

УДК 519.6, 532.546

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНТРОЛЬНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЕРЕМЕННЫХ “СКОРОСТЬ–НАСЫЩЕННОСТЬ”

Г. А. Никифоров¹

В рамках метода контрольного объема рассматривается подход к решению задач движения двухфазной жидкости в пористой среде. Приводится математическая формулировка задачи и алгоритм ее численной реализации в переменных “скорость–насыщенность”. Возможности разработанного подхода демонстрируются на модельных примерах вытеснения нефти водой из однородного и неоднородного пластов.

Ключевые слова: пористая среда, двухфазная жидкость, контрольный объем, пористые среды, численные методы, математическое моделирование.

1. Введение. Выбор метода решения задач о движении двухфазной жидкости в разрабатываемых нефтяных пластах определяется специфическими особенностями этих задач, которые связаны со сложностями строения изучаемого объекта и геометрии области течения, а также со сложностью физико-химических процессов, происходящих в пористых средах. Математическое описание таких процессов обычно приводит к краевым задачам с сильноменяющимися разрывными коэффициентами и с вырождением как уравнений, так и краевых условий [1]. Уравнения математической модели пласта почти всегда настолько сложны, что их невозможно решить аналитическими методами. Большинство практических задач решается численными методами.

Двухфазная фильтрация несмешивающихся жидкостей в пористой среде является типичным процессом конвекции–диффузии, причем в области течения можно наблюдать участки, где диффузия преобладает над конвекцией (чаще всего там, где капиллярные силы преобладают над приложенными извне), и наоборот — участки, где конвекция преобладает над диффузией. Обычно конвекция преобладает над диффузией, что необходимо учитывать при конструировании того или иного метода решения, чтобы получить физическое неосциллирующее решение.

В последнее время широкое распространение при решении задач механики сплошных сред, особенно за рубежом, получил метод контрольных объемов (Control-Volume Method) и различные его модификации. Основа метода заключается в том, что область течения разбивается на множество ячеек (контрольных или конечных объемов — “Control Volume” или “Finite Volume”) с последующим интегрированием законов сохранения по объему ячейки [2, 3]. Далее интегралы по границе контрольного объема заменяются конечными суммами, а при вычислении интегралов по объему ячейки используется теорема о среднем, где в качестве среднего берется сеточное значение в центре ячейки. По своей сути метод контрольных объемов совпадает с известным в отечественной литературе интегро-интерполяционным методом [4].

Для предупреждения “нефизических” осцилляций в решении при интегрировании членов уравнений, характеризующих конвективный перенос, учитывается направление потока, т.е. обычно выполняется приближенное интегрирование с применением теоремы о среднем, где коэффициент при производной вычисляется “вверх по потоку” [5, 6].

Целью настоящей работы является разработка метода численного решения задачи двухфазной фильтрации в переменных “скорость–насыщенность” на основе метода контрольных объемов.

2. Постановка задачи. Рассматривается двухфазная изотермическая фильтрация несжимаемых несмешивающихся жидкостей в неоднородном недеформируемом нефтяном пласте проницаемости k [7, 8]. Полагается, что динамические вязкости фаз постоянны, течение жидкостей медленное (т.е. насыщенности фаз меняются квазиравновесным образом) и происходит без фазовых переходов, а функции относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления являются известными и однозначными функциями насыщенности.

С учетом капиллярных и гравитационных сил законы фильтрации для двух фаз можно записать в виде уравнений неразрывности (1), (2) и уравнений движения (3), (4); разность давлений в фазах

¹ Казанский государственный университет, механико-математический факультет, ул. Кремлевская, 18, 420008, Казань; e-mail: nikiforov@mail.knc.ru

принимается равной капиллярному давлению (5), а насыщенности фаз удовлетворяют условию (6):

$$m \frac{\partial S_o}{\partial t} + \text{div}(U_o) = 0, \tag{1}$$

$$m \frac{\partial S_w}{\partial t} + \text{div}(U_w) = 0, \tag{2}$$

$$U_o = -k \frac{f_o}{\mu_o} \text{grad}(P_o - \rho_o g z), \tag{3}$$

$$U_w = -k \frac{f_w}{\mu_w} \text{grad}(P_w - \rho_w g z), \tag{4}$$

$$P_o - P_w = P_c, \tag{5}$$

$$S_o + S_w = 1. \tag{6}$$

В этих уравнениях индексом “o” помечены величины, характеризующие нефть, а индексом “w” — воду; $k = k(x, y, z)$ — абсолютная проницаемость пласта; $f_i = f_i(S)$ — функция относительной фазовой проницаемости; m — пористость пласта; μ_i — динамическая вязкость; $P_c = \chi \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} J(S)$ — капиллярное давление, где χ — коэффициент поверхностного натяжения, θ — краевой угол смачиваемости, $J(S)$ — безразмерная функция Леверетта [7] (здесь и далее $S = S_w$).

