совместно решается система уравнений для основной и дополнительных грубых сеток. Критерий перехода от решения на грубой сетке к решению на сгущающихся сетках и наоборот основан на поведении дисбаланса уравнений основной сетки в граничных узлах сгущающихся участков. В итерационном процессе, построенном таким образом, дополнительные грубые сетки обесточиваются, и итерационный процесс сходится к решению исходной системы уравнений по давлению. Более подробное описание решения сеточной системы уравнений по давлению изложено в [8–12].

На рис. 3 приведен фрагмент сетки для описания решения сеточной системы уравнений по насыщенности.

Для каждой ячейки уравнение (2), проинтегрированное по объему ячейки, может быть записано в виде

$$m_i V_i \,\frac{S_{wi}^{n+1} - S_{wi}^{n}}{\Delta t} = Q_{wi-1,i} - Q_{wi,i+1}, \tag{3}$$

где V_i — объем i-й ячейки, Δt — шаг по времени, $Q_{wi,i+1} = \dfrac{K_{\mathrm{w}i}}{K_{\mathrm{w}i} + K_{\mathrm{o}i}}\, Q_{i,i+1}^{n+1}$ — фазовый расход из i-й ячейки в $(i+1)$-ю ячейку в единицу времени, $Q_{i,i+1}^{n+1}$ — полный расход из i-й ячейки в $(i+1)$-ю ячейку в единицу времени, значения коэффициентов $K_{\mathrm{w}i}$, $K_{\mathrm{o}i}$ берутся вверх по потоку из i-й ячейки. При решении уравнения (3) по явной схеме: $K_{\mathrm{w}i} = K_{\mathrm{w}}(S_{wi}^{n}) = K_{\mathrm{w}i}^{n}$, $K_{\mathrm{o}} = K_{\mathrm{o}}(S_{\mathrm{o}i}^{n}) = K_{\mathrm{o}i}$; при решении по неявной схеме: $K_{\mathrm{w}} = K_{\mathrm{w}}(S_{wi}^{n+1}) = K_{\mathrm{w}i}^{n+1}$, $K_{\mathrm{o}} = K_{\mathrm{o}}(S_{\mathrm{o}i}^{n+1}) = K_{\mathrm{o}i}^{n+1}$; соответствующие этим схемам расходы определяются как $Q_{wi,i+1}^{\mathrm{cell}}$, $Q_{wi,i+1}^{\mathrm{notcell}}$.

Полные расходы $Q_{i,i+1}^{n+1}$ на $(n+1)$-м временно́м шаге вычисляются по известным давлениям на $(n+1)$-м временно́м шаге. Насыщенности на $(n+1)$-м временно́м шаге в предлагаемой схеме решения определяются в четыре этапа.

1) Вычисляются по явной схеме фазовые расходы, выходящие из ячеек грубой сетки $Q_{w1,2}^{\mathrm{cell}}$, $Q_{w2,3}^{\mathrm{cell}}$, $Q_{wL-1,L}^{\mathrm{cell}}$.

2) Определяются насыщенности по неявной схеме для узлов сгущающегося участка $i = 3, \ldots, L-2$ из решения системы уравнений (3), при этом фазовый расход $Q_{w2,3}^{\mathrm{cell}}$ является граничным условием при решении указанной системы.

3) Вычисляются по неявной схеме фазовые расходы, входящие в общие узлы грубой и сгущающихся сеток $Q_{wL-2,L-1}^{\mathrm{notcell}}$.

4) Вычисляются насыщенности для ячеек грубой сетки из уравнений:

$$\begin{aligned}
&m_2 V_2 \,\frac{S_{w2}^{n+1} - S_{w2}^{n}}{\Delta t} = Q_{w1,2}^{\mathrm{cell}} - Q_{w2,3}^{\mathrm{cell}} && \text{— для второй ячейки,}\\
&m_{L-1} V_{L-1} \,\frac{S_{wL-1}^{n+1} - S_{wL-1}^{n}}{\Delta t} = Q_{wL-2,L-1}^{\mathrm{notcell}} - Q_{wL-1,L}^{\mathrm{cell}} && \text{— для } (L-1)\text{-й ячейки.}
\end{aligned}$$

Таким образом, насыщенности для ячеек сгущающихся участков вычисляются независимо по неявным схемам. Ячейки грубой сетки делятся на две группы. Для одной группы насыщенности вычисляются по явным схемам, для другой — насыщенности вычисляются с использованием элементов явной и неявной схем.

