УДК 519.642

ОБ ОДНОМ ОПТИМАЛЬНОМ ПО ПОРЯДКУ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА I РОДА

С. Г. Солодкий[1], Е. В. Лебедева[1]

Рассматривается проблема конечномерного решения одного класса уравнений Фредгольма I рода в случае, когда ядро и правая часть заданы неточно. Построен алгоритм, достигающий оптимального порядка точности восстановления нормальных решений определенного вида. В рамках предложенного алгоритма задействованы нестационарный итерированный метод Тихонова, правило останова согласно обобщенному принципу невязки, а также мульти-проекционная схема дискретизации. Установлено, что благодаря использованию этой схемы удается достичь необходимой точности приближений при экономном расходовании дискретной информации, имеющей вид коэффициентов Фурье–Лежандра. Эффективность численной реализации описанного алгоритма подтверждается на тестовом примере.

Ключевые слова: некорректная задача, метод регуляризации, принцип невязки, оптимальный порядок точности, дискретная информация.

1. Постановка задачи. Настоящая статья посвящена проблеме экономичной дискретизации интегральных уравнений Фредгольма I рода с ядрами из классов Соболева. При этом от построенных приближений требуется оптимальная по порядку скорость сходимости к нормальным решениям, степень истокообразной представимости которых неизвестна. В основе предлагаемого алгоритма лежит модификация метода Галеркина, которая впервые была применена в [1] при решении некорректных задач. Затем эта идея получила свое дальнейшее развитие в ряде работ, среди которых выделим [2, 3]. В рамках настоящей статьи изучен случай, когда ядро и свободный член решаемого уравнения известны с наперед заданной погрешностью.

Приведем необходимые определения и постановку исследуемой задачи. Итак, пусть L_2 — пространство суммируемых в квадрате на $(0,1)$ функций со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt$ и нормой $\|f\| = \left(\int\limits_0^1 \bigl|f(t)\bigr|^2\,dt\right)^{1/2}$. Через W_2^r, $r=1,2,\dots$, обозначим пространства Соболева r-раз дифференцируемых функций, чьи производные $f^{(i)}$, $i=\overline{1,r-1}$, абсолютно непрерывны на $[0,1]$, а $f^{(r)} \in L_2$, причем $\|f\|_{W_2^r} = \|f\| + \sum\limits_{i=1}^r \|f^{(i)}\|$.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$Ax = f, \tag{1}$$

где интегральный оператор A имеет вид

$$Ax(t) = \int\limits_0^1 a(t,\tau)x(\tau)\;d\tau, \quad t\in[0,1], \tag{2}$$

и $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$. Будем считать, что $\mathrm{Range\,(A)} \neq \overline{\mathrm{Range\,(A)}}$, $f \in \mathrm{Range\,(A)}$.

Пусть вместо точных коэффициентов A и f уравнения (1) известны лишь некоторые их приближения $A_h x(t) = \int\limits_0^1 a_h(t,\tau)x(\tau)\,d\tau$ и $f_\delta \in L_2$, такие, что $\|A - A_h\| \leqslant h$, $\quad \|f - f_\delta\| \leqslant \delta$, где $h>0$ и $\delta>0$ — известные оценки погрешности исходных данных.

[1] Институт математики Национальной академии наук Украины, ул. Терещенковская, 3, 01601, Киев 4, Украина; e-mail: solodky@imath.kiev.ua, djecsa@imath.kiev.ua

Как известно, полиномы Лежандра $\Lambda_i(t) = \dfrac{1}{2^i i!}\dfrac{d^i(t^2-1)^i}{dt^i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, образуют полную ортогональную (но не нормированную) систему в среднеквадратичной метрике на отрезке $[-1, 1]$. Перенесем систему полиномов Λ_i на отрезок $[0, 1]$ следующим образом:

$$e_1(t) \equiv 1, \quad e_i(t) = \sqrt{2i-1}\,\Lambda_{i-1}(2t-1), \quad t \in [0,1], \quad i = 2, 3, \ldots .$$

Легко видеть, что полная система многочленов $e_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, является на отрезке $[0, 1]$ ортогональной и нормированной, а следовательно, образует в L_2 ортонормированный базис. Обозначим его $E = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Опишем множество операторов (2), определяющих класс исследуемых уравнений (1). Через $\mathcal{H}^r$ обозначим совокупность операторов A вида (2), $\|A\| \leqslant 1$, таких, что при некотором $\beta_r \geqslant 1$ и любом $m = 1, 2, \ldots$ выполняется

$$\big\|(I-P_m)A\big\| \leqslant \beta_r m^{-r}, \quad \big\|(I-P_m)A^*\big\| \leqslant \beta_r m^{-r}, \tag{3}$$

где I — единичный оператор в L_2, а P_m — ортопроектор на линейную оболочку первых m элементов базиса E. В дальнейшем будем предполагать, что A, $A_h \in \mathcal{H}^r$.

Замечание. Как следует, например, из [4], для произвольной функции $f \in W_2^r$ справедлива оценка $\|f - P_m f\| \leqslant m^{-r}\|f\|_{W_2^r}$, где $P_m f$ — m-я сумма Фурье–Лежандра функции f. Таким образом, условие (3) означает, что класс $\mathcal{H}^r$ содержит операторы (2), такие, что A и A^* переводят единичный шар пространства L_2 в шар радиуса β_r пространства W_2^r.

