

УДК 519.6:519.853.6

МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАВНОВЕСНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. С. Антипин¹, Ф. П. Васильев², А. С. Стукалов², М. Ячимович³

Для решения неустойчивых равновесных задач в случае неточно заданной целевой функции предлагается регуляризованный метод Ньютона, исследуется его сходимость и строится регуляризующий оператор. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00242), Министерства образования и науки РФ (код проекта РНП 2.1.1.1714) и Программы ведущих научных школ (код проекта НШ-2240.2006.1).

Ключевые слова: равновесное программирование, регуляризация, метод Ньютона.

1. Пусть W — заданное множество из гильбертова пространства H со скалярным произведением $\langle u, v \rangle$ элементов $u, v \in H$, функция $\Phi(v, w)$ определена при $v \in W, w \in W$. Рассмотрим следующую задачу *равновесного программирования*: найти точку v_* из условий

$$v_* \in W, \quad \Phi(v_*, v_*) \leq \Phi(v_*, w) \quad \forall w \in W. \quad (1)$$

Точку v_* со свойствами (1) будем называть *точкой равновесия* функции $\Phi(v, w)$ на множестве W .

Многие важные проблемы исследования операций, вычислительной математики и математической экономики сводятся к задаче (1) [1–5]. Эта задача неустойчива к возмущениям входных данных в $\Phi(v, w)$, и для надежного определения приближенного решения необходимо пользоваться идеями и методами регуляризации [6–9]. В работах [10–14] предложены и исследованы общие методы регуляризации (методы стабилизации, невязки, квазирешений) для неустойчивых равновесных задач. Метод стабилизации в сочетании с экстраградиентным методом рассматривался в [15, 16] для задач (1) с точно заданным множеством, а в [17] — с неточно заданным множеством. В настоящей работе предлагается и исследуется регуляризованный метод Ньютона в предположении, что целевая функция $\Phi(v, w)$ известна приближенно.

В качестве стабилизатора, как и в [15, 17], возьмем скалярное произведение $\Omega(v, w) = \langle v, w \rangle$. Введем функцию Тихонова

$$T_k(v, w) = \Phi(v, w) + \alpha_k \langle v, w \rangle, \quad v, w \in W, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Пусть функция $\Phi(v, w)$ обладает следующими производными Фреше

$$\frac{\partial \Phi(v, w)}{\partial w}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial w^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial v \partial w}, \quad v, w \in W. \quad (3)$$

Введем операторы

$$\nabla_w \Phi(v, v) = \left. \frac{\partial \Phi(v, w)}{\partial w} \right|_{w=v}, \quad \square \Phi(v, v) = \left. \left(\frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial v \partial w} \right) \right|_{w=v}, \quad v \in W. \quad (4)$$

Тогда функция Тихонова (2) имеет производные

$$\frac{\partial T_k(v, w)}{\partial w} = \frac{\partial \Phi(v, w)}{\partial w} + \alpha_k v, \quad \frac{\partial^2 T_k(v, w)}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial w^2}, \quad \frac{\partial^2 T_k(v, w)}{\partial v \partial w} = \frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial v \partial w} + \alpha_k I, \quad (5)$$

где I — единичный оператор. Аналогично (4), можно ввести операторы

$$\nabla_w T_k(v, v) = \nabla_w \Phi(v, v) + \alpha_k v, \quad \square T_k(v, v) = \square \Phi(v, v) + \alpha_k I. \quad (6)$$

¹ Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, ул. Вавилова, 40, 117967, Москва; e-mail: antipin@ccas.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992, Москва; e-mail: ast@pochta.ru

³ Университет Черногории, факультет естественных наук и математики, 81000, Подгорица, Черногория; e-mail: jachimovicm@cg.yu

Пусть z_k — точка равновесия функции $T_k(v, w)$ на множестве W , т.е.

$$z_k \in W, \quad T_k(z_k, z_k) \leq T_k(z_k, w) \quad \forall w \in W. \quad (7)$$

Если W — выпуклое множество, то точка z_k необходимо удовлетворяет условию (см. [9])

$$\langle \nabla_w T_k(z_k, z_k), w - z_k \rangle \geq 0 \quad \forall w \in W. \quad (8)$$

Иначе говоря, z_k является решением вариационного неравенства

$$\langle F_k(z), w - z \rangle \geq 0 \quad \forall w \in W, \quad (9)$$

где $F_k(z) = \nabla_w T_k(z, z)$. Для поиска решения вариационного неравенства (9) можно воспользоваться методом Ньютона, который заключается в построении последовательности x_k по правилу [8, 18]: имея k -е приближение x_k , в качестве следующего приближения берется решение $z = x_{k+1}$ вариационного неравенства

$$\langle F_k(x_k) + F'_k(x_k)(z - x_k), w - z \rangle \geq 0 \quad \forall w \in W, \quad (10)$$