3. Постановка и алгоритм решения задачи двухфазной фильтрации. Задача решается в области D, представляющей собой пласт, ограниченный кровлей, подошвой, боковыми поверхностями и поверхностями интервалов вскрытия скважин V_k, $k = 1, \ldots, N$. Объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{N} V_k$ является дополнением многосвязной области D до односвязной области. Система уравнений двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости без учета капиллярных и гравитационных сил записывается в виде (1), (2) при граничных условиях

$$p = p_{\Gamma} \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{4}$$

$$-\,(K_{\mathrm{o}} + K_{\mathrm{w}})\,\frac{\partial p}{\partial n} = q_n \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{5}$$

$$p\big|_{\partial V_k} = P_k, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

$$S_w = S_{w_\Gamma} \quad \text{на} \quad \Gamma_3, \quad S_w = S_{w_k}, \quad k = 1, \ldots, M \tag{7}$$

и начальном условии

$$S_w = S_w^0 \quad \text{в} \quad D, \tag{8}$$

где $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ — внешняя граничная поверхность области D, Γ_3 — часть поверхности Γ, через которую жидкость поступает в пласт, ∂V_k — поверхность интервала вскрытия k-й скважины, P_k — заданное давление на k-й скважине, N — число скважин, M — число нагнетательных скважин ($M < N$), S_{w_k} — заданная насыщенность в нагнетательной скважине. Пласт покрыт сеткой Ω, ячейки которой в прискважинных зонах D_k уменьшаются в размерах к интервалам вскрытия скважин по убывающей геометрической прогрессии. Решение задачи (1), (2), (4)–(8) по определению полей давления p и насыщенности S_w на $(n+1)$-м временно́м шаге включает следующие этапы.

1) Вычисляются давления p_i^{n+1} из системы (1), (4)–(6) со значениями $K_{\text{o}i}^n$, $K_{\text{w}i}^n$ с использованием алгоритма, изложенного в п. 2 и [8–12].

2) Вычисляются полные расходы, выходящие из ячеек грубой сетки в единицу времени:

$$Q_{ji}^{n+1} = \frac{p_j^{n+1} - p_i^{n+1}}{R_{ij}^n}\,, \tag{9}$$

где $R_{ij}^n = \dfrac{L_{ij}}{D_{ij}}\,(K_{\text{w}i}^n + K_{\text{o}i}^n) + \dfrac{L_{ij}}{D_{ij}}\,(K_{\text{w}j}^n + K_{\text{o}j}^n)$, D_{ij} — площадь общей граничной поверхности i-й и j-й ячеек, L_{ij} — расстояние от узлового значения i-й ячейки до общей граничной поверхности, p_i^{n+1} — давление в i-й ячейке.

3) Для полных расходов, выходящих из ячеек грубой сетки, вычисляются фазовые расходы по явной схеме

$$Q_{wji}^{n+1,\text{cell}} = \left(\frac{K_{\text{w}}^n}{K_{\text{w}}^n + K_{\text{o}}^n}\right)_{ji}^{up} Q_{ji}^{n+1}, \quad \text{где} \quad \left(\frac{K_{\text{w}}^n}{K_{\text{w}}^n + K_{\text{o}}^n}\right)_{ji}^{up} = \begin{cases} \dfrac{K_{\text{w}i}^n}{K_{\text{w}i}^n + K_{\text{o}i}^n}\,, & p_i \geqslant p_j, \\[2ex] \dfrac{K_{\text{w}j}^n}{K_{\text{w}j}^n + K_{\text{o}j}^n}\,, & p_i < p_j. \end{cases}$$

4) Для каждой прискважинной зоны независимо вычисляются насыщенности по неявной схеме из системы уравнений

$$m_i V_i\, \frac{S_{wi}^{n+1} - S_{wi}^n}{\Delta t} = \sum_j Q_{wji}^{n+1}, \tag{10}$$

где сумма берется по j-м ячейкам, окружающим i-ю ячейку, $Q_{wji}^{n+1} = Q_{wji}^{n+1,\text{cell}}$ для j-х ячеек грубой сетки, из которых расход поступает в прискважинную зону, $Q_{wji}^{n+1} = Q_{wji}^{n+1,\text{ncell}} = \left(\dfrac{K_{\text{w}}^{n+1}}{K_{\text{w}}^{n+1} + K_{\text{o}}^{n+1}}\right)_{ji}^{up} Q_{ji}^{n+1}$ — в остальных случаях. Фазовые расходы $Q_{wji}^{n+1,\text{cell}}$ являются граничными условиями при решении системы (10).

