

УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ВЯЗКОСТИ И ПЛОТНОСТИ В ОДНОРОДНОМ И БЕЗГРАНИЧНОМ ГРУНТЕ

Д. Н. Никольский¹

Ставится трехмерная задача об эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности для случая “поршневого” вытеснения. Решение задачи сводится к численному решению системы, состоящей из интегрального и дифференциального уравнений, методом дискретных особенностей. Исследована “практическая сходимость” численной схемы и выполнено сопоставление результатов численного счета с известным двумерным решением. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-01-96303).

Ключевые слова: эволюция границы раздела жидкостей, метод дискретных особенностей, интегральные уравнения, дифференциальные уравнения, сходимость, численные методы.

1. Введение. Эксплуатация нефтяных, газовых и водоносных месторождений, решение задач о миграции загрязнения привели к необходимости построения и исследования новых математических моделей совместного движения двух и более жидкостей.

Решением эволюционных задач занимались многие исследователи. Из-за сложности решения этих задач в общем виде были построены упрощенные модели. Так, наиболее проста модель “разноцветных” жидкостей [1], в которой граница раздела жидкостей представляет собой линию отмеченных частиц (иными словами, в модели “разноцветных” жидкостей пренебрегают различием физических свойств жидкостей).

В модели “поршневого” вытеснения (модели Лейбензона–Маскета) различают физические свойства жидкостей. Однако в этой модели граница раздела жидкостей полагается резкой, т.е. вытесняющую и вытесняемую жидкости считают несмешивающимися.

Несмотря на ограничения, решить задачу о совместной эволюции несмешивающихся жидкостей удалось не сразу. Исследователи создавали различные упрощенные модели: модель жестких трубок тока [14], в которой полагалась неизменность трубок тока в процессе движения границы раздела жидкостей; модель Лейбензона [14], в которой вязкость вытесняющей жидкости полагается равной нулю. Впервые без введения дополнительных ограничений плоскопараллельную задачу “поршневого” вытеснения решил В. Л. Данилов [2] методом нанесения на подвижную границу потенциала простого слоя; при этом решение задачи сводилось к решению интегро-дифференциального уравнения.

Развитие двумерных моделей “поршневого” вытеснения было продолжено в работах автора (совместных с В. Ф. Пивенем и И. К. Лифановым [4, 16]) методом нанесения на подвижную границу потенциала двойного слоя. В этих работах учтена неоднородность слоя. В работах В. Ф. Пивеня и Ю. С. Федяева [9, 15] двумерная задача об эволюции границы раздела жидкостей решается методом нанесения на подвижную границу вихревого слоя.

Научная новизна настоящей работы состоит в том, что в ней построена трехмерная модель “поршневого” вытеснения одной жидкости другой. Решение задачи сведено к решению системы, состоящей из интегрального и дифференциального уравнений. Численно эта система решена методом дискретных особенностей, обоснованным в работах И. К. Лифанова [3]. Для полученной численной схемы исследована “практическая сходимость” и выполнено сопоставление результатов численного счета для тестовой задачи с результатами численного счета, полученными решением осесимметричной задачи.

Погрешность численной схемы, приведенной в данной работе и допускаемой в начальный момент времени (на первом шаге по времени), оценена в работе [5]. На базе построенной в данной работе математической модели в работе [6] проведено исследование влияния расположения линейной скважины на эволюцию первоначально плоской границы раздела жидкостей.

Следует отметить, что “поршневая” модель применима на стадии первичной разработки нефтяного месторождения и в случае моделирования эволюции границы загрязнения. Если же нефтяное месторождение разрабатывается вторично, то используются различные модели многофазной фильтрации.

¹ Орловский государственный университет, физико-математический факультет, ул. Комсомольская, д. 95, 302026, г. Орел; e-mail: nikolskydn@univ-orel.ru

2. Построение математической модели. Рассмотрим пространственную фильтрацию в однородном изотропном и безграничном грунте. Область течения D безгранична. Резкая подвижная поверхность σ_t делит область D на части D_1 и D_2 , занятые жидкостями с вязкостями μ_1 и μ_2 и плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно. Поверхность σ_t считаем гладкой.