где $F'_k(z)$ — производная Фреше отображения $F_k(z)$. Заметим, что в отличие от вариационного неравенства (9) с оператором $F_k(z)$, который вообще говоря, нелинейный, в (10) оператор $F_k(x_k) + F'_k(x_k)(z - x_k)$ уже является линейным по z . Поскольку для $F_k(z) = \nabla_w T_k(z, z)$ производная $F'_k(z) = \square T_k(z, z)$, то применительно к (8) вариационное неравенство (10) будет иметь вид

$$\langle \nabla_w T_k(x_k, x_k) + \square T_k(x_k, x_k)(z - x_k), w - z \rangle \geq 0 \quad \forall w \in W. \quad (11)$$

Предположим, что вместо точных значений производных (3) и операторов (4) нам известны их приближения при $k = 0, 1, \dots$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \Phi(v, w)}{\partial w} \right)_k, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial w^2} \right)_k, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial v \partial w} \right)_k, \\ & (\nabla_w \Phi(v, w))_k = \left(\frac{\partial \Phi(v, w)}{\partial w} \right)_k, \quad (\square \Phi(v, w))_k = \left(\frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial w^2} \right)_k + \left(\frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial v \partial w} \right)_k, \end{aligned} \quad (12)$$

такие, что

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\frac{\partial \Phi(v, v)}{\partial w} \right)_k - \frac{\partial \Phi(v, v)}{\partial w} \right\| \leq \delta_{1k}(1 + \|v\|), \quad v \in W, \quad k = 0, 1, \dots, \\ & \left\| (\square \Phi(v, v))_k - \square \Phi(v, v) \right\| \leq \delta_{2k}, \quad v \in W, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\delta_{1k} \geq 0$, $\delta_{2k} \geq 0$ — параметры погрешности. Тогда в качестве приближений для значений производных (5) при $v, w \in W$ и $k = 0, 1, \dots$ естественно взять

$$\frac{\partial t_k(v, w)}{\partial w} = \left(\frac{\partial \Phi(v, w)}{\partial w} \right)_k + \alpha_k v, \quad \frac{\partial^2 t_k(v, w)}{\partial w^2} = \left(\frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial w^2} \right)_k, \quad \frac{\partial^2 t_k(v, w)}{\partial v \partial w} = \left(\frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial v \partial w} \right)_k + \alpha_k I, \quad (14)$$

а приближения значений операторов (6) будут иметь вид

$$\nabla_w t_k(v, v) = \frac{\partial t_k(v, v)}{\partial w}, \quad \square t_k(v, v) = (\square \Phi(v, v))_k + \alpha_k I, \quad k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Из (5), (6), (12)–(15) следует, что

$$\|\nabla_w t_k(v, v) - \nabla_w T_k(v, v)\| \leq \delta_{1k}(1 + \|v\|), \quad \|\square t_k(v, v) - \square T_k(v, v)\| \leq \delta_{2k}, \quad v \in W, \quad k = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Теперь мы можем описать регуляризованный метод Ньютона для решения задачи (1) с неточными входными данными (12)–(15). Пусть $v_0 \in W$ — начальное приближение. Пусть при некотором $k \geq 0$ уже известно приближение $v_k \in W$. Следующее приближение $v_{k+1} \in W$ определим из условия

$$\|v_{k+1} - \tilde{v}_{k+1}\| \leq \varepsilon_k(1 + \|v_k\|), \quad (17)$$

где $\tilde{v}_{k+1} \in W$ — решение вариационного неравенства

$$\langle \nabla_w t_k(v_k, v_k) + \square t_k(v_k, v_k)(z - v_k), w - z \rangle \geq 0 \quad \forall w \in W, \quad (18)$$

выписанного по аналогии с (11). Условие (17) означает, что вариационное неравенство (18) мы можем решать приближенно; вместо его точного решения $z = \tilde{v}_{k+1}$ возьмем какую-либо точку $v_{k+1} \in W$, удовлетворяющую неравенству (17), где $\varepsilon_k \geq 0$ — характеристика возникающей при этом погрешности.

Заметим, что если $W = H$, то вариационное неравенство (18) равносильно операторному уравнению

$$(\square t_k(v_k, v_k))(z - v_k) = -\nabla_w t_k(v_k, v_k).$$

Отсюда в случае существования обратного оператора $(\square t_k(v_k, v_k))^{-1}$ вытекает “привычное” явное выражение для $(k+1)$ -го приближения метода Ньютона:

$$v_{k+1} = v_k - (\square t_k(v_k, v_k))^{-1} \nabla_w t_k(v_k, v_k),$$

соответствующее случаю $\varepsilon_k = 0$ в (17) (ср. с [9]).

2. Формальное описание регуляризованного метода Ньютона закончено. Исследуем его сходимость.