5) Вычисляются насыщенности для ячеек грубой сетки $S_{wi}^{n+1} = S_{wi}^n + \dfrac{\Delta t}{m_i V_i} \sum\limits_j Q_{wji}^{n+1}$, где значения $Q_{wji}^{n+1} = Q_{wji}^{n+1,\text{ncell}}$ берутся из решения системы уравнений (10) для j-х ячеек прискважинных зон, из которых расход поступает в ячейки грубой сетки, $Q_{wji}^{n+1} = Q_{wji}^{n+1,\text{cell}}$ в остальных случаях.

Таблица 1

Решение задачи без разделения области

Число сгущающихся участков сетки	Число узлов	Время решения с определением насыщенности по неявной схеме	Время решения с определением насыщенности по явной схеме
1	11744	4 мин 11 сек	2 часа 23 мин
50	365524	183 мин 17 сек	47 часов 12 мин
100	726721	401 мин 46 сек	85 часов 2 мин

4. Результаты численных экспериментов. Предложенные алгоритмы тестировались при решении модельной трехмерной задачи двухфазной фильтрации жидкости с различным числом вертикальных добывающих скважин. Брался десятислойный пласт (≈ 10 км$\times$10 км$\times$0.18 км) с толщинами слоев $d_1 = 1$ м, $d_2 = 1$ м, $d_3 = 3$ м, $d_4 = 1$ м, $d_5 = 1$ м, $d_6 = 1$ м, $d_7 = 2$ м, $d_8 = 1$ м, $d_9 = 2$ м, $d_{10} = 5$ м и абсолютными проницаемостями $k_1 = 1$ мд, $k_2 = 10$ мд, $k_3 = 25$ мд, $k_4 = 10$ мд, $k_5 = 1$ мд, $k_6 = 10$ мд, $k_7 = 50$ мд, $k_8 = 10$ мд, $k_9 = 1$ мд, $k_{10} = 15$ мд соответственно. Кровля пласта считалась непроницаемой, на боковых поверхностях и подошве пласта давление $P_{\text{Г}} = 125$ атм, на скважинах $P_{\text{К}} = 30$ атм, на боковой поверхности насыщенность $S_w = 0$, на подошве $S_w = 1$. Начальная насыщенность $S_w = 0$. Динамическая вязкость воды $\mu_{\text{w}} = 1$ мПа·с, динамическая вязкость нефти $\mu_{\text{o}} = 15$ мПа·с, плотность нефти $\rho_{\text{o}} = 0.882$ г/см^3, плотность воды $\rho_{\text{w}} = 1$ г/см^3. Относительные фазовые проницаемости брались линейными функциями от насыщенностей. Каждая скважина моделировалась цилиндром с радиусом окружности $r = 0.1$ м. Ячейки, примыкающие к скважинам, имели размеры порядка 0.1 м как в горизонтальной плоскости, так и по высоте.

Таблица 2

Решение задачи с разделением области по давлению

Число сгущающихся участков сетки	Число узлов	Число процессоров	Время решения
1	11744	1	4 мин 11 сек
50	365524	1	172 мин 46 сек
		10	161 мин 56 сек
		20	159 мин 59 сек
100	726721	1	378 мин 25 сек
		10	360 мин 11 сек
		20	359 мин 5 сек

Системы уравнений для давления решались методом сопряженных градиентов с предобусловливающей матрицей, для построения которой использовалось неполное разложение Холесского [15, 16]. Системы уравнений для насыщенности решались методом Зейделя [17]. Системы уравнений решались до балансовой погрешности $\varepsilon = 10^{-4}$. Решение тестированных задач прерывалось по времени при достижении обводненности на скважинах $S_w = 0.98$.