В случае когда σ_t представляет собой контур нефтеносности, вытесняемая и вытесняющая жидкости моделируют нефть и воду соответственно. Если σ_t представляет собой границу загрязнения, то вытесняющая и вытесняемая жидкости моделируют чистую и загрязненную жидкости.

Пусть в области D расположено κ скважин. Скважины будем моделировать линейными стоками длины L_i , $i = 1, 2, \dots, \kappa$. Через q_i , $i = 1, 2, \dots, \kappa$, обозначим дебит i -й скважины — расход жидкости через поверхность скважины, приходящийся на единицу длины ее фильтра. Положение каждой скважины определяется координатами ее концов $M_{i1}(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})$ и $M_{i2}(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2})$.

Течение жидкости в области D описывают закон Дарси и уравнение неразрывности [1]:

$$\mathbf{v}(M, t) = \nabla \varphi(M, t), \quad \varphi(M, t) = -\frac{1}{\mu} (p - \rho \mathbf{e}_g \mathbf{r}_M), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(M, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}(M, t)$ — скорость фильтрации, $\varphi(M, t)$ — потенциал скорости фильтрации.

Перемещение частиц жидкости, находящихся на поверхности σ_t , описывается (см. [4]) дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \frac{\mathbf{v}^+(M, t) + \mathbf{v}^-(M, t)}{2}. \quad (3)$$

Законы (1)–(3) записаны в безразмерных величинах. Характерные величины: $P_0 = \rho_0 g L_0$, $\Phi_0 = K P_0$, $V_0 = \frac{K \rho_0 g}{\mu_0}$, $T_0 = \frac{L_0 \mu_0}{m K \rho_0 g}$. На поверхности σ_t выполняются условия непрерывности давлений и неразрывности фильтрационного потока:

$$p^+(M, t) = p^-(M, t), \quad v_n^+(M, t) = v_n^-(M, t), \quad M \in \sigma_t. \quad (4)$$

Из (1) и (2) следует, что потенциал скорости фильтрации $\varphi(M, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi(M, t) = 0. \quad (5)$$

Условия (4) для потенциала скорости фильтрации примут вид

$$\mu_1 \varphi^+(M, t) - \mu_2 \varphi^-(M, t) = (\rho_1 - \rho_2) \mathbf{e}_g \cdot \mathbf{r}_M, \quad \left(\frac{\partial \varphi(M, t)}{\partial n} \right)^+ = \left(\frac{\partial \varphi(M, t)}{\partial n} \right)^-, \quad M \in \sigma_t. \quad (6)$$

Потенциал скорости фильтрации $\varphi(M, t)$ представим в виде суммы

$$\varphi(M, t) = \varphi_0(M, t) + \varphi_*(M, t), \quad (7)$$

где $\varphi_0(M, t)$ — потенциал невозмущенного течения, вызванного работой системы скважин, $\varphi_*(M, t)$ — потенциал возмущения, вызванного поверхностью σ_t .

Потенциал $\varphi_0(M, t)$ имеет вид (см. [10])

$$\varphi_0(M, t) = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{q_i}{4\pi} \ln \frac{r_{2i} r_{12i} - \mathbf{r}_{2i} \mathbf{r}_{12i}}{r_{1i} r_{12i} - \mathbf{r}_{1i} \mathbf{r}_{12i}}. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{r}_{1i} \equiv \mathbf{r}_{MM_{1i}}$, $\mathbf{r}_{2i} \equiv \mathbf{r}_{MM_{2i}}$ и $\mathbf{r}_{12i} \equiv \mathbf{r}_{M_{1i}M_{2i}}$. Потенциал $\varphi_*(M, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (5). С учетом (7) условия (6) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \mu_1 \varphi_*^+(M, t) - \mu_2 \varphi_*^-(M, t) &= (\mu_1 - \mu_2) \varphi_0(M, t) + (\rho_1 - \rho_2) \mathbf{e}_g \cdot \mathbf{r}_M, \\ \left(\frac{\partial \varphi_*(M, t)}{\partial n} \right)^+ &= \left(\frac{\partial \varphi_*(M, t)}{\partial n} \right)^-, \quad M \in \sigma_t. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом (1) и (7) дифференциальное уравнение движения поверхности σ_t (3) примет вид