В рамках настоящей статьи будем исследовать алгоритмы приближенного решения уравнений (1) с неточно заданными коэффициентами, которые в качестве дискретной информации об (1) используют набор $T(A_h, f_\delta)$ скалярных произведений вида

$$T(A_h, f_\delta) = \big((e_{i_l}, A_h e_{j_l}),\, (e_{i_k}, f_\delta),\, l = 1, \ldots, N_1,\, k = 1, \ldots, N_2\big), \tag{4}$$

являющихся коэффициентами Фурье–Лежандра функций a_h и f_δ: $(e_i, A_h e_j) = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 e_i(t) a_h(t,\tau) e_j(\tau)\,dt\,d\tau$, $(e_i, f_\delta) = \displaystyle\int_0^1 f_\delta(\tau) e_i(\tau)\,d\tau$. Через $\operatorname{Card}(T)$ обозначим общее количество скалярных произведений, входящих в вектор $T(A_h, f_\delta)$, т.е. $\operatorname{Card}(T) = N_1 + N_2$. Более экономичным будем считать тот алгоритм, в рамках которого используется информационный вектор $T(A_h, f_\delta)$ с меньшей величиной $\operatorname{Card}(T)$. Целью настоящей работы является построение экономичного алгоритма приближенного решения (1), достигающего наперед заданной точности.

Конечномерные приближения будем строить к нормальному решению $x^\dagger$, которое при некоторых действительных ρ, ν принадлежит множеству истокообразно представимых элементов

$$x^\dagger \in M_{\nu\rho}(A) = \big\{x : x = |A|^\nu v, \|v\| \leqslant \rho\big\}, \tag{5}$$

где $|A| = (A^*A)^{1/2}$, значение $\rho > 0$ известно, а для неизвестного параметра ν задана граница его значений $\nu \in [1, \nu_1]$, $1 < \nu_1 < \infty$.

Известно [5], что точность восстановления решений (1), заполняющих множество $M_{\nu\rho}(\mathrm{A})$, не может быть меньше величины $\rho^{1/(\nu+1)}(\delta + \rho h)^{\nu/(\nu+1)}$.

Сформулируем задачу настоящей статьи. Требуется построить алгоритм приближенного решения уравнений (1) с операторами $A \in \mathcal{H}^r$. При этом от алгоритма требуется обеспечение оптимальной по порядку точности $O\big((\delta + h)^{\nu/(\nu+1)}\big)$ восстановления решений $x^\dagger$ вида (5) и экономичное расходование коэффициентов Фурье (4) по сравнению с ранее известными методами.

2. Экономичный алгоритм. В качестве метода регуляризации возьмем нестационарный итерированный метод Тихонова (см. [6])

$$x_0 = 0, \quad x_l = \alpha_l (A^*A + \alpha_l I)^{-1} x_{l-1} + (A^*A + \alpha_l I)^{-1} A^* f, \tag{6}$$

где $l = 1, 2, \ldots$, а параметр регуляризации $\alpha = \alpha_l$ выбирается из геометрической сетки $\alpha_l = \alpha_0 q^l$ при некоторых фиксированных значениях $\alpha_0 > 0$, $0 < q < 1$. Элементы x_l могут быть представлены в виде $x_l = g_l(A^*A)A^*f$, где порождающая функция $g_l(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \displaystyle\prod_{j=1}^{l}\dfrac{\alpha_j}{\alpha_j + \lambda}\right)$ при некоторых не зависящих от α константах $\chi_p, \chi_* > 0$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{0\leqslant\lambda<\infty} 1-\lambda g_l(\lambda)=1, \tag{7}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda<\infty} \lambda^p\big(1-\lambda g_l(\lambda)\big)\leqslant \chi_p\alpha_l^p, \quad 0<p\leqslant l, \tag{8}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda<\infty} \lambda^{1/2}g_l(\lambda)\leqslant \chi_*\alpha_l^{-1/2}. \tag{9}$$

Известно [6], что метод (6) позволяет достигать оптимального порядка точности на множествах решений (5) при любых $\nu>0$.

С целью сокращения информационных затрат предлагается модификация метода Галеркина, которая состоит в дискретизации исходных коэффициентов A_h и f_δ следующим образом:

$$A_{hn}=\sum_{k=1}^{n}(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})A_hP_{2^{2n-k}}+P_1A_hP_{2^{2n}}, \quad P_{2^n}f_\delta=\sum_{k=1}^{2^n}(f_\delta,e_k)e_k. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что общее количество коэффициентов Фурье (4), необходимых для реализации схемы (10), составляет

$$\mathrm{Card}\,(T)=2^{2n}\left(1+\frac{n}{2}\right)+2^n. \tag{11}$$

Параметр дискретизации n будем находить из условия (12) при $c_1=\dfrac{2^{2r}}{2^{2r}-1}\,\rho$, $c_2=\rho\left(1+\dfrac{\beta_r2^r}{2^r-1}\right)$:

$$2^{-2rn}n\leqslant \frac{2}{c_1}\,(\delta+c_2h). \tag{12}$$

Предлагаемый алгоритм состоит в комбинации нестационарного итерированного метода Тихонова (6) с правилом останова согласно обобщенному принципу невязки [7] и схемы дискретизации (10) с правилом (12) для выбора n. Другими словами, приближенное решение $\widehat{x}_L$ находится по формуле

$$\widehat{x}_L=g_L(A_{hn}^*A_{hn})A_{hn}^*P_{2^n}f_\delta, \tag{13}$$

где параметр регуляризации α_L выбирается из соотношения

$$b_1(\delta+c_2h)\leqslant\|P_{2^n}f_\delta-A_{hn}\widehat{x}_L\|\leqslant b_2(\delta+c_2h), \quad 2<b_1<b_2. \tag{14}$$