Таблица 3

Решение задачи с разделением области по насыщенности

Число сгущающихся участков сетки	Число узлов	Число процессоров	Время решения
1	11744	1	3 мин 18 сек
50	365524	1	149 мин 37 сек
		10	41 мин 43 сек
		20	35 мин 31 сек
100	726721	1	299 мин 40 сек
		10	84 мин 19 сек
		20	70 мин 23 сек

Задача без разделения области решалась с использованием явных и неявных схем по насыщенности. При решении с явной схемой шаг по времени определялся размером ячеек, примыкающих к интервалам вскрытия скважины, и брался равным $\Delta t = 8$ сек. При решении с неявной схемой шаг по времени брался равным $\Delta t = 1$ сут. В табл. 1 приведено сравнительное время решения задачи без разделения области с определением насыщенности по явной и неявной схемам.

В предлагаемых алгоритмах системы уравнений на грубой сетке решаются на одном процессоре. Системы уравнений на сгущающихся участках сетки решаются независимо, что дает возможность решения этих систем параллельно на нескольких процессорах. Для каждого j-го процессора выделялось равное (с точностью до единицы) число систем уравнений, соответствующих множеству сгущающихся участков Q_j. Множества Q_j определялись в начале решения и не менялись в процессе решения. В табл. 2–4 приведено время решения задачи с разделением области по давлению и насыщенности.

Для анализа времени решения задачи двухфазной фильтрации с разделением области введем следующие обозначения. При решении задачи по определению насыщенности на n-м временно́м шаге обозначим: t^n_{ks} — время решения системы уравнений k-го сгущающегося участка, $t^n_{\max,s} = \max\limits_k t^n_{ks}$ — минимальное время, необходимое для решения системы уравнений любого сгущающегося участка, t^n_{gs} — время решения системы уравнений грубой сетки.

Таблица 4

Решение задачи с разделением области по давлению и насыщенности

Число сгущающихся участков сетки	Число узлов	Число процессоров	Время решения
1	11744	1	3 мин 18 сек
50	365524	1	139 мин 35 сек
		10	21 мин 02 сек
		20	13 мин 32 сек
100	726721	1	277 мин 45 сек
		10	45 мин 41 сек
		20	30 мин 10 сек