$$\frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \mathbf{v}_0(M, t) + \frac{(\nabla \varphi_*(M, t))^+ + (\nabla \varphi_*(M, t))^-}{2}, \quad M \in \sigma_t, \quad \mathbf{v}_0(M, t) = \nabla \varphi_0(M, t). \quad (10)$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение поверхности раздела жидкостей σ_0 задано параметрически:

$$\mathbf{r}_{0M} = \mathbf{r}_0(\alpha, \beta), \quad \text{где } \alpha, \beta \text{ — параметры.} \quad (11)$$

В бесконечности для потенциала φ_* выполняются условия регулярности

$$\varphi_*(M, t) = O\left(\frac{1}{r_{MN}}\right), \quad |v_*(M, t)| = |\nabla \varphi_*(M, t)| = O\left(\frac{1}{r_{MN}^2}\right) \quad (12)$$

при $r_{MN} \rightarrow \infty$ ($N \in D$). Выполнение условий (12) обеспечивает единственность решения задачи сопряжения (5), (9) для потенциала $\varphi_*(M, t)$ [8].

Задача об эволюции поверхности раздела жидкостей σ_t состоит в том, что по заданным источникам (стокам) течения (8) и ее начальному положению (11) необходимо найти ее положения в моменты времени $t > 0$. Для этого нужно решить задачу сопряжения (5), (9) для потенциала $\varphi_*(M, t)$ с учетом (12), а затем с учетом найденного потенциала φ_* решить дифференциальное уравнение (10) при заданном начальном условии (11).

3. Сведение к системе интегрального и дифференциального уравнений. Потенциал возмущения $\varphi_*(M, t)$ ищем в виде потенциала двойного слоя, распределенного по σ_t с плотностью $g(M, t)$:

$$\varphi_*(M, t) = \int_{\sigma_t} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N, \quad M \notin \sigma_t, \quad (13)$$

$$\text{где } \Omega(M, N) = \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N}, \quad \Phi(M, N) = \frac{1}{4\pi r_{MN}}, \quad r_{MN} = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (z_M - z_N)^2}.$$

Предельные значения потенциала $\varphi_*(M, t)$ на поверхности σ_t имеют вид (см. [3])

$$\varphi_*^\pm(M, t) = \int_{\sigma_t} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N \pm \frac{g(M, t)}{2}, \quad M \in \sigma_t. \quad (14)$$

Интеграл в (14) понимается в смысле главного значения по Коши.

С учетом (8) и (13) потенциал $\varphi(M, t)$ в виде (7) удовлетворяет уравнению Лапласа (5), условию регулярности (12) и второму граничному условию из (9). Подставим (7) в первое условие из (9) и с учетом (14) получим

$$g(M, t) - 2\lambda \int_{\sigma_t} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N = 2\lambda \varphi_0(M, t) + \alpha \mathbf{e}_g \mathbf{r}_M, \quad M \in \sigma_t, \quad (15)$$

при $\lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$, $\alpha = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 + \mu_1}$. С учетом (7) и соотношения (см. [3])

$$(\nabla \varphi_*(M, t))^\pm = \nabla_M \int_{\sigma_t} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N \pm \frac{\text{Grad } g(M, t)}{2}, \quad M \in \sigma_t, \quad (16)$$

дифференциальное уравнение движения поверхности σ_t (10) примет вид

$$\frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \mathbf{v}_0(M, t) + \int_{\sigma_t} g(N, t) \nabla_M \Omega(M, N) dl_N, \quad M \in \sigma_t. \quad (17)$$

В (16) $\text{Grad } g(M, t)$ — касательная составляющая градиента функции $g(M, t)$ [3].