Алгоритм (10), (12)–(14) обозначим через $\mathbf{A_1}$. Предстоит показать, что алгоритм $\mathbf{A_1}$ обладает необходимыми свойствами оптимальности и экономичности.

3. Вспомогательные результаты. Приведем некоторые соотношения, которые нам потребуются в дальнейшем. В силу полярного разложения оператора A (см. [8]) справедливы равенства

$$A=U|A|, \quad |A|=A^*U, \quad A^*=|A|U^*, \tag{15}$$

где U ($\|U\|=1$) — частично изометричный оператор.

Для дробных степеней линейных операторов имеют место оценки (см. [5]) ([5])

$$\big\|\,(A^*A)^{\nu/2}-(B^*B)^{\nu/2}\big\|\leqslant z_{1\nu}\|A^*A-B^*B\|^{\,\min\{\nu/2,1\}} \quad \text{при} \quad \nu\geqslant1, \tag{16}$$

$$\big\|\,|A|^\nu-|B|^\nu\big\|\leqslant z_{2\nu}\|A-B\| \quad \text{при} \quad \nu>1, \tag{17}$$

где $z_{1\nu}=4/\pi$ при $\nu=1$, и $z_{1\nu}$, $z_{2\nu}$ ограничены на интервале $[1;\infty]$.

Введем обозначения $c_3=\beta_r^22^{r+2}$, $c_4=z_{1\nu}\,\dfrac{2(\beta_r^2+c_3)}{c_1}$.

Лемма 1. *Пусть* $A\in\mathcal{H}^r$, $x^\dagger\in M_{\nu\rho}(A)$, $1\leqslant\nu<\infty$. *Если параметр дискретизации* n *выбран согласно* (12), *то* $\|A_{hn}x^\dagger-P_{2^n}f_\delta\|\leqslant2(\delta+c_2h)$, $\|\,|A_h|^\nu-|A_{hn}|^\nu\|\leqslant c_4(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)}$.

Доказательство. Оценим величину $\|\,A_{hn}x^\dagger-P_{2n}f_\delta\|$ следующим образом:

$$\|\,A_{hn}x^\dagger-P_{2^n}f_\delta\|\leqslant\big\|\,(A_{hn}-A_n)x^\dagger\big\|+\big\|\,(A_n-P_{2^n}A)x^\dagger\big\|+\big\|P_{2^n}(f-f_\delta)\big\|.$$

Для доказательства первого неравенства воспользуемся представлением (10) для оператора A_{hn}, неравенством моментов и леммой 4.3 (см. [9]):

$$\big\| (A_n - A_{hn})x^\dagger \big\| = \big\| (A_n - A_{hn})|A|^\nu v \big\| \leqslant \rho \| A - A_h \| \bigg(\big\| |A|^\nu \big\| + \sum_{k=1}^{n} \big\| (I - P_{2^{2n-k}})|A|^\nu \big\| \bigg) \leqslant$$
$$\leqslant \rho h \bigg(1 + \sum_{k=1}^{n} \big\| A(I - P_{2^{2n-k}}) \big\| \bigg) \leqslant c_2 h.$$

Оценка второго слагаемого следует из леммы 1.2 (см. [3]) и (12): $\big\|(A_n - P_{2^n}A)x^\dagger\big\| \leqslant c_1 2^{-2rn} \leqslant \delta + c_2 h$. Тогда $\|A_{hn}x^\dagger - P_{2^n}f_\delta\| \leqslant 2(\delta + c_2 h)$. Норму оператора $|A_h|^\nu - |A_{hn}|^\nu$ оценим с помощью (16) и леммы 1 (см. [3]):

$$\big\| |A_h|^\nu - |A_{hn}|^\nu \big\| \leqslant z_{1\nu} \|A_h^* A_h - A_{hn}^* A_{hn}\|^{\min\{\nu/2,1\}} \leqslant z_{1\nu}\big((\beta_r^2 + c_3 n)2^{-2rn}\big)^{\min\{\nu/2,1\}},$$

где константа c_3 определена выше. С учетом (12) имеем

$$\big\| |A_h|^\nu - |A_{hn}|^\nu \big\| \leqslant z_{1\nu} \bigg(\frac{2(\beta_r^2 + c_3)}{c_1}\,(\delta + c_2 h) \bigg)^{\min\{\nu/2,1\}} =$$
$$= \begin{cases} z_{1\nu} \bigg(\dfrac{2(\beta_r^2 + c_3)}{c_1}\,(\delta + c_2 h) \bigg)^{\nu/2} \leqslant c_4(\delta + c_2 h)^{\nu/(\nu+1)} & \text{при } \nu \in [1,2), \\ z_{1\nu}\, \dfrac{2(\beta_r^2 + c_3)}{c_1}\,(\delta + c_2 h) \leqslant c_4(\delta + c_2 h)^{\nu/(\nu+1)} & \text{при } \nu \in [2,\infty]. \end{cases}$$

Лемма 1 доказана.