Теорема 1. Пусть

1) W — выпуклое замкнутое множество из H , $\text{int } W \neq \emptyset$; функция $\Phi(v, w)$ определена, непрерывна, обладает непрерывными производными (3), выпукла по переменной w на W при любом фиксированном $v \in W$ и выполнено условие Литшица

$$\|\square \Phi(v, v) - \square \Phi(w, w)\| \leq L \|v - w\| \quad \forall v, w \in W; \quad (19)$$

функция $\Phi(v, w)$ положительно полуопределена (кососимметрична) [5], т.е.

$$\Phi(v, v) - \Phi(v, w) - \Phi(w, v) + \Phi(w, w) \geq 0 \quad \forall v, w \in W; \quad (20)$$

множество W_* решений задачи (1) не пусто, v_* — нормальное решение этой задачи, т.е.

$$v_* \in W_*, \quad \|v_*\| = \inf_{v \in W_*} \|v\|; \quad (21)$$

2) вместо точных производных (3) известны их приближения (12), удовлетворяющие условиям (13);

3) числовые последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$, $\{\delta_{1k}\}$, $\{\delta_{2k}\}$ положительны и таковы, что

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \leq 2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + \varepsilon_k + \delta_{1k} + \delta_{2k}) = 0; \quad (22)$$

$$\frac{4\delta_{1k} + 5\delta_{2k}}{\alpha_k} + 2\varepsilon_k + \frac{8L}{\alpha_k} (1 + \|v_*\|) \left(\varepsilon_k + \frac{2\delta_{1k}}{\alpha_k} \right) + 8L \|v_*\| \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k^2} \leq \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (23)$$

4) начальное приближение $v_0 \in W$, если точка $z_0 \in W$ взята из (7) при $k = 0$, таково, что

$$\|v_0 - z_0\| \leq \frac{1}{4L} \alpha_0. \quad (24)$$

Тогда метод (17), (18) определяет последовательность $\{v_k\}$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - v_*\| = 0, \quad (25)$$

причем сходимость в (25) равномерна относительно выбора $\left(\frac{\partial \Phi(v, v)}{\partial w} \right)_k$, $(\square \Phi(v, v))_k$ из (13).

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть W — выпуклое замкнутое множество из H , функция $\Phi(v, w)$ непрерывна по v на W при каждом $w \in W$, полунепрерывна снизу по совокупности своих аргументов на $W \times W$, выпукла и дифференцируема по переменной w на W при каждом фиксированном $v \in W$, производная $\nabla_w \Phi(v, v) = \frac{\partial \Phi(v, w)}{\partial w} \Big|_{w=v}$ непрерывна по $v \in W$, выполнено условие положительной полуопределенности (20). Пусть множество W_* решений задачи (1) не пусто. Тогда W_* — выпуклое замкнутое множество и существует единственная точка v_* со свойством (21).

Лемма 2. Пусть выполнено условие 1 теоремы 1, последовательность $\{\alpha_k\}$ удовлетворяет условиям (22). Тогда точки z_k , удовлетворяющие условиям (7), существуют, определяются однозначно при каждом $k = 0, 1, \dots$ и таковы, что

$$\|z_k\| \leq \|v_*\|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (26)$$

$$\|z_k - z_m\| \leq \frac{|\alpha_k - \alpha_m|}{\alpha_k} \|v_*\|, \quad k, m = 0, 1, \dots, \quad (27)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - v_*\| = 0. \quad (28)$$

Доказательство лемм 1 и 2 представлено в [16].

Доказательство теоремы 1. Из выпуклости и дифференцируемости функции $\Phi(v, w)$ по $w \in W$ следует [9]

$$\Phi(v, v) - \Phi(v, w) \leq \langle \nabla_w \Phi(v, v), v - w \rangle \quad \forall v, w \in W.$$

Поменяем здесь v и w местами, тогда

$$\Phi(w, w) - \Phi(w, v) \leq \langle \nabla_w \Phi(w, w), w - v \rangle \quad \forall v, w \in W.$$

Сложим эти два неравенства. С учетом условия (20) получим

$$0 \leq \langle \nabla_w \Phi(v, v) - \nabla_w \Phi(w, w), v - w \rangle \quad \forall v, w \in W. \quad (29)$$

Покажем, что при сделанных в теореме 1 предположениях функция $T_k(v, w)$ удовлетворяет условию

$$\langle \square T_k(v, v) h, h \rangle \geq \alpha_k \|h\|^2 \quad \forall v \in W, \quad h \in H, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (30)$$

Сначала рассмотрим случай $v \in \text{int } W$. Тогда точка $w_\alpha = v + \alpha h$ принадлежит $W \quad \forall \alpha : 0 < \alpha < \alpha_0 = \alpha_0(h)$.

В (29) заменим w на $w_\alpha = v + \alpha h$. С учетом определения производных $\frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial w^2}$, $\frac{\partial^2 \Phi(v, w)}{\partial v \partial w}$ получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \nabla_w \Phi(v, v) - \nabla_w \Phi(w_\alpha, w_\alpha), v - w_\alpha \rangle = \\ &= \langle \nabla_w \Phi(v, v) - \nabla_w \Phi(v, w_\alpha) + \nabla_w \Phi(v, w_\alpha) - \nabla_w \Phi(w_\alpha, w_\alpha), v - w_\alpha \rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 \Phi(v, w_\alpha)}{\partial w^2} (v - w_\alpha) + \bar{o}(\|v - w_\alpha\|) + \frac{\partial^2 \Phi(w_\alpha, w_\alpha)}{\partial v \partial w} (v - w_\alpha) + \bar{o}(\|v - w_\alpha\|), v - w_\alpha \right\rangle = \\ &= \left\langle \alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi(v, w_\alpha)}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 \Phi(w_\alpha, w_\alpha)}{\partial v \partial w} \right) h + \bar{o}(\alpha), \alpha h \right\rangle. \end{aligned}$$

Разделим эти неравенства на $\alpha^2 > 0$ и устремим $\alpha \rightarrow +0$. Отсюда и из непрерывности производных (3) следует

$$0 \leq \langle \square \Phi(v, v) h, h \rangle \quad \forall v \in \text{int } W, \quad h \in H. \quad (31)$$

Если v — граничная точка множества W , то существует последовательность $v_n \in \text{int } W$, такая, что $\|v_n - v\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ [9]. Тогда в силу (31) имеем $\langle \square \Phi(v_n, v_n) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in H, n = 0, 1, \dots$. Отсюда при $n \rightarrow \infty$ получим $\langle \square \Phi(v, v) h, h \rangle \geq 0$ и для граничных точек множества W .