Таким образом, для решения задачи об эволюции поверхности раздела жидкостей различной вязкости и плотности σ_t имеем систему, состоящую из интегрального уравнения (15) и дифференциального уравнения движения поверхности σ_t (17) при заданном начальном условии (11).

4. Численное решение. Пусть выбрана правая система координат. Построим численную схему для уравнений (15), (17), воспользовавшись методом дискретных особенностей для решения (15) и методом замкнутых вихревых рамок для вычисления сингулярного интеграла в (17), обоснованными в работе И. К. Лифанова [3]. Для этого поверхность σ_t , известную в некоторый момент времени t^s , $s = 0, 1, \dots$, представим элементарными площадками $\Delta \sigma_{mk}^s$, $m = 0, 1, \dots, n_1 - 2$, $k = 0, 1, \dots, n_2 - 2$, $s = 0, 1, \dots$,

приблизительно одинаковой площади. Края этих площадок задают точки P_{ij}^s при $i = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, $j = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, $s = 0, 1, \dots$ (рис. 1). Приблизительно в центре каждой площадки $\Delta\sigma_{mk}^s$ расположим расчетные точки M_{mk}^s $i = 0, 1, \dots, n_1 - 2$, $j = 0, 1, \dots, n_2 - 2$, $s = 0, 1, \dots$, вычислив их координаты по следующей формуле: $M_{mk}^s = \frac{1}{4}(P_{mk}^s + P_{m+1,k}^s + P_{m+1,k+1}^s + P_{m,k+1}^s)$.

В интегральном уравнении (15) заменим интеграл на суммы

$$g_{mk}^s - 2\lambda \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{\substack{j=0 \\ m,k \neq i,j}}^{n_2-2} g_{ij}^s \Omega_{mkij} \Delta\sigma_{ij}^s = 2\lambda \varphi_{0mk}^s, \quad m = 0, 1, \dots, n_1 - 2, \quad k = 0, 1, \dots, n_2 - 2. \quad (18)$$

Уравнение (18) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений.

Отметим, что в ходе численных расчетов для системы (18) было установлено диагональное преобладание, что позволило решать эту систему методом простой итерации. В этом методе каждое новое приближение находится по формуле

$$g_{mk}^{s,p} = 2\lambda \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{\substack{j=0 \\ m,k \neq i,j}}^{n_2-2} g_{ij}^{s,p-1} \Omega_{mkij} \Delta\sigma_{ij}^s + 2\lambda \varphi_{0mk}^s, \quad (19)$$

$m = 0, 1, \dots, n_1 - 2$, $k = 0, 1, \dots, n_2 - 2$, $p = 1, 2, \dots, J$, или в матричном виде

$$g^{s,p} = B^{s,p-1} + C^s. \quad (20)$$

Здесь $s = 0, 1, \dots$, $p = 1, 2, \dots, J$, J — число итераций, которое определяется из условия (см. [11])

$$\frac{\|g^J - g^{J-1}\|_1}{\|g^J\|_1} < \frac{1 - \|B\|_1}{\|B\|_1} \varepsilon, \quad (21)$$

где ε — заданная точность.

Выбор метода простой итерации в данной работе объясняется простотой его распараллеливания.

Считаем, что плотность потенциала двойного слоя g_{mk}^s не меняется в пределах каждой площадки $\Delta\sigma_{mk}^s$, $s = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n_1 - 2$, $k = 0, 1, \dots, n_2 - 2$. Тогда разностная схема для (17) примет вид

$$\frac{\Delta \mathbf{r}_{mk}^s}{\Delta t^s} = \mathbf{v}_{0mk}^s + \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{\substack{j=0 \\ \Delta\sigma_{ij}^s}}^{n_2-2} g_{mk}^s \int \nabla_M \Omega(M, N) d\sigma_N \quad (22)$$

при $\Delta \mathbf{r}_{mk}^s = \mathbf{r}_{mk}^{s+1} - \mathbf{r}_{mk}^s$, $\Delta t^s = t^{s+1} - t^s$, $s = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n_1 - 2$, $k = 0, 1, \dots, n_2 - 2$.