4. Основные утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $A \in \mathcal{H}^r$ *и* $x^\dagger \in M_{\nu\rho}(A)$, $1 \leqslant \nu \leqslant \nu_1$, *а коэффициенты уравнения* (1) *заданы неточно. Тогда в рамках алгоритма* $\mathbf{A_1}$ *достигается оптимальная по порядку оценка погрешности* $O\big((\delta + h)^{\nu/(\nu+1)}\big)$.

Доказательство. Запишем погрешность алгоритма $\mathbf{A_1}$ в следующем виде:

$$x^\dagger - \widehat{x}_L = g_L(A_{hn}^* A_{hn}) A_{hn}^* (A_{hn}x^\dagger - P_{2^n}f_\delta) + S_L x^\dagger,$$

где $S_L = I - g_L(A_{hn}^* A_{hn}) A_{hn}^* A_{hn}$. Тогда с учетом леммы 1 и (9) имеем

$$\| x^\dagger - \widehat{x}_L \| \leqslant 2\chi_* \alpha_L^{-1/2} (\delta + c_2 h) + \|S_L x^\dagger\|. \tag{18}$$

Отсюда следует, что для установления справедливости теоремы необходимо оценить величины $\|S_L x^\dagger\|$ и $\alpha_L^{-1/2}(\delta + c_2 h)$.

Пусть вначале $\nu \in (1;\infty)$. Тогда, используя (7), (8), (17) и лемму 1, находим

$$\| S_L x^\dagger \| \leqslant \rho \big\| S_L |A_{hn}|^\nu \big\| + \rho \|S_L\| \, \big\| |A|^\nu - |A_{hn}|^\nu \big\| \leqslant$$
$$\leqslant \rho \chi_{\nu/2} \alpha_L^{\nu/2} + \rho \Big(\big\| |A|^\nu - |A_h|^\nu \big\| + \big\| |A_h|^\nu - |A_{hn}|^\nu \big\| \Big) \leqslant \rho \chi_{\nu/2} \alpha_L^{\nu/2} + \rho\big(z_{2\nu} h + c_4(\delta + c_2 h)^{\nu/(\nu+1)} \big).$$

Рассмотрим элемент

$$A_{hn} S_L x^\dagger = (P_{2^n} f_\delta - A_{hn}\widehat{x}_L) + \big(I - A_{hn} g_L(A_{hn}^* A_{hn}) A_{hn}^* \big)(A_{hn}x^\dagger - P_{2^n}f_\delta\big). \tag{19}$$

Учитывая (7) и лемму 1, из (19) получим

$$\| A_{hn} S_L x^\dagger \| \leqslant \| A_{hn}\widehat{x}_L - P_{2^n} f_\delta \| + 2(\delta + c_2 h), \tag{20}$$
$$\| A_{hn} S_L x^\dagger \| \geqslant \| A_{hn}\widehat{x}_L - P_{2^n} f_\delta \| - 2(\delta + c_2 h). \tag{21}$$

В силу (21) и (14) имеют место неравенства $\| A_{hn} S_L x^\dagger \| \geqslant (b_1 - 2)(\delta + c_2 h)$ и

$$\alpha_L^{-1/2}(\delta + c_2 h) \leqslant \alpha_L^{-1/2} (b_1 - 2)^{-1} \| A_{hn} S_L x^\dagger \|. \tag{22}$$

Используя (15), установим вспомогательное соотношение

$$A_{hn}S_L = U\Big(1 - |A_{hn}|g_L\big(|A_{hn}|^2\big)|A_{hn}|\Big)|A_{hn}| = US_L|A_{hn}|. \tag{23}$$

Отсюда с помощью (7), (8), (17), (23) и леммы 1 находим, что при $\nu \in (1,\infty)$ выполняется

$$\alpha_L^{-1/2}\|\, A_{hn}S_Lx^\dagger\| \leqslant \rho\alpha_L^{-1/2}\Big(\big\|\, US_L|A_{hn}|^{\nu+1}\big\| + \big\|US_L|A_{hn}|\big\|\, \big\|\, |A|^\nu - |A_{hn}|^\nu\big\|\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \rho\chi_{(\nu+1)/2}\alpha_L^{\nu/2} + \rho\chi_{1/2}\big(z_{2\nu}h + c_4(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)}\big).$$

Теперь рассмотрим отдельно случай $\nu = 1$. Из (15) следует $x^\dagger = A^*u$, $\|u\| \leqslant \rho$. Тогда с помощью леммы 1 и формул (23), (8) получим

$$\alpha_L^{-1/2}\|A_{hn}S_Lx^\dagger\| = \alpha_L^{-1/2}\|A_{hn}S_LA^*u\| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_L^{-1/2}\rho\Big(\big\|US_L|A_{hn}|^2U^*\big\| + \big\|US_L|A_{hn}|\big\|\,\big(\|A-A_h\| + \|A_h - A_{hn}\|\big)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \rho\chi_1\alpha_L^{1/2} + \rho\chi_{1/2}\big(h + c_4(\delta+c_2h)^{1/2}\big).$$