Из формул (6) и неравенства (31) следует

$$\langle \square T_k(v, v) h, h \rangle \geq \alpha_k \|h\|^2 \quad \forall v \in W, \quad h \in H, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (32)$$

Далее с учетом неравенства $\delta_{2k} \leq \frac{1}{2} \alpha_k$, вытекающего из (23), а также условий на погрешность (16) и из (31) имеем $\forall v \in W, h \in H, k = 0, 1, \dots$

$$\langle \square t_k(v, v) h, h \rangle = \langle \square T_k(v, v) h, h \rangle + \langle (\square t_k(v, v) - \square T_k(v, v)) h, h \rangle \geq \alpha_k \|h\|^2 - \delta_{2k} \|h\|^2 \geq \frac{1}{2} \alpha_k \|h\|^2. \quad (33)$$

Условие (33) означает, что оператор

$$G_k(z) = \nabla_w t_k(v_k, v_k) + \square t_k(v_k, v_k)(z - v_k)$$

при каждом $k = 0, 1, \dots$ сильно монотонный. Кроме того, $G_k(z)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|G_k(z + \Delta z) - G_k(z)\| \leq \|\square t_k(v_k, v_k)\| \|\Delta z\| \quad \forall z : z + \Delta z \in W.$$

Отсюда следует, что вариационное неравенство (18) с таким оператором $G_k(z)$ имеет, притом единственное, решение $z = \tilde{v}_{k+1}$ [19, теорема 3.2]. Существование точки v_{k+1} , удовлетворяющей условиям (17), (18), установлено.

Наряду с (18) рассмотрим вариационное неравенство

$$\langle \nabla_w T_k(v_k, v_k) + \square T_k(v_k, v_k)(z - v_k), w - z \rangle \geq 0 \quad \forall w \in W, \quad (34)$$

аналогичное (18) и составленное с помощью точной функции $T_k(v, w)$. Существование и единственность решения $z = u_{k+1}$ этого неравенства опирается на оценку (32) и доказывается так же, как для (18).

Положим в (8) $w = u_{k+1}$, в (34) — $z = u_{k+1}$, $w = z_k$:

$$\langle \nabla_w T_k(z_k, z_k), u_{k+1} - z_k \rangle \geq 0, \quad \langle \nabla_w T_k(v_k, v_k) + \square T_k(v_k, v_k)(u_{k+1} - v_k), z_k - u_{k+1} \rangle \geq 0.$$

Сложим эти два неравенства и после простых преобразований получим для $k = 0, 1, \dots$

$$\langle \square T_k(v_k, v_k)(u_{k+1} - z_k), u_{k+1} - z_k \rangle \leq \langle \square T_k(v_k, v_k)(z_k - v_k) + \nabla_w T_k(v_k, v_k) - \nabla_w T_k(z_k, z_k), z_k - u_{k+1} \rangle.$$

Отсюда с учетом неравенства (32) имеем

$$\alpha_k \|u_{k+1} - z_k\|^2 \leq \|\square T_k(v_k, v_k)(z_k - v_k) + \nabla_w T_k(v_k, v_k) - \nabla_w T_k(z_k, z_k)\| \|z_k - u_{k+1}\|. \quad (35)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \|\square T_k(v_k, v_k)(z_k - v_k) + \nabla_w T_k(v_k, v_k) - \nabla_w T_k(z_k, z_k)\| = \\ &= \left\| \square T_k(v_k, v_k)(z_k - v_k) + \int_0^1 \square T_k(z_k + t(v_k - z_k), z_k + t(v_k - z_k))(v_k - z_k) dt \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|\square T_k(v_k, v_k) - \square T_k(z_k + t(v_k - z_k), z_k + t(v_k - z_k))\| \|v_k - z_k\| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 (L + \alpha_k) \|v_k - z_k\|^2 (1 - t) dt = L \|z_k - v_k\|^2; \end{aligned} \quad (36)$$

здесь мы воспользовались формулой (6) и условиями Липшица (19). С помощью оценки (36) из (35) получим

$$\|u_{k+1} - z_k\| \leq \frac{L}{\alpha_k} \|v_k - z_k\|^2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (37)$$

Далее, положим в (18) $z = \tilde{v}_{k+1}$, $w = u_{k+1}$, в (34) — $z = u_{k+1}$, $w = \tilde{v}_{k+1}$:

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_w t_k(v_k, v_k) + \square t_k(v_k, v_k)(\tilde{v}_{k+1} - v_k), u_{k+1} - \tilde{v}_{k+1} \rangle \geq 0, \\ & \langle \nabla_w T_k(v_k, v_k) + \square T_k(v_k, v_k)(u_{k+1} - v_k), \tilde{v}_{k+1} - u_{k+1} \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Сложим эти два неравенства. Имеем

$$\begin{aligned} & \langle \square T_k(v_k, v_k)(u_{k+1} - \tilde{v}_{k+1}), u_{k+1} - \tilde{v}_{k+1} \rangle \leq \\ & \leq \left\langle (\square t_k(v_k, v_k) - \square T_k(v_k, v_k))(\tilde{v}_{k+1} - v_k) + \nabla_w t_k(v_k, v_k) - \nabla_w T_k(v_k, v_k), u_{k+1} - \tilde{v}_{k+1} \right\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом условий (16) на погрешность и оценки (32) получим

$$\alpha_k \|u_{k+1} - \tilde{v}_{k+1}\|^2 \leq \left(\delta_{2k} \|\tilde{v}_{k+1} - v_k\| + \delta_{1k}(1 + \|v_k\|) \right) \|u_{k+1} - \tilde{v}_{k+1}\|,$$

или

$$\alpha_k \|u_{k+1} - \tilde{v}_{k+1}\| \leq \delta_{2k} (\|\tilde{v}_{k+1} - u_{k+1}\| + \|u_{k+1} - z_k\| + \|z_k - v_k\|) + \delta_{1k} (1 + \|v_k - z_k\| + \|z_k\|),$$

или

$$(\alpha_k - \delta_{2k}) \|u_{k+1} - \tilde{v}_{k+1}\| \leq \delta_{2k} (\|u_{k+1} - z_k\| + \|z_k - v_k\|) + \delta_{1k} (1 + \|v_k - z_k\| + \|z_k\|). \quad (38)$$

Поскольку $\alpha_k - \delta_{2k} \geq \frac{1}{2} \alpha_k$ в силу (23) и $\|z_k\| \leq \|v_*\|$ в силу (26), то из (38) следует

$$\|u_{k+1} - \tilde{v}_{k+1}\| \leq \frac{2\delta_{2k}}{\alpha_k} (\|u_{k+1} - z_k\| + \|v_k - z_k\|) + \frac{2\delta_{1k}}{\alpha_k} (\|v_k - z_k\| + (1 + \|v_*\|)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (39)$$

Опираясь на полученные оценки (37) и (39), докажем по индукции, что

$$\|v_k - z_k\| \leq \frac{1}{4L} \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (40)$$

При $k = 0$ эта оценка верна согласно (24). Пусть оценка (40) справедлива при некотором $k \geq 0$. Тогда с помощью неравенств (17), (39) получим

$$\begin{aligned} \|v_{k+1} - z_{k+1}\| &\leq \|v_{k+1} - \tilde{v}_{k+1}\| + \|\tilde{v}_{k+1} - u_{k+1}\| + \|u_{k+1} - z_k\| + \|z_k - z_{k+1}\| \leq \\ &\leq \varepsilon_k (1 + \|v_k - z_k\| + \|z_k\|) + \frac{2\delta_{2k}}{\alpha_k} (\|u_{k+1} - z_k\| + \|v_k - z_k\|) + \\ &+ \frac{2\delta_{1k}}{\alpha_k} (\|v_k - z_k\| + (1 + \|v_*\|)) + \|u_{k+1} - z_k\| + \|z_k - z_{k+1}\| = \left(\frac{2\delta_{2k}}{\alpha_k} + 1 \right) \|u_{k+1} - z_k\| + \\ &+ \left(\varepsilon_k + \frac{2\delta_{1k}}{\alpha_k} + \frac{2\delta_{2k}}{\alpha_k} \right) \|v_k - z_k\| + \left(\varepsilon_k + \frac{2\delta_{1k}}{\alpha_k} \right) (1 + \|v_*\|) + \|z_k - z_{k+1}\|. \end{aligned}$$

Отсюда и из предположения индукции (40), оценок (27), (37) и условий (22), (23) на параметры метода (17), (18) следует

$$\begin{aligned} \|v_{k+1} - z_{k+1}\| &\leq \frac{1}{4L} \alpha_k \left[\left(\frac{2\delta_{2k}}{\alpha_k} + 1 \right) \frac{L}{\alpha_k} \frac{1}{4L} \alpha_k + \varepsilon_k + \frac{2\delta_{1k}}{\alpha_k} + \frac{2\delta_{2k}}{\alpha_k} + 4L \frac{1}{\alpha_k} \left(\varepsilon_k + \frac{2\delta_{1k}}{\alpha_k} \right) (1 + \|v_*\|) + \right. \\ &+ \left. 4L \frac{1}{\alpha_k} \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k} \|v_*\| \right] \leq \frac{1}{4L} \alpha_{k+1} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \left[\frac{1}{4} + \frac{\delta_{2k}}{2\alpha_k} + \varepsilon_k + \frac{2\delta_{1k}}{\alpha_k} + \frac{2\delta_{2k}}{\alpha_k} + \right. \\ &+ \left. 4L \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k} (1 + \|v_*\|) + 8L \frac{\delta_{1k}}{\alpha_k^2} (1 + \|v_*\|) + 4L \|v_*\| \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k^2} \right] \leq \frac{1}{4L} \alpha_{k+1} \left[\frac{1}{2} + 2\varepsilon_k + \right. \\ &+ \left. \frac{4\delta_{1k}}{\alpha_k} + \frac{5\delta_{2k}}{\alpha_k} + 8L (1 + \|v_*\|) \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k} + 16L (1 + \|v_*\|) \frac{\delta_{1k}}{\alpha_k^2} + 8L \|v_*\| \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k^2} \right] \leq \frac{1}{4L} \alpha_{k+1}. \end{aligned}$$

Оценка (40) доказана.