Для вычисления интеграла в (22) воспользуемся теоремой Ампера (см. [13])

$$\int_{\Delta\sigma_{ij}^s} \nabla_M \frac{\partial}{\partial n_N} \left(\frac{1}{r_{MN}} \right) d\sigma_N = - \int_{L_{ij}^s} \frac{d\mathbf{l}_N \times \mathbf{r}_{MN}}{r_{MN}^3}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta \mathbf{r}_{mk}^s}{\Delta t^s} = \mathbf{v}_{0mk}^s - \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{j=0}^{n_2-2} \frac{g_{mk}^s}{4\pi} \mathbf{V}_{mkij}^s, \quad \mathbf{V}_{mkij}^s = \sum_{\gamma=1}^4 \frac{\mathbf{r}_{12}^{\gamma s} \times \mathbf{r}_1^{\gamma s}}{(r_1^{\gamma s} r_{12}^{\gamma s})^2 - (\mathbf{r}_1^{\gamma s} \cdot \mathbf{r}_{12}^{\gamma s})^2} \left(\frac{\mathbf{r}_1^{\gamma s} \cdot \mathbf{r}_{12}^{\gamma s}}{r_1^{\gamma s}} - \frac{\mathbf{r}_2^{\gamma s} \cdot \mathbf{r}_{12}^{\gamma s}}{r_2^{\gamma s}} \right). \quad (23)$$

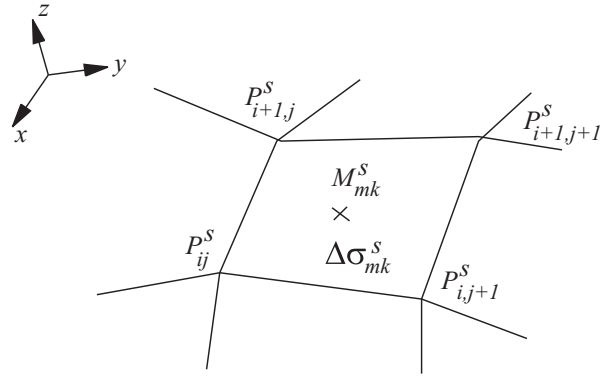


Рис. 1. Элементарные площадки

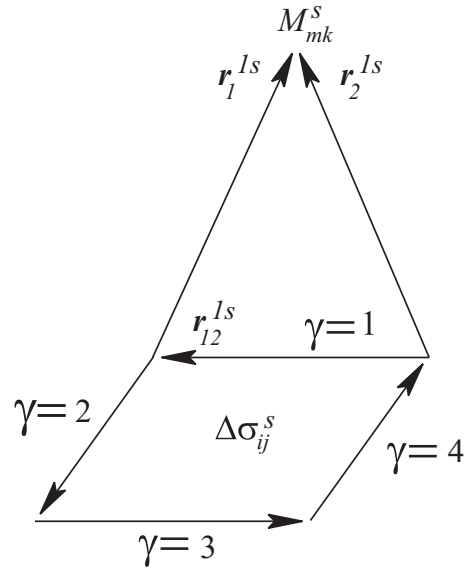


Рис. 2. Вихревая рамка

Интеграл V_{mkij}^s из (23) вычислен в работе [3]. Векторы $\mathbf{r}_{12}^{\gamma s}$, $\mathbf{r}_1^{\gamma s}$ и $\mathbf{r}_2^{\gamma s}$ для $\gamma = 1$ изображены на рис. 2.

Итак, для численного решения задачи об эволюции поверхности раздела жидкостей имеем систему линейных алгебраических уравнений (18) и разностный аналог дифференциального уравнения движения поверхности раздела жидкостей (23). Для нахождения смещения расчетных точек M_{mk}^s в каждый момент времени t^s , $m = 0, 1, \dots, n_1 - 2$, $k = 0, 1, \dots, n_2 - 2$, $s = 0, 1, \dots$, надо найти плотность g_{mk}^s в этих точках путем решения системы (18), а затем по формулам (23) вычислить смещения $\Delta \mathbf{r}_{mk}^s$ точек M_{mk}^s .