Аналогично находим

$$\|S_Lx^\dagger\| = \|S_LA^*u\| \leqslant \|S_LA^*_{hn}u\| + \big\|S_L(A^* - A^*_{hn})u\big\| \leqslant$$
$$\leqslant \|u\|\Big(\big\|S_L|A_{hn}|U^*\big\| + \|S_L\|\big(\|A-A_h\| + \|A_h - A_{hn}\|\big)\Big) \leqslant \rho\big(\chi_{1/2}\alpha_L^{1/2} + h + c_4(\delta+c_2h)^{1/2}\big).$$

Таким образом, для любого $\nu \in [1,\infty)$ справедливо

$$\alpha_L^{-1/2}\|\, A_{hn}S_Lx^\dagger\| \leqslant \rho\chi_{(\nu+1)/2}\alpha_L^{\nu/2} + \rho\chi_{1/2}\big(c_5h + c_4(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)}\big), \tag{24}$$
$$\|\, S_Lx^\dagger\| \leqslant \rho\chi_{\nu/2}\alpha_L^{\nu/2} + \rho\big(c_5h + c_4(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)}\big), \tag{25}$$

где $c_5 = \max\{1, z_{2\nu}\}$. Подставляя (24) в (22), находим

$$\alpha_L^{-1/2}(\delta+c_2h) \leqslant (b_1-2)^{-1}\Big(\rho\chi_{(\nu+1)/2}\alpha_L^{\nu/2} + \rho\chi_{1/2}\big(c_5h + c_4(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)}\big)\Big).$$

Используя найденную выше оценку для величины $\alpha_L^{-1/2}(\delta+c_2h)$ и неравенство (25), получим

$$\|\, x^\dagger - \widehat{x}_L\| \leqslant c_6\alpha_L^{\nu/2} + c_7(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)} + c_8h,$$

где $c_6 = \rho\big(\chi_{\nu/2} + 2\chi_*\chi_{(\nu+1)/2}(b_1-2)^{-1}\big)$, $c_7 = \rho\big(c_4 + 2c_4\chi_*\chi_{1/2}(b_1-2)^{-1}\big)$, $c_8 = \rho\big(c_5 + 2c_5\chi_*\chi_{1/2}(b_1-2)^{-1}\big)$.

Очевидно, что при $\alpha_L \leqslant (\delta+c_2h)^{2/(\nu+1)}$ выполняется $\|x^\dagger - \widehat{x}_L\| \leqslant (c_6+c_7+c_8)(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)}$ и в этом случае утверждение теоремы доказано.

Обозначим $\alpha_{\widehat{L}} = (\delta+c_2h)^{2/(\nu+1)}$. Тогда согласно лемме 3.2 (см. [9]) найдется такое $c_* > 0$, что для любых $0 \leqslant \lambda < \infty$ и $\alpha_L > \alpha_{\widehat{L}}$ выполняется

$$\big(1-\lambda g_L(\lambda)\big)^2 \leqslant c_*\bigg(\big(1-\lambda g_{\widehat{L}}(\lambda)\big)^2 + \alpha_{\widehat{L}}^{-1}\Big(\lambda\big(1-\lambda g_L(\lambda)\big)\Big)^2\bigg).$$

Отсюда следует неравенство

$$\|\, S_Lx^\dagger\|^2 \leqslant c_*\big(\|\, S_{\widehat{L}}x^\dagger\|^2 + \alpha_{\widehat{L}}^{-1}\|\, A_{hn}S_Lx^\dagger\|^2\big). \tag{26}$$

Из (20) и (14) находим $\|A_{hn}S_Lx^\dagger\|^2 \leqslant \big((b_2+2)(\delta+c_2h)\big)^2$

Используя тот факт, что $\alpha_{\widehat{L}} := (\delta+c_2h)^{2/(\nu+1)}$, а также полученное выше неравенство, оценим второе слагаемое из правой части (26):

$$\alpha_{\widehat{L}}^{-1}\|A_{hn}S_Lx^\dagger\|^2 \leqslant \alpha_{\widehat{L}}^{-1}\big((b_2+2)(\delta+c_2h)\big)^2 = (b_2+2)^2(\delta+c_2h)^{2\nu/(\nu+1)}.$$

С помощью (25) найдем

$$\|S_{\widehat{L}}x^\dagger\|^2 \leqslant \big(\rho\chi_{\nu/2}(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)} + \rho(c_5+c_4)(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)}\big)^2 = (\delta+c_2h)^{2\nu/(\nu+1)}\big(\rho\chi_{\nu/2} + \rho(c_4+c_5)\big)^2.$$

Теперь, подставляя в (26) найденные выше оценки для величин $\alpha_{\widehat{L}}^{-1}\|A_{hn}S_Lx^\dagger\|^2$ и $\|S_{\widehat{L}}x^\dagger\|^2$, получим

$$\|S_Lx^\dagger\|^2 \leqslant c_*\Big((\delta+c_2h)^{2\nu/(\nu+1)}\Big(\big(\rho\chi_{\nu/2}+\rho(c_5+c_4)\big)^2+(b_2+2)^2\Big)\Big).$$