Из (22), (28), (40) вытекает равенство (25). Поскольку правые части оценок (37)–(40) не зависят от выбора приближений из (12), (13), то предел (25) равномерен относительно выбора этих приближений. Теорема 1 доказана.

3. Важно убедиться, что последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$, $\{\delta_{1k}\}$, $\{\delta_{2k}\}$, удовлетворяющие условиям (22) и (23), существуют. Покажем, что их можно выбирать в виде

$$\alpha_k = \frac{\alpha_0}{(k+1)^\alpha}, \quad \varepsilon_k = \frac{\varepsilon_0}{(k+1)^\varepsilon}, \quad \delta_{1k} = \frac{\delta_{10}}{(k+1)^{\delta_1}}, \quad \delta_{2k} = \frac{\delta_{20}}{(k+1)^{\delta_2}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (41)$$

где $\alpha_0, \alpha, \varepsilon_0, \varepsilon, \delta_{10}, \delta_1, \delta_{20}, \delta_2$ — некоторые положительные величины. Нетрудно проверить, что условия (22) будут выполнены, если

$$0 < \alpha \leq 1. \quad (42)$$

Согласно формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$0 \leq \alpha_k - \alpha_{k+1} = \alpha_0 \alpha (k+1 + \theta_k)^{-\alpha-1}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $0 < \theta_k < 1$. Отсюда и из (42) следует

$$0 \leq \alpha_k - \alpha_{k+1} \leq \alpha_0 (k+1)^{-\alpha-1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (43)$$

Имея в виду (41), заменим разности $\alpha_k - \alpha_{k+1}$ в двух последних слагаемых левой части (23) правыми частями (43). Получим величины

$$N_k = \frac{4\delta_{10}}{\alpha_0} (k+1)^{\alpha-\delta_1} + \frac{5\delta_{20}}{\alpha_0} (k+1)^{\alpha-\delta_2} + 2\varepsilon_0 (k+1)^{-\varepsilon} + \frac{8L\varepsilon_0}{\alpha_0} (1+\|v_*\|)(k+1)^{\alpha-\varepsilon} + \\ + \frac{16L\delta_{10}}{\alpha_0^2} (1+\|v_*\|)(k+1)^{2\alpha-\delta_1} + \frac{8L}{\alpha_0} \|v_*\| (k+1)^{\alpha-1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (44)$$

Зафиксируем в (41), (44) положительные числа $\varepsilon_0, \delta_{10}, \delta_{20}, \alpha, \varepsilon, \delta_1, \delta_2$, считая, что выполнены условия

$$\varepsilon_0 \leq \frac{1}{8}, \quad \alpha \leq \min \left\{ 1; \frac{\delta_1}{2}; \delta_2; \varepsilon \right\}, \quad (45)$$

а параметр $\alpha_0 > 0$ пока оставим свободным, рассчитывая, что в дальнейшем мы его будем увеличивать.

Поскольку величины $N_k = N_k(\alpha_0)$, определяемые формулой (44), при условиях (45) монотонно убывают при увеличении k и α_0 и стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty, \alpha_0 \rightarrow +\infty$, можно выбрать α_0 столь большим, что

$$N_0(\alpha_0) = \frac{4\delta_{10}}{\alpha_0} + \frac{5\delta_{20}}{\alpha_0} + 2\varepsilon_0 + 8L(1+\|v_*\|) \frac{\varepsilon_0}{\alpha_0} + \frac{16L\delta_{10}}{\alpha_0^2} (1+\|v_*\|) + \frac{8L}{\alpha_0} \|v_*\| \leq \frac{1}{2}. \quad (46)$$

Тогда $N_k(\alpha_0) \leq N_0(\alpha_0) \leq \frac{1}{2}, k = 0, 1, \dots$. Поскольку левая часть неравенства (23) не превышает $N_k(\alpha_0)$, то условие (23) также будет выполняться при всех $k = 0, 1, \dots$. Тем самым возможность выбора параметров метода (17), (18) в виде (41) установлена.

выбора достаточно большого α_0 при любом задании начального приближения $v_0 \in W_0$. Это говорит о том, что регуляризованный метод Ньютона менее чувствителен к выбору начального приближения, чем нерегуляризованный. Конечно, параметры метода (17), (18) можно выбирать и иначе, чем это указано в (41)–(46). Здесь могут быть использованы различные эвристические приемы. Следует заметить, что выбор параметров является делом тонким. В рамках теоремы 1 нам было важно, что требуемые параметры существуют.