5. Осесимметричная задача. Перед решением тестовой задачи укажем численную схему для осесимметричной задачи совместного движения жидкостей. Пусть в меридиональной полуплоскости выбрана декартова система координат xOy ; ось Ox является осью симметрии, $y \geq 0$. Ускорение свободного падения $\mathbf{g}$ направлено вдоль оси Ox . В соответствии с [4, 7] эволюция границы Γ_t раздела жидкостей различных вязкостей μ_1 и μ_2 и плотностей ρ_1 и ρ_2 описывается следующей системой интегрального и дифференциального уравнений:

$$g(M, t) - 2\lambda \int_{\Gamma_t} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N = 2\lambda \varphi_0(M, t) + \alpha x_M, \quad M \in \Gamma_t, \quad (24)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \mathbf{v}_0(M, t) + \mathbf{v}_*(M, t), \quad M \in \Gamma_t, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Omega(M, N) &= y_N \frac{\partial \Phi_1(M, N)}{\partial n_N}, \quad \lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \quad \alpha = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \mathbf{v}_0(M, t) = \nabla \varphi_0(M, t), \\ \mathbf{v}_*(M, t) &= \int_{\Gamma_t} \frac{\partial g(N, t)}{\partial l_N} \mathbf{V}_2(M, N) dl_N, \quad \mathbf{V}_2(M, N) = \frac{1}{y_M} \left(\frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial y_M} \mathbf{i} - \frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial x_M} \mathbf{j} \right), \\ M &= (x_M, y_M), \quad N = (x_N, y_N) \end{aligned}$$

с заданным начальным условием при $t = 0$:

$$\mathbf{r}_{0M} = \mathbf{r}_M(0, \zeta), \quad \text{где } \zeta \text{ — параметр.} \quad (26)$$

Здесь $\Phi_1(M, N) = \frac{1}{2\pi\sqrt{y_M y_N}} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega - 2\cos\varphi}} \left(\omega = \frac{(x_M - x_N)^2 + y_M^2 + y_N^2}{2y_M y_N} \right)$ — квазипотенциал скорости нормированного стока с полным расходом, равным -1 ; $\Psi_2(M, N) = -\frac{\sqrt{y_M y_N}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{2\omega - 2\cos\varphi}}$ — функция тока нормированного вихря с интенсивностью, приходящейся на единицу проводимости слоя, равной -1 ; $\varphi_0(M, t)$ — квазипотенциал невозмущенного течения, моделирующий работу скважины в отсутствии границы Γ_t .

Пусть Γ_t задана системой точек (x_m^s, y_m^s) , $m = 0, 1, \dots, n-1$, $s = 0, 1, \dots$, в каждый момент времени t^s . Дискретную схему для (24) и (25), в отличие от [7], построим с учетом неравномерности разбиения Γ_t при $m = 0, 1, \dots, n-1$ и $s = 0, 1, \dots$:

$$g_m^s - 2\lambda \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq m}}^{n-1} g_k^s \Omega(x_m^s, y_m^s, x_k^s, y_k^s) \Delta l_k^s = 2\lambda \varphi_0^s(x_m^s, y_m^s, t^s) + \alpha x_m^s, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Omega(x_m^s, y_m^s, x_k^s, y_k^s) &= -\frac{\partial \Phi_1(x_m^s, y_m^s, x_k^s, y_k^s)}{\partial x_k^s} \left(\frac{\partial y}{\partial l} \right)_k^s + \frac{\partial \Phi_1(x_m^s, y_m^s, x_k^s, y_k^s)}{\partial y_k^s} \left(\frac{\partial x}{\partial l} \right)_k^s, \\ \mathbf{r}_m^{s+1} &= \mathbf{r}_m^s + \mathbf{v}_0(x_m^s, y_m^s, t^s) \Delta t + \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq m}}^{n-1} \mathbf{V}_2(x_m^s, y_m^s, x_k^s, y_k^s) \left(\frac{\partial g}{\partial l} \right)_k^s \Delta l_k^s \Delta t. \end{aligned} \quad (28)$$