В силу предположения, что $\alpha_L > \alpha_{\widehat{L}} := (\delta+c_2h)^{2/(\nu+1)}$, нетрудно видеть, что выполняется неравенство $\alpha_L^{-1/2}(\delta+c_2h) \leqslant (\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)}$. Подставляя полученные оценки величин $\alpha_L^{-1/2}(\delta+c_2h)$ и $\|\,S_Lx^\dagger\|$ в (18), имеем

$$\|x^\dagger-\widehat{x}_L\| \leqslant c_9(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)}, \quad \text{где} \quad c_9=\Big(c_*\big(\rho\chi_{\nu/2}+\rho(c_5+c_4)\big)^2+(b_2+2)^2\Big)^{1/2}+2\chi_*.$$

Окончательно получим $\|x^\dagger-\widehat{x}_L\| \leqslant \max\{c_9, c_6+c_7+c_8\}(\delta+c_2h)^{\nu/(\nu+1)}$, что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Для обеспечения оптимального порядка точности $O\big((\delta+h)^{\nu/(\nu+1)}\big)$ в рамках алгоритма $\mathbf{A_1}$ на классе уравнений (1) с $A\in\mathcal{H}^r$ и $x^\dagger\in M_{\nu\rho}(A)$, $1\leqslant\nu\leqslant\nu_1$, достаточно использовать информационный вектор $T(A_h,f_\delta)$ вида (4) с $\mathrm{Card}\,(T)=O\big((\delta+h)^{-1/r}\log^{1+1/r}(\delta+h)^{-1}\big)$.*

Доказательство. В силу выбора параметра n из условия (12) мы будем иметь $n2^{-2rn}=O\big((\delta+h)\big)$, $2^{2n}=O\big((\delta+h)^{-1/r}n^{1/r}\big)$. Тогда с учетом (11) окончательно получим

$$\mathrm{Card}\,(T)=O\big(n\,n^{1/r}(\delta+h)^{-1/r}\big)=O\big((\delta+h)^{-1/r}\log^{1+1/r}(\delta+h)^{-1}\big). \tag{27}$$

5. Обсуждение результатов и численные расчеты. Ранее проблема построения экономичных схем дискретизации (1) при известных коэффициентах A, f_δ изучалась в [1–3, 10, 11]. Отметим, что наименьшая оценка информационных затрат была достигнута в [11], а именно

$$\mathrm{Card}\,(T)=O\big(\delta^{-1/r}\log^{1+1/r}\delta^{-1}\big). \tag{28}$$

С другой стороны, рассмотрим алгоритм $\mathbf{A_1}$ для случая, когда оператор A известен точно, и найдем оценку объема его информационных затрат. Из (27) получим, что искомая оценка совпадает с (28). Таким образом, предложенный в настоящей работе подход к решению (1) применим для решения более широкого класса задач с минимальными вычислительными затратами.

Продемонстрируем эффективность предложенного алгоритма при помощи следующего тестового примера. В пространстве L_2 рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\widetilde{A}x(t)\equiv\pi^2\int\limits_0^1 a(t,\tau)x(\tau)\,d\tau=f(t), \quad \text{где} \quad a(t,\tau)=\begin{cases}\sinh\tau\,\sinh(t-1)/\sinh 1, & 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant 1,\\ \sinh t\,\sinh(\tau-1)/\sinh 1, & 0\leqslant t\leqslant\tau\leqslant 1.\end{cases} \tag{29}$$

Известно [12], что ядро интегрального уравнения (29) является функцией Грина для однородной краевой задачи $f^{(II)}(t)-f(t)=0$, $f(0)=f(1)=0$, а оператор $\widetilde{A}=\widetilde{A}^*$ действует из L_2 в W_2^2. Очевидно включение $\widetilde{A}\in\mathcal{H}^2$.

В качестве правой части уравнения (29) возьмем функцию

$$f(t)=\frac{\pi^4}{\sinh 1}\left(\frac{\sinh t(1-2\sinh 1)(1-\cosh 1)}{2\sinh 1}+t\sinh t\sinh\frac{1}{2}+t(1-\cosh 1)\cosh\frac{t}{2}+\sinh 1-\cosh t\sinh 1\right),$$