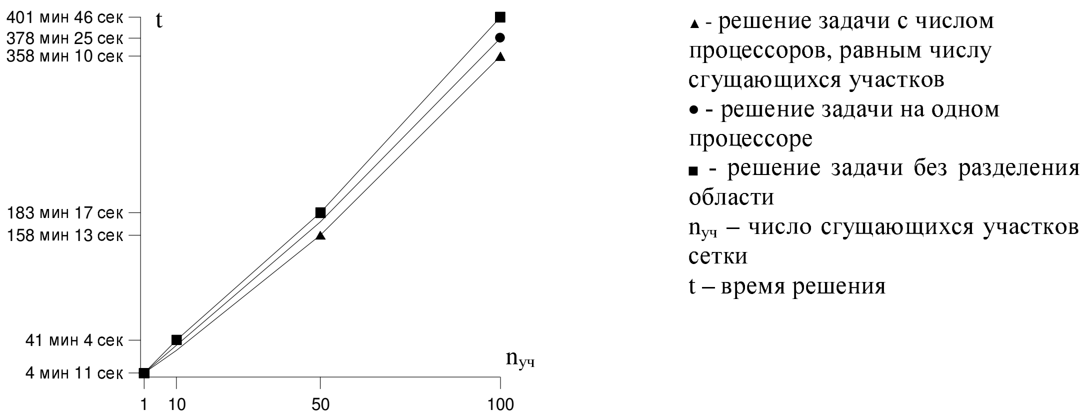

Рис. 4. Расчетное время решения задачи с разделением области по давлению

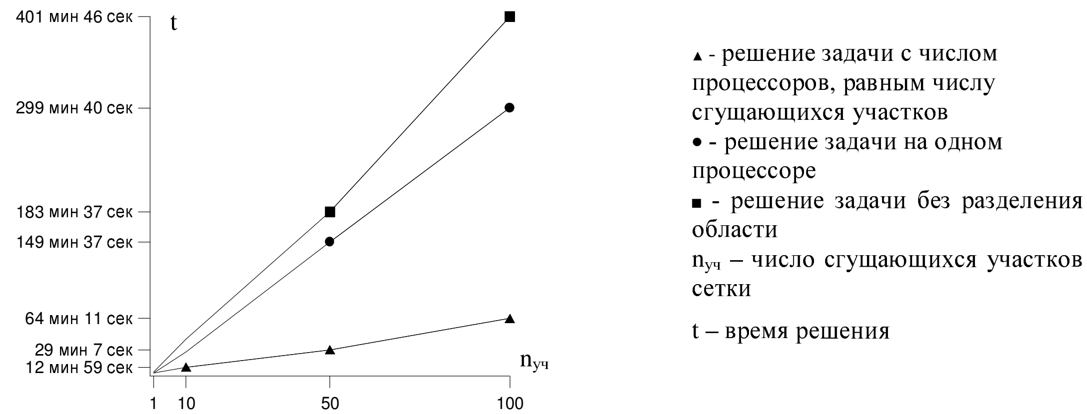

Рис. 5. Расчетное время решения задачи с разделением области по насыщенности

При решении задачи по определению давления на i-й внутренней итерации на n-м временнóм шаге обозначим: t^{in}_{kp} — время решения системы уравнений k-го сгущающегося участка, $t^{in}_{\max,p} = \max\limits_{k} t^{in}_{kp}$ — минимальное время, необходимое для решения системы уравнений любого сгущающегося участка, t^{in}_{gp} — время решения системы уравнений грубой сетки.

С учетом введенных обозначений запишем время решения задачи двухфазной фильтрации с K сгущающимися участками при различном числе процессоров N. Пусть t_N — время передачи данных между

N процессорами ($N > 1$). Тогда

$$T_1 = \sum_n \Big[\sum_i t_{gp}^{in} + t_{gs}^n + \sum_i \sum_k t_{kp}^{in} + \sum_k t_{ks}^n \Big] \quad \text{при} \quad N = 1,$$

$$T_{N<K} = \sum_n \Big[\sum_i t_{gp}^{in} + t_{gs}^n + \sum_i \max_j \sum_{k \in Q_j} t_{kp}^{in} + \max_j \sum_{k \in Q_j} t_{ks}^n \Big] + t_N \quad \text{при} \quad N < K,$$

$$T_{N=K} = \sum_n \Big[\sum_i t_{gp}^{in} + t_{gs}^n + \sum_i t_{\max,p}^{in} + t_{\max,s}^n \Big] + t_N \quad \text{при} \quad N = K.$$

По этим формулам и результатам решения задач, приведенным в табл. 2 – 4, можно определить примерное расчетное время решения задач с различным числом сгущающихся участков и процессоров. На рис. 4 – 6 показано расчетное время решения задачи с числом процессоров, равным числу сгущающихся участков, где для вычисления времени передачи данных использовалась линейная интерполяция времени передачи данных на 19 и 20 процессорах.

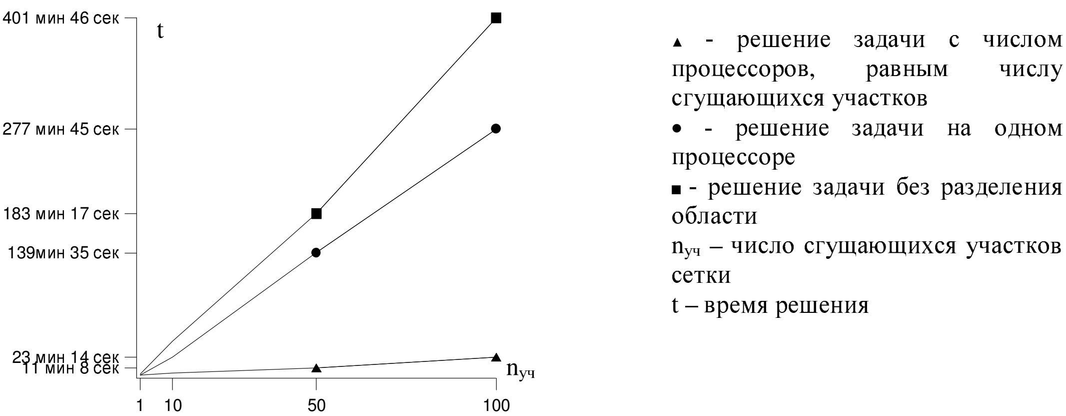

Рис. 6. Расчетное время решения задачи с разделением области по давлению и насыщенности