В (27) и (28) первые производные по параметру l (длина дуги) вычисляются по формулам (см. [12])

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f(l)}{\partial l}\right)_0 &= \frac{f_1 - f_0}{h_1}, \\ \left(\frac{\partial f(l)}{\partial l}\right)_m &= \frac{h_{m+1}}{h_m + h_{m+1}} \frac{f_m - f_{m-1}}{h_m} + \frac{h_m}{h_m + h_{m+1}} \frac{f_{m+1} - f_m}{h_{m+1}}, \quad m = 1, 2, \dots, n-2, \\ \left(\frac{\partial f(l)}{\partial l}\right)_{n-1} &= \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-1}}, \\ h_m &= \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (y_m - y_{m-1})^2}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

6. Решение тестовой задачи. Пусть декартова система координат выбрана так, что ускорение свободного падения $\mathbf{g}$ направлено против оси z . Рассмотрим случай, когда поверхность раздела жидкостей σ_0 в начальный момент времени $t = 0$ моделируется плоскостью $z = 0$. Течение жидкости возмущается единичной скважиной, расположенной вертикально. Координаты концов скважины: $M_1(0, 0, 1)$ и $M_2(0, 0, 1.5)$. Для выполнения численных расчетов плоскость заменим квадратом $z = 0$, $x \in [-10, 10]$ и $y \in [-10, 10]$.

Обрыв σ_0 заставляет наложить ограничения [4] на скорость возмущения: $\mathbf{v}_*(x_M, y_M, z_M, t) = \mathbf{v}_{\min}$ для $|x_M| \in [|x_{\min}|, 10]$, $|y_M| \in [|y_{\min}|, 10]$. Здесь $x_{\min}$, $y_{\min}$ — координаты точки, в которой модуль скорости возмущения $v_*(M, t)$ уменьшается в 1000 раз при движении от центра плоскости σ_0 к ее краям вдоль одной из координатных осей Ox и Oy соответственно. Отметим, что в ходе численных расчетов $|x_{\min}| = |y_{\min}| \approx 6$.

Выберем за характерное расстояние d расстояние от плоскости σ_0 до скважины, за характерное время T_0 — время, по истечении которого поверхность раздела σ_t достигнет скважины при $\lambda = 0$ и

$$\alpha = 0: T_0 = \int_0^d \frac{dz}{v_z(0, 0, z)} = \frac{2\pi d^2(3L + 2d)}{3Lq}.$$

Таблица 1

Результаты численного счета
для $\Delta t = 0.003$

n	25	45	65	85
T_{3D}	0.753	0.729	0.711	0.699
η_1 , %	—	3.19	2.45	1.69
T_{2D}	0.777	0.738	0.717	0.702
η_2 , %	3.09	1.22	0.84	0.43

Таблица 2

Результаты численного счета
для $\Delta t = 0.0015$

n	25	45	65	85
T_{3D}	0.7485	0.7245	0.7080	0.6960
η_1 , %	—	3.21	2.28	1.69
T_{2D}	0.7725	0.7335	0.7125	0.6990
η_2 , %	3.11	1.23	0.63	0.43

Для определенности полагаем $L = d/2$, $\alpha = 0.1$ и $\lambda = 0.5$. Точность ε из (21) выберем равной $\varepsilon = 10^{-6}$.

В табл. 1 и 2 представлены результаты расчетов поставленной задачи. Табл. 1 содержит результат, полученный для шага по времени $\Delta t = 0.003$, табл. 2 — $\Delta t = 0.0015$. В этих таблицах время T_{3D} получено приведенным в данной статье методом, время T_{2D} получено методом, отмеченным в п. 5 для соответствующей осесимметричной задачи. Через n обозначено $n = n_1 - 1 = n_2 - 1$.