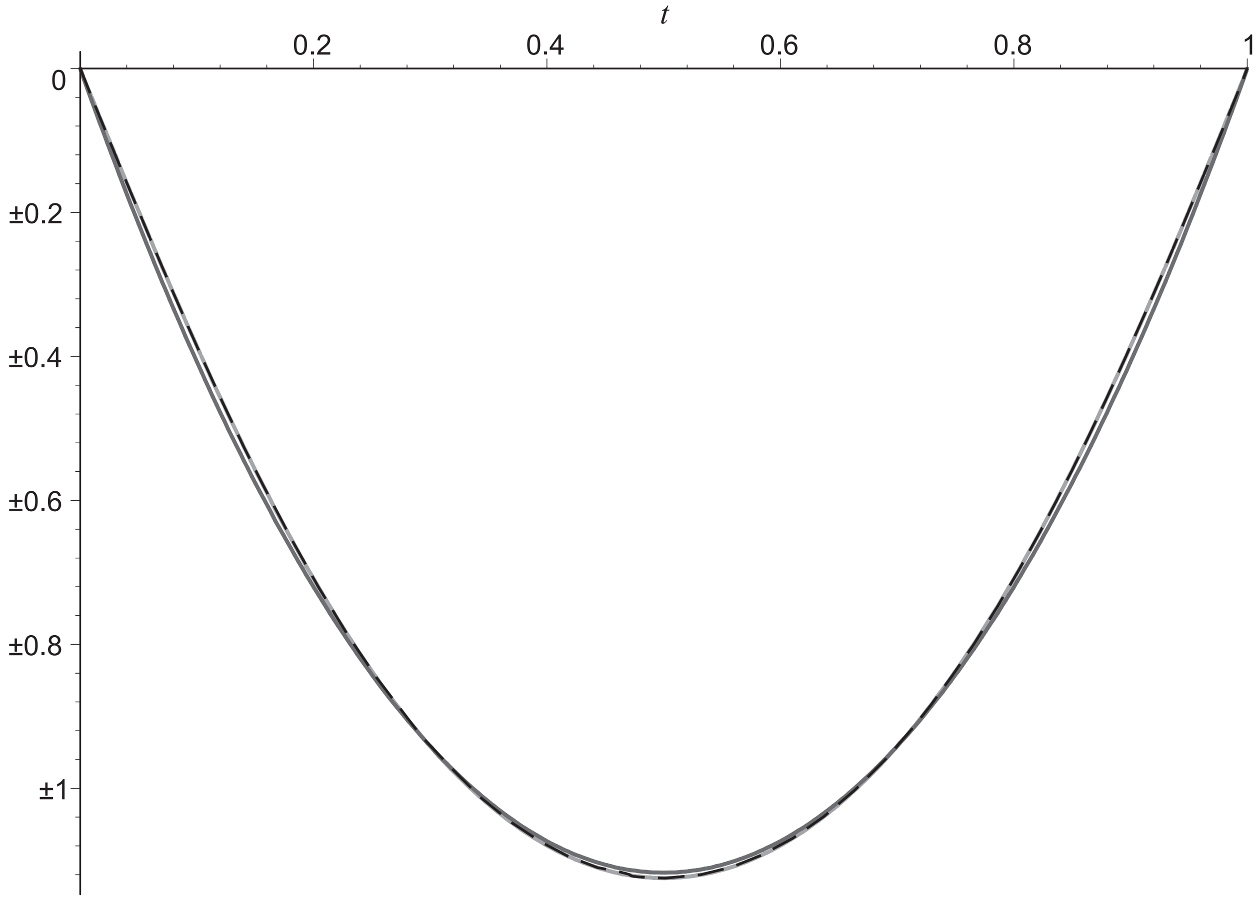
которой соответствует нормальное решение $x^\dagger\in M_{1,1}(\widetilde{A})$ следующего вида

$$x^\dagger(t)=|\widetilde{A}|\cdot 1(t)=\pi^2\left(\frac{\sinh t(1-\cosh 1)}{\sinh 1}-1+\cosh t\right).$$

Вычисления выполняются при уровне погрешности $h=10^{-4}$ и $\delta=10^{-3}, 10^{-4}$. Из (12) следует, что в рамках алгоритма $\mathbf{A_1}$ параметр дискретизации n нужно брать равным 3 при $\delta=10^{-3}$ и 4 при $\delta=10^{-4}$.

Для сокращения вычислительных затрат воспользуемся приемом, предложенным в [1], который позволяет уменьшить размерность решаемой системы уравнений до 2^n. Введем обозначения: $T_0=\{1\}$, $T_m=\{2^{m-1}+1, 2^{m-1}+2,\ldots,2^m\}$, $m=1,\ldots n$. Элементы $\widehat{x}_l$, $l=\overline{1,L}$, будем искать в виде

$$\widehat{x}_l(t)=\sum_{i=1}^{2^n}d_i^l\varphi_i(t), \quad \text{где} \quad \varphi_i=\begin{cases}P_{2^n}\widetilde{A_h^*}e_1, & i\in T_0,\\ P_{2^{2n-m}}\widetilde{A_h^*}e_i, & i\in T_m, \quad m=1,2,\ldots,n.\end{cases}$$



ALG	δ	b_2	q	ERROR	L
$\mathbf{A_1}$	10^{-4}	2.25	0.6	0.002432	13
$\mathbf{A_1}$	10^{-4}	2.25	0.7	0.002286	17
$\mathbf{A_1}$	10^{-4}	2.25	0.8	0.002235	24
$\mathbf{A_1}$	10^{-4}	2.25	0.9	0.002375	41
$\mathbf{A_1}$	10^{-4}	2.5	0.6	0.002432	13
$\mathbf{A_1}$	10^{-4}	2.5	0.7	0.002286	17
$\mathbf{A_1}$	10^{-4}	2.5	0.8	0.002235	24
$\mathbf{A_1}$	10^{-4}	2.5	0.9	0.002375	41
$\mathbf{A_2}$	10^{-3}	2.25	0.6	0.005539	11
$\mathbf{A_2}$	10^{-3}	2.25	0.7	0.005643	14
$\mathbf{A_2}$	10^{-3}	2.25	0.8	0.005358	19
$\mathbf{A_2}$	10^{-3}	2.25	0.9	0.005219	32