4. В практических задачах трудно ожидать, что погрешности задания входных данных будут стремиться к нулю. Скорее всего эти погрешности будут равны фиксированным положительным числам. Поэтому вместо (13) более реальными представляются следующие условия: при каждом фиксированном $v \in W$ вместо точных $\frac{\partial \Phi(v, w)}{\partial w}, \square \Phi(v, v)$ известны их приближения $\left(\frac{\partial \Phi(v, v)}{\partial w} \right)_\delta, (\square \Phi(v, v))_\delta$, такие, что

$$\left\| \left(\frac{\partial \Phi(v, v)}{\partial w} \right)_\delta - \frac{\partial \Phi(v, v)}{\partial w} \right\| \leq \delta_1 (1 + \|v\|), \quad v \in W, \\ \left\| (\square \Phi(v, v))_\delta - \square \Phi(v, v) \right\| \leq \delta_2, \quad v \in W, \quad (47)$$

где $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ — известные числа. Тогда в методе (17), (18) можно попытаться заменить приближение $\nabla_w t_k(v, v), \square t_k(v, v)$ на $\nabla_w t_{\delta k}(v, v) = \left(\frac{\partial \Phi(v, v)}{\partial w} \right)_\delta + \alpha_k v, \square t_{\delta k}(v, v) = (\square \Phi(v, v))_\delta + \alpha_k I$ соответственно, или, иначе говоря, определить приближение v_{k+1} из условий

$$\|v_{k+1} - \tilde{v}_{k+1}\| \leq \varepsilon_k (1 + \|v_k\|), \quad (48)$$

где $\tilde{v}_{k+1} \in W$ — решение вариационного неравенства

$$\langle \nabla_w t_{\delta k}(v_k, v_k) + \square t_{\delta k}(v_k, v_k)(z - v_k), w - z \rangle \geq 0 \quad \forall w \in W. \quad (49)$$

Однако при фиксированном уровне погрешностей $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ условия (22), (23) согласования параметров заведомо будут нарушены (мы не можем считать $\delta = \delta_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}), k = 0, 1, \dots$) и теорема 1 не будет гарантировать близость точек v_k из (48), (49) к множеству W_* при больших номерах k . Следует указать правило останова процесса (48), (49) на каком-то разумном конечном номере $k(\delta)$ в зависимости от уровня погрешности $\delta = (\delta_1, \delta_2) > 0$, чтобы получившуюся точку $v(\delta) = v_{k(\delta)}$ при достаточно малых δ можно было принять в качестве приближения ко множеству W_* решений задачи (1).

Сформулируем правило останова процесса (48), (49) при каждом фиксированном $\delta = (\delta_1, \delta_2) > 0$. Зафиксируем какую-либо начальную точку $v_0 \in W$ и последовательности $\{\alpha_k\}, \{\varepsilon_k\}, \{\delta_{1k}\}, \{\delta_{2k}\}$, удовлетворяющие условиям (22), (23), (24). Подчеркнем, что поскольку выполнение условия (13) теперь не

предполагается (вместо (13) у нас имеется условие (47) с фиксированным $\delta = (\delta_1, \delta_2) > 0$), то последовательности $\{\delta_{1k}\}$, $\{\delta_{2k}\}$ будем считать параметрами метода (48), (49) наряду с другими параметрами $\{\alpha_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$. Далее, при каждом $\delta > 0$ итерации (48), (49) будем продолжать до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства

$$\delta_{1k} \geq \delta_1, \quad \delta_{2k} \geq \delta_2, \quad k = 0, 1, \dots, k(\delta). \quad (50)$$

Поскольку $\delta_{1k} \rightarrow 0$, $\delta_{2k} \rightarrow 0$, то при каждом $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ такой номер $k(\delta) \geq 0$ непременно существует. Если окажется, что либо $\delta_{10} < \delta_1$, либо $\delta_{20} < \delta_2$, то в (50) будем принимать $k(\delta) = 0$ по определению. Обоснование сформулированного правила останова (50) процесса (48), (49) дает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условия (13). Приближения $(\square\Phi(v, v))_\delta$, $\left(\frac{\partial\Phi(v, v)}{\partial w}\right)_\delta$ удовлетворяют условию (47). Пусть точки $v_0, v_1, \dots, v_{k(\delta)}$ получены методом (48), (49), где номер $k(\delta)$ определен правилом останова (50). Тогда для точки $v(\delta) = v_{k(\delta)}$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \|v(\delta) - v_*\| = 0, \quad (51)$$

где v_* — нормальное решение задачи (1), причем сходимость в (51) равномерна относительно выбора приближений из (47).