Введем суммарную скорость фильтрации

$$U = U_o + U_w. \tag{7}$$

Комбинируя (1) и (2) и учитывая (6) и (7), получим

$$\text{div}(U) = 0. \tag{8}$$

Обозначим $\Delta\rho = \rho_w - \rho_o$, $P_k = \Delta\rho g z - P_c$, $K_o = k \frac{f_o}{\mu_o}$, $K_w = k \frac{f_w}{\mu_w}$, $K = K_o + K_w$, $F_{ow} = K_o \frac{K_w}{K}$ и $F = \frac{K_w}{K}$ — функция Баклея–Леверетта [7]. Типичный вид зависимостей f_o , f_w и F от водонасыщенности показан на рис. 1. Обычно функции относительных фазовых проницаемостей хорошо аппроксимируются степенными зависимостями.

Связь суммарной скорости фильтрации с давлением в нефти может быть получена из (3–5) и (7):

$$U = -K \text{grad}(P_o - \rho_o g z) + K_w \text{grad}(P_k).$$

Поделив все на K и применив к результату операцию $\text{rot}(E)$, получим

$$\text{rot}\left(\frac{U}{K}\right) = \text{rot}(F \text{grad}(P_k)). \tag{9}$$

С учетом введенных обозначений уравнение (2) можно переписать в виде

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div}[FU + F_{ow} \text{grad}(P_k)] = 0. \tag{10}$$

Таким образом, для определения поля скоростей фильтрации и водонасыщенности пласта будем иметь следующую систему уравнений [9]:

$$\text{div}(U) = 0, \tag{11}$$

$$\text{rot}\left(\frac{U}{K}\right) = \text{rot}(F \text{grad}(P_k)), \tag{12}$$

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div}[FU + F_{ow} \text{grad}(P_k)] = 0. \tag{13}$$

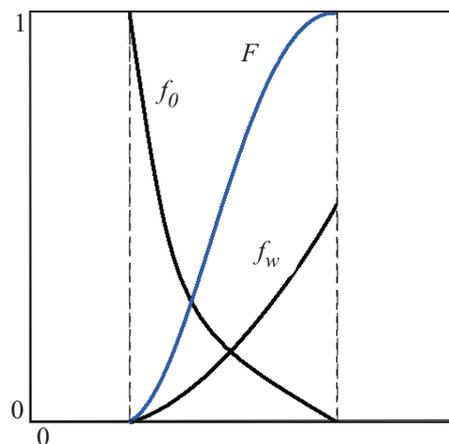


Рис. 1. Характерные зависимости

Если капиллярные и гравитационные силы не учитывать, то система примет вид:

$$\operatorname{div}(U) = 0, \tag{14}$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{U}{K}\right) = 0, \tag{15}$$

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(FU) = 0. \tag{16}$$

3. Метод численного решения. Для решения сформулированной задачи применим метод контрольных объемов на разнесенной сетке. Область течения покроем прямоугольной сеткой с шагом Δx по оси X и с шагом Δy по оси Y . Фрагмент сетки изображен на рис. 2.

3.1. Аппроксимация уравнений для скорости. Для уравнения (14) контрольные объемы Ω_i выберем совпадающими с ячейками сетки, а для уравнения (15) контрольный объем G_j сместим на полшага по каждой оси. Искомые значения скорости свяжем с полуузлами сетки.

В качестве искомых величин выберем нормальные составляющие скорости фильтрации в серединах сторон ячеек. В соответствии с методом контрольных объемов проинтегрируем (14) по объему Ω_i ($1 \leq i \leq I$, где I — число ячеек сетки) [10]: $\iint_{\Omega_i} \operatorname{div} U \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_i} U_n \, d\gamma = 0$, а уравнение (15) — по объему G_j ($1 \leq j \leq J$, где J — число внутренних узлов сетки):

$$\iint_{G_j} \operatorname{rot} \frac{U}{K} \, dS = \int_{\partial G_j} \left(\frac{U_\tau}{K}\right) \, dl = 0.$$