Величина $\eta_1 = \left| \frac{T_{3D}}{T'_{3D}} - 1 \right| 100\%$, где T_{3D} — время из текущего столбца, а T'_{3D} — время из предыдущего столбца. Видим, что с ростом n величина η_1 уменьшается, что свидетельствует о “практической сходимости” мето-

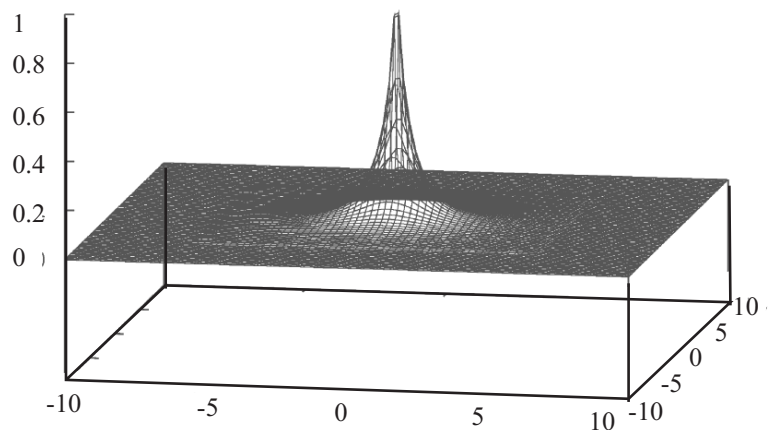


Рис. 3. Конечное положение σ_t

да [3]. Величина $\eta_2 = \left| \frac{T_{3D}}{T_{2D}} - 1 \right| 100\%$ позволяет оценить различие между значениями T_{3D} и T_{2D} . Видим, что с ростом n различие между временами T_{3D} и T_{2D} уменьшается, так как уменьшается величина η_2 .

Сравнивая табл. 1 и 2 между собой, замечаем, что при $n = 25$ уменьшение шага по времени Δt вдвое приводит к уменьшению времени T на 0.6 %, а при $n = 85$ это отличие составляет 0.43 %.

На рис. 3 приведено положение поверхности σ_t в момент времени $t = T$. Рисунок построен для $n = 86$ и $\Delta t = 0.003$.

Представленные результаты вычислялись на кластере из пяти компьютеров AMD Athlon 1.1 МГц с 224 Мб памяти и со скоростью передачи данных по сети 100 Мбит/с. Время выполнения одного шага по времени при $n = 86$ оказалось равным приблизительно трем минутам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972.
2. Данилов В.Л. Краевые задачи гидродинамической теории фильтрации и гидромеханики с подвижной границей. Дисс. ... док. физ.-мат. наук. Казань, 1962.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995.
4. Никольский Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Орел, 2001.
5. Никольский Д.Н. Вычисление скорости перемещения поверхности раздела жидкостей различной вязкости методом дискретных особенностей // Труды Межд. школ-семинаров "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". Вып. 2. Орел: ОГУ, 2003. 42–47.
6. Никольский Д.Н. Исследование работы несовершенной скважины в однородном и безграничном грунте с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости и плотности // Труды XII Межд. симпозиума "МДОЗМФ-2005". Харьков-Херсон, 2005. 239–242.
7. Никольский Д.Н., Никольская Т.А. Решение осесимметричной задачи о поднятии конуса подошвенной воды к линейной скважине в бесконечном пласте // Труды Межд. школ-семинаров "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". Вып. 3. Орел: ОГУ, 2004. 38–42.
8. Пивень В.Ф. Единственность решения граничных задач сопряжения физических процессов в неоднородной среде // Труды X Международного симпозиума "МДОЗМФ-2001". Херсон, 2001.
9. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Двумерное продвижение границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое // Труды Межд. школ-семинаров "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". Орел: ОГУ, 2002. 80–87.
10. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
11. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит, 2000.
12. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994.
14. Чарный И.А. Подземная гидромеханика. М.: Гостехиздат, 1963.
15. Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Орел, 2005.
16. Lifanov I.K., Nikolsky D.N., Piven' V.F. Mathematical modeling of the work of the system of wells in a layer with the exponential law of permeability variation and the mobile liquid interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 2002. 17, N 4. 381–391.

Поступила в редакцию
14.08.2006