ALG	δ	b_2	q	ERROR	L
$\mathbf{A_2}$	10^{-3}	2.5	0.6	0.010955	8
$\mathbf{A_2}$	10^{-3}	2.5	0.7	0.011860	10
$\mathbf{A_2}$	10^{-3}	2.5	0.8	0.013703	13
$\mathbf{A_2}$	10^{-3}	2.5	0.9	0.012630	21
$\mathbf{A_1}$	10^{-3}	2.25	0.6	0.005535	11
$\mathbf{A_1}$	10^{-3}	2.25	0.7	0.005643	14
$\mathbf{A_1}$	10^{-3}	2.25	0.8	0.005363	19
$\mathbf{A_1}$	10^{-3}	2.25	0.9	0.005224	32
$\mathbf{A_1}$	10^{-3}	2.5	0.6	0.010953	8
$\mathbf{A_1}$	10^{-3}	2.5	0.7	0.011859	10
$\mathbf{A_1}$	10^{-3}	2.5	0.8	0.013702	13
$\mathbf{A_1}$	10^{-3}	2.5	0.9	0.012629	21

Тогда согласно алгоритму $\mathbf{A_1}$ на каждом шаге итерации l неизвестные коэффициенты $\{d_i^l\}$ могут быть найдены из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha_l d_i^l + \sum_{j=1}^{2^n} a_{i,j} d_j^l = \alpha_l d_i^{l-1} + (e_i, f_\delta), \quad i = 1, 2, ..., 2^n.$$

Здесь в силу свойств скалярного произведения $a_{i,j} = a_{j,i}$ и при $i \leqslant j$ имеет место

$$a_{i,j} = (e_i, \widetilde{A}_h P_{2^{2n-m}} \widetilde{A}_h^* e_j) = \sum_{s=1}^{2^{2n-m}} (e_i, \widetilde{A}_h e_s)(e_j, \widetilde{A}_h e_s),$$

где $j \in T_m$. Представление $\widehat{x}_l$ в стандартном виде (т.е. разложение по базису E) осуществляется по формуле

$$\widehat{x}_l(t) = \sum_{i=1}^{2^n} d_i^l \varphi_i(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{s=1}^{2^{2n-m}} e_s(t) \sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m} d_i^l (e_i, \widetilde{A}_h e_s) + \sum_{s=1}^{2^{2n}} e_s(t) d_1^l (e_1, \widetilde{A}_h e_s).$$

Рассмотрим еще один алгоритм решения (29) (обозначим его $\mathbf{A_2}$), который получается из $\mathbf{A_1}$ путем замены в нем схемы дискретизации (10) на стандартный метод Галеркина. А именно, следуя рекомендациям работы [9], для алгоритма $\mathbf{A_2}$ положим $\widetilde{A}_{hn} = P_{2^n} \widetilde{A}_h P_{2^{2n}}$. В обоих алгоритмах $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ выбор параметра α выполняется по правилу (14) из геометрической сетки $\alpha_l = \alpha_0 q^l$ при $\alpha_0 = 1$ и различных значениях q и b_2. Для сравнения эффективности алгоритмов $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ подсчитаем информационные затраты при их реализации в случае $n = 3$. Итак, для схемы (10) получим $\mathrm{Card}\,(T) = 168$, а для метода Галеркина — $\mathrm{Card}\,(T) = 520$. Результаты счета представлены в таблице, где в колонке ALG указан алгоритм решения, в колонке L — количество выполненных шагов итерации, а в колонке ERROR — погрешность приближения в метрике L_2.

Приведенные результаты позволяют сделать вывод, что оба алгоритма дают приблизительно одинаковую точность решения при существенно различных информационных затратах. На рисунке пунктирной линией изображено приближенное решение $\widehat{x}_L(t)$, а сплошной линией — точное решение $x^\dagger(t)$ в случае, когда $\delta = 10^{-3}$, $b_2 = 2.5$ и $q = 0.7$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pereverzev S.V.* Optimization of projection methods for solving ill-posed problems // Computing. 1995. **55**. 113–124.
2. *Pereverzev S.V., Solodky S.G.* An efficient discretization for solving ill-posed problems // Lect. Appl. Math. 1996. **32**. 643–649.
3. *Solodky S.G.* A generalized projection scheme for solving ill-posed problems // J. Inverse Ill Posed Probl. 1999. **7**, N 2. 185–200.
4. *Томин Н.Г.* Применение интерполяции линейных операторов к вопросам сходимости рядов коэффициентов Фурье по классическим ортогональным многочленам // Докл. АН СССР. 1973. **212**, № 5. 1074–1077.
5. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
6. *Hanke M., Groetsch C.W.* Nonstationary iterated Tikhonov regularization // Journal of Optimization Theory and Applications. 1998. **98**. 37–53.
7. *Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Обобщенный принцип невязки // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. **13**, № 2. 294-302.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
9. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems // Numer. Math. 1990. **57**. 63–79.
10. *Maass P., Pereversev S.V., Ramlau R., Solodky S.G.* An adaptive discretization for Tikhonov–Phillips regularization with a posteriori parameter selection // Numer. Math. 2001. **87**. 485–502.
11. *Solodky S.G., Lebedeva E. V.* Bounds of information expenses in constructing projection methods for solving ill-posed problems // Comp. Method Appl. Math. 2006. **6**, № 1. 87–93.
12. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.В.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию
05.09.2006