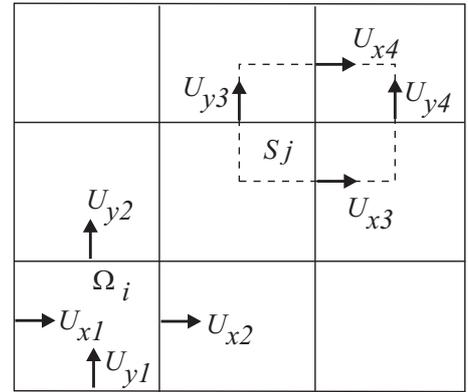


Рис. 2. Фрагмент сетки

Учитывая, что нормаль к вертикальной стороне ячейки совпадает по направлению с направлением оси X , а нормаль к горизонтальной стороне ячейки — с направлением оси Y , получим

$$\int_{\partial\Omega_i} U_n \, d\gamma = \int_{\partial\Omega_i} U_x \, dy - U_y \, dx = (U_{x2} - U_{x1}) \Delta y + (U_{y2} - U_{y1}) \Delta x = 0, \tag{17}$$

$$\int_{\partial G_j} \frac{U_\tau}{K} \, dl = \left(\frac{U_{x3}}{K_3} - \frac{U_{x4}}{K_4}\right) \Delta x + \left(\frac{U_{y4}}{K_4} - \frac{U_{y3}}{K_3}\right) \Delta y = 0. \tag{18}$$

Для множества искомых значений компонент скорости фильтрации U_{xi} и U_{yj} в серединах сторон ячеек получим систему линейных алгебраических уравнений, которая должна быть дополнена граничными условиями: $U_{xi}|_{\partial\Omega_i} = q_{xi}$, $U_{yj}|_{\partial\Omega_j} = q_{yj}$. Заметим, что итоговое количество уравнений на одно больше, чем количество искомых значений скорости. Поэтому одно из уравнений системы линейных алгебраических уравнений может быть отброшено.

3.2. Аппроксимация уравнения для насыщенности. Искомые значения насыщенности свяжем с центрами ячеек. К уравнению для насыщенности (16) также применим метод контрольных объемов. В качестве контрольного объема возьмем Ω_i с границей γ_i (тот же, что и для уравнения (14)) и, согласно методу, проинтегрируем (16) по Ω_i : $\int_{\Omega_i} m \frac{\partial s}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\Omega_i} [\operatorname{div}(FU)] \, d\Omega = 0$. После интегрирования по частям получим

$$\int_{\Omega_i} m \frac{\partial s}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_i} F U_n \, d\gamma = 0. \tag{19}$$

Используя теорему о среднем и аппроксимацию “вверх по потоку”, получим

$$m_i \frac{dS_i}{dt} |\Omega_i| + \sum_l F_{il}^{up} \int_{\Gamma_{\Omega_i}} (U_x dy - U_y dx) = 0.$$

Здесь l — номер отрезка границы. Заменяя производную по времени ее разностным аналогом и используя явную схему по времени, получим

$$m_i \frac{S_i^{\tau+1} - S_i^\tau}{\Delta t} |\Omega_i| + \sum_l F_{il}^{up\tau} \int_{\Gamma_{\Omega_i}} (U_x dy - U_y dx)^\tau = 0,$$

или

$$S_i^{\tau+1} = S_i^\tau - \frac{\Delta t}{m_i |\Omega_i|} \sum_l F_{il}^{up\tau} (U_{xl}^\tau \Delta y - U_{yl}^\tau \Delta x). \tag{20}$$

4. Численные результаты. Рассмотрим модельную задачу. Пусть задан прямоугольный фрагмент пласта размерами 20×20 м (рис. 3) с двумя противоположно лежащими непроницаемыми сторонами. Две другие стороны наполовину проницаемые, их непроницаемые половины расположены в противоположных частях этих границ. Внутри области течения имеется неоднородное включение. Проницаемость во включении в 10 раз меньше, чем в остальной части пласта: $k_1 = 0.05$ Дарси, $k_2 = 0.5$ Дарси. Вязкость $\mu = 1$ спз. Пусть через нижнюю левую половину сечения пласта поступает жидкость со скоростью $U = 1$ м/сутки, и с такой же скоростью жидкость вытекает из верхней правой половины сечения пласта.

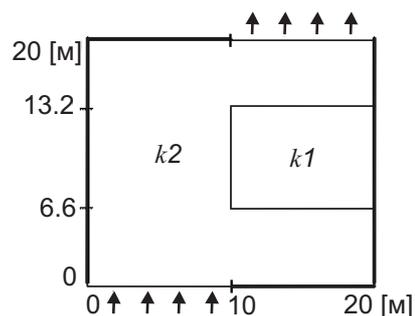


Рис. 3. Фрагмент пласта

На рис. 4 приведены результаты расчетов для однородного пласта ($k_1 = k_2 = 0.5$ Дарси). Фрагменты рисунка соответствуют моментам времени $t_1 = 2$, $t_2 = 4$ суткам. Справа для этих моментов времени показано поле скоростей, слева — распределение водонасыщенности в пласте. Видно, что поле скоростей во всей области течения, за исключением под областей в окрестности левого верхнего и правого нижнего углов, близко к равномерно распределенному. По распределению насыщенности также видно, что практически весь пласт охвачен заводнением.