Из приведенных данных о времени решения видно, что с увеличением числа процессоров общее время решения задачи уменьшается, хотя эффективность использования процессоров падает. Время передачи данных мало́ по сравнению с другими временны́ми затратами, отсюда время $T_{\text{пор}} = \sum_n \Big[\sum_i t_{gp}^{in} + t_{gs}^n + \sum_i t_{\max,p}^{in} + t_{\max,s}^n \Big]$ является пороговым для данного алгоритма. Общее время решения с увеличением числа процессоров уменьшается за счет уменьшения времени решения систем уравнений для сгущающихся участков от величины $\sum_i \sum_k t_{kp}^{in} + \sum_k t_{ks}^n$ до величины $\sum_i t_{\max,p}^{in} + t_{\max,s}^n$. Эффективность использования процессоров падает за счет следующих причин: системы уравнений на грубой сетке решаются на одном процессоре, в то время как остальные процессоры простаивают; неравномерное распределение сгущающихся участков по процессорам и различное время решения соответствующих систем уравнений приводит к простаиванию тех процессоров, на которых системы уравнений решаются быстрее.

5. Заключение. Разработаны новые алгоритмы для распараллеливания решения задачи двухфазной фильтрации жидкости в трехмерных пластах с большим числом скважин, требующих сгущения сетки в прискважинных зонах. Распараллеливание сеточной системы уравнений по давлению основано на новом типе согласования решений для сгущающихся участков с решением на грубой сетке. Согласование достигается за счет введения дополнительных грубых сеток на сгущающихся участках. Распараллеливание сеточной системы уравнений по насыщенности основано на независимом решении уравнений на сгущающихся участках по неявным схемам. Согласование этих решений с решением на грубой сетке достигается с использованием элементов явной и неявной схем без предиктор–корректор процедуры.

Алгоритм тестировался с различным числом сгущающихся участков сетки на МВС-1000. Показана эффективность алгоритма при решении задач с большим числом сгущающихся участков сетки. Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
2. *Beckie R., Wood E.F., Aldama A.A.* Mixed finite element simulation of saturated groundwater flow using a multigrid accelerated domain decomposition technique // Water Resour. Res. 1993. **26**, N 9. 3145–3157.
3. *Feng X.* A non-overlapping domain decomposition method for solving elliptic problems by a finite element method // Proc. of the 9th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Ullensvang (Norway), 1996. 222–229.
4. *Gander M.J., Golub G.H.* A non-overlapping optimized Schwarz method which converges with arbitrarily weak dependence on h // Proc. of the 14th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Cocoyoc (Mexico), 2002. 281–288.
5. *Марчук Г.Е.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
6. *Gai Z., Parashkevov R. R., Russel T. F., Ye X.* Overlapping domain decomposition for a mixed finite element method in three dimensions // Proc. of the 9th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Ullensvang (Norway), 1996. 188–196.
7. *Gastaldi F., Gastaldi L., Quarteroni A.* ADN and ARN domain decomposition methods for solving advection–diffusion equations // Proc. of the 9th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Ullensvang (Norway), 1996. 334–341.
8. *Мазуров П.А., Цепаев А.В.* К решению задач фильтрации несжимаемой жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами // Матем. моделирование. 2002. **14**, № 9. 121–123.
9. *Мазуров П.А., Цепаев А.В.* Метод суперпозиции для решения задач фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами // Современные проблемы гидрогеологии и гидрогеомеханики. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. 471–476.
10. *Мазуров П.А., Цепаев А.В.* Метод решения нелинейных задач фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами // Матем. моделирование. 2004. **16**, № 3. 33–42.
11. *Мазуров П.А., Цепаев А.В.* Решение трехмерных задач фильтрации жидкости на МВС-1000/16 на сетках со сгущающимися участками // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Казань: ИММ КазНЦ РАН, 2004. 45–56.
12. *Губайдуллин Д.А., Мазуров П.А., Цепаев А.В.* Алгоритм решения трехмерных задач напорно-безнапорной стационарной фильтрации жидкости со сгущающимися участками сетки // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 2. 94–102.
13. *Басниев К.С., Власов А.М., Кочина И.М., Максимов В.М.* Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986.
14. *Коновалов А.Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988.
15. *Hill M.C.* Solving groundwater flow problems by conjugate gradient methods and the strongly implicit procedure // Water Resour. Res. 1990. **26**, N 9. 1961–1969.
16. *Larabi A., DeSmedt F.* Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods // Water Resour. Res. 1994. **30**, N 2. 509–521.
17. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
19.06.2006