Доказательство. Из (47), (50) следует, что при $v \in W$, $k = 0, 1, \dots, k(\delta)$ выполнены неравенства

$$\left\| \left(\frac{\partial\Phi(v, v)}{\partial w} \right)_\delta - \frac{\partial\Phi(v, v)}{\partial w} \right\| \leq \delta_{1k}(1 + \|v\|), \quad \|(\square\Phi(v, v))_\delta - \square\Phi(v, v)\| \leq \delta_{2k}, \quad (52)$$

так что функции

$$\left(\frac{\partial\Phi(v, v)}{\partial w} \right)_k = \left(\frac{\partial\Phi(v, v)}{\partial w} \right)_\delta, \quad (\square\Phi(v, v))_k = (\square\Phi(v, v))_\delta \quad (53)$$

удовлетворяют условию (13) при всех $k = 0, 1, \dots, k(\delta)$. Согласно правилу останова (50) номер $k(\delta)$ является наибольшим номером, для которого выполняются неравенства (50). Отсюда и из $\delta_{1k} \rightarrow 0$, $\delta_{2k} \rightarrow 0$ следует, что $k(\delta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$. Это означает, что при всех малых $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ номер $k(\delta)$ в (52) можно сделать как угодно большим. Согласно теореме 1 при выполнении всех ее условий, включая условие (13), последовательность $\{v_k\}$, полученная методом (17), (18), сходится к нормальному решению v_* задачи (1), т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что

$$\|v_k - v_*\| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq N(\varepsilon), \quad (54)$$

причем номер $N(\varepsilon)$ не зависит от выбора реализаций приближений из (13). Так как $\lim_{\delta \rightarrow 0} k(\delta) = \infty$, то существуют числа $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$, такие, что $k(\delta) > N(\varepsilon)$ при всех $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, $0 < \delta_1 < \delta_1(\varepsilon)$, $0 < \delta_2 < \delta_2(\varepsilon)$. Это означает, что для всех таких δ метод (48), (49) порождает точки $v_0, v_1, \dots, v_{k(\delta)}$, которые могут быть получены также методом (17), (18) с реализациями (53), удовлетворяющими в силу (52) условию (13). Поскольку $k(\delta) > N(\varepsilon)$, можно воспользоваться неравенством (54) при $k = k(\delta)$ и утверждать, что $\|v_{k(\delta)} - v_*\| \leq \varepsilon$ при всех $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, $0 < \delta_1 < \delta_1(\varepsilon)$, $0 < \delta_2 < \delta_2(\varepsilon)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда имеем $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|v_{k(\delta)} - v_*\| = 0$. Приняв $v(\delta) = v_{k(\delta)}$, приходим к равенству (51). Теорема 2 доказана.

Равенство (51) оправдывает сформулированное выше правило останова (50) процесса (48), (49) при фиксированном уровне погрешности $\delta = (\delta_1, \delta_2) > 0$ в (47). Тем самым построен оператор R_δ , который каждому набору входных приближенных данных из (47) ставит в соответствие точку $v(\delta) = v_{k(\delta)}$, определяемую методом (48)–(50). Равенство (51) означает, что такой оператор R_δ является регуляризирующим [6]. Подчеркнем, что в определении оператора R_δ параметры $\{\alpha_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$, $\{\delta_{1k}\}$, $\{\delta_{2k}\}$ из (22) и (23) и начальная точка v_0 предполагаются фиксированными и не меняются при изменении $\delta > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антипин А.С. О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1995. **35**, № 5. 688–704.
2. Антипин А.С. Вычисление неподвижных точек экстремальных отображений методами градиентного типа // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1997. **37**, № 1. 42–53.

3. Антипин А.С. Равновесное программирование: методы градиентного типа // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. 125–137.
4. Антипин А.С. Расщепление градиентного подхода для решения экстремальных включений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1998. **38**, № 7. 1118–1132.
5. Антипин А.С. Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. М.: ВЦ РАН, 2002.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
7. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
8. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
9. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
10. Васильев Ф.П., Антипин А.С. Методы регуляризации поиска неподвижной точки экстремальных отображений // Вестник МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика. 1998. № 1. 11–14.
11. Антипин А.С., Васильев Ф.П. Метод стабилизации для решения задач равновесного программирования с неточно заданным множеством // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1999. **39**, № 11. 1779–1785.
12. Антипин А.С., Васильев Ф.П. Метод невязки для решения равновесных задач с неточно заданным множеством // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2001. **41**, № 1. 3–8.
13. Антипин А.С., Васильев Ф.П. Метод квазирешений для решения задачи равновесного программирования с неточно заданным множеством // Вестник Российского университета Дружбы народов. Серия матем. 2002. **8**, № 2. 10–16.
14. Антипин А.С., Васильев Ф.П. Методы регуляризации для решения задачи равновесного программирования с неточными входными данными, основанные на расширении множества // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2002. **42**, № 8. 1158–1165.
15. Антипин А.С., Васильев Ф.П., Шпирко С.В. Регуляризованный экстраградиентный метод решения задач равновесного программирования // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2003. **43**, № 10. 1451–1458.
16. Стукалов А.С. Регуляризованный экстраградиентный метод решения задач равновесного программирования в гильбертовом пространстве // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2005. **45**, № 9. 1538–1554.
17. Антипин А.С., Васильев Ф.П., Шпирко С.В. Регуляризованный экстраградиентный метод решения задач равновесного программирования с неточно заданным множеством // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2005. **45**, № 4. 650–660.
18. Антипин А.С. Метод Ньютона для решения равновесных и игровых задач // Нелинейная динамика и управление. Т. 3. М.: Физматлит, 2003. 123–138.
19. Байocchi К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложение к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
22.06.2006