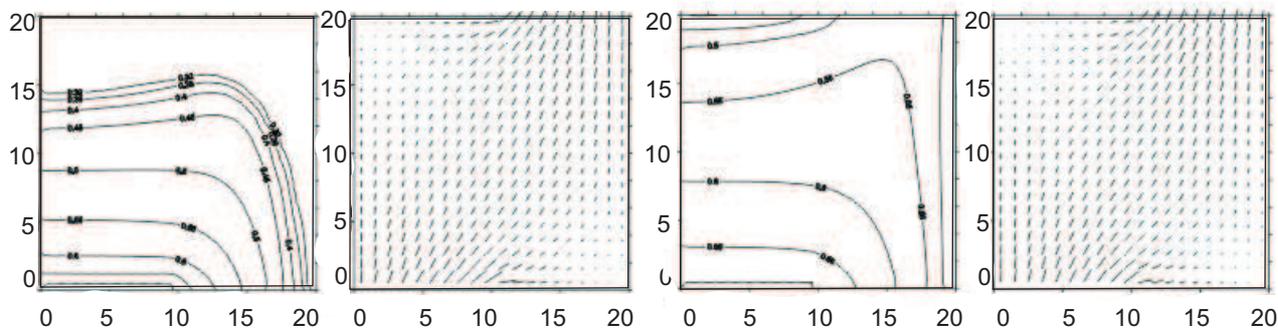


Рис. 4. Однородный пласт

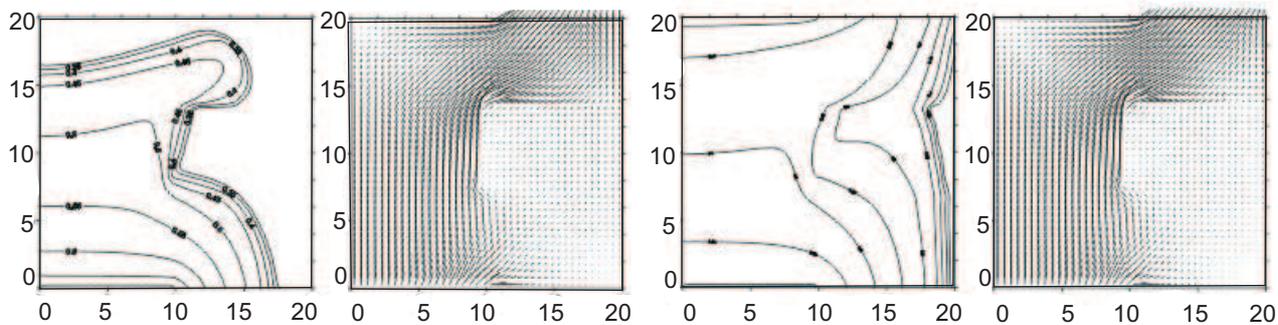


Рис. 5. Неоднородный пласт

В случае кусочно-однородного пласта (рис. 5) картина течения существенно отличается. В области пониженной проницаемости наблюдается медленное движение жидкости (см. поле скоростей для тех же

моментов времени), а по распределению насыщенности можно видеть, что в этой области остается часть пласта, не охваченная процессом вытеснения.

5. Основные результаты. Разработан метод численного решения задачи о движении двухфазной жидкости в пористой среде в переменных “скорость–насыщенность”. Реализован метод контрольных объемов на разнесенной прямоугольной сетке. Работоспособность метода показана на модельном примере для прямоугольных фрагментов однородного и кусочно-однородного пластов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коновалов А.Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988.
2. *Li B., Chen Z., Huan G.* Control volume function approximation methods and their applications to modeling porous media flow // *Advances in Water Resources*. 2003. **26**. 435–444.
3. *Taniguchi N., Kobayashi T.* Finite volume method on the unstructured grid system // *Computers & Fluids*. 1991. **19**, N 3/4. 287–295.
4. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
5. *Флетчер Р.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
6. *Fung L.S.-K., Hiebert A.D., Nghiem L.X.* Reservoir simulation with a control-volume finite-element method // *SPE Reservoir Engineering*. 1992. Aug. 349–357.
7. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
8. *Булыгин В.Я.* Гидромеханика нефтяного пласта. М.: Недра, 1974.
9. *Нижифоров А.И.* Об уравнениях двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей // Численные методы решения задач фильтрации и оптимизации нефтедобычи. Казань, 1990. 75–78.
10. *Choudhury S., Nicolaidis R.A.* Discretization of incompressible vorticity–velocity equations on triangular meshes // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1990. **11**. 823–833.

Поступила в редакцию
01.06.2005
