УДК 519.633.6, 556.3

СРАВНЕНИЕ ЯВНЫХ И НЕЯВНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РАСЧЕТОВ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ

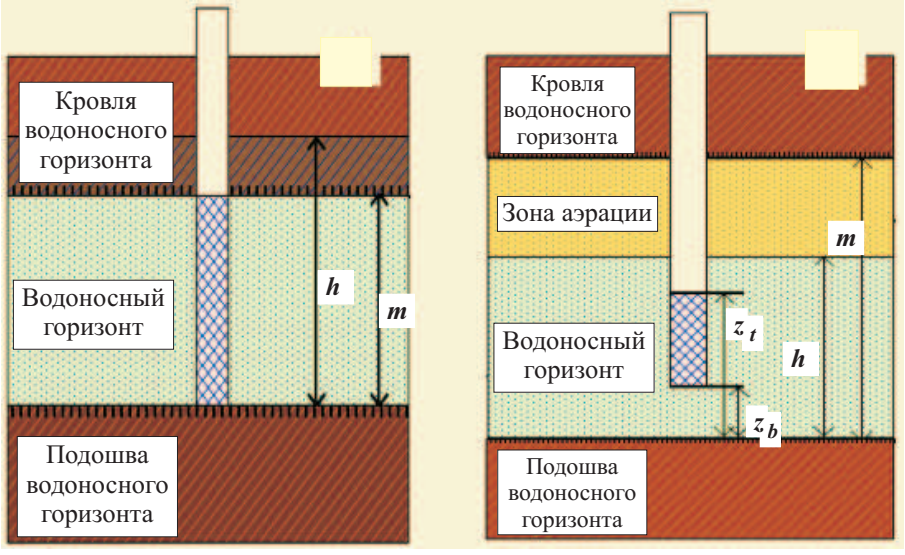
И. А. Расторгуев[1]

В работе приведены три теста для алгоритма DUMKA: сопоставление с аналитическим решением модельной задачи, сопоставление временны́х затрат с пакетом VS2D для модели движения фильтрационного потока в напорном пласте (линейная задача) и сопоставление временны́х затрат для нелинейной задачи движения водоносного потока в безнапорном пласте с учетом наличия ненасыщенной зоны (нелинейная задача).

Ключевые слова: DUMKA, фильтрация, насыщенная-ненасыщенная зона, SIP, VS2D, уравнения Ван Генухтена.

1. Введение. Как правило, для решения фильтрационных задач в настоящее время используют неявные методы, требующие итераций как для решения систем уравнений, так и для обработки нелинейности. Примером этому является пакет VS2D (Variably Saturated 2D Flow), разработанный специалистами геологической службы США [1] и предназначенный для решения двумерных задач насыщенной-ненасыщенной фильтрации. В качестве "солвера" в нем используется метод неполной факторизации (SIP, strongly implicit procedure).

Возможной альтернативой неявных методов может быть явный алгоритм DUMKA (Дифференциальных Уравнений Модельный Контрактивный Алгоритм), разработанный В. И. Лебедевым [2] и хорошо зарекомендовавший себя в различных приложениях. Ниже рассматривается тестирование алгоритма DUMKA на основе решения двумерной радиальной нелинейной задачи фильтрации и сопоставляются результаты расчетов, полученных алгоритмом DUMKA и пакетом VS2D.



а) б)

Рис. 1. а) Схема напорного водоносного горизонта, полностью вскрытого фильтром скважины; б) схема безнапорного водоносного горизонта, вскрытого фильтром скважины не полностью

2. Основные уравнения и пространственная дискретизация. Приведем уравнение Ричардса,

[1] Российский научный центр "Курчатовский институт", пл. Курчатова, 1, 123182, Москва; e-mail: stiar@mail.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

описывающее фильтрацию жидкости к скважине, и соответствующие начально-краевые условия:

$$
\begin{aligned}
&\mu(h)\,\frac{\partial h(r,z,t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(rK_r(h)\,\frac{\partial h(r,z,t)}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z(h)\,\frac{\partial h(r,z,t)}{\partial z}\right),\ 0 \leqslant z \leqslant m,\ r_s \leqslant r \leqslant R,\ t > 0,\\
&2\pi r K_r\,\frac{\partial h(r_s,z,t)}{\partial r} = \frac{-Q}{l}\,, \quad z_b \leqslant z \leqslant z_t, \quad t > 0,\\
&\frac{\partial h(R,z,t)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant m, \quad t > 0,\\
&h(r_s,z,0) = h_0, \quad 0 \leqslant z \leqslant m, \quad r_s \leqslant r \leqslant R,\\
&\frac{\partial h(r,0,t)}{\partial z} = 0, \quad r_s \leqslant r \leqslant R, \quad t > 0,\\
&\frac{\partial h(r,m,t)}{\partial z} = 0, \quad r_s \leqslant r \leqslant R, \quad t > 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где r, z, t — радиальная, вертикальная и временна́я координаты $[L, L, T]$; $h(r,z,t)$ — напор воды в точке области фильтрации $[L]$, равный сумме давления $p\,[L]$ (измеряемого в метрах водного столба) и вертикальной координаты от выбранной плоскости сравнения $h(r,z,t) = p(r,z,t) + z$ (в данном случае от плоскости $z = 0$ — положения подошвы водоносного горизонта); $z = m$ — положение кровли водоносного горизонта; μ — водоотдача; m — обводненная мощность водоносного горизонта $[L]$; K_r и K_z — горизонтальный и вертикальный коэффициенты фильтрации $[L/T, L/T]$; $r = 0$ — левая вертикальная граница области и точка расположения скважины; r_s — радиус скважины; R — правая вертикальная граница исследуемой области; Q — объемный расход откачки воды из скважины $[L^3/T]$; l — длина фильтра $[L]$; z_t и z_b — расположение верха и низа фильтра.

Условие $m > h$ соответствует напорному характеру движения потока подземных вод (рис. 1 а), а $m \leqslant h$ — безнапорному (рис. 1 б). При $z_b = 0$ и $z_t = m$ фильтр скважины полностью вскрывает водоносный горизонт. Такие скважины называются совершенными (рис. 1 а), в противном случае ($z_b > 0$ и $z_t < m$) — несовершенными.

Динамика движения потока подземных вод в ненасыщенной области описывается уравнениями состояния Ван Генухтена [3]:

$$
\begin{aligned}
&\mu(p) = \begin{cases} Mn\,\dfrac{(\theta_s - \theta_r)\mid \alpha^n \mid\mid p^{n-1}\mid}{\bigl(1+\mid \alpha p\mid^n\bigr)^{M+1}}, & p < 0,\\ \mu^*, & p \geqslant 0, \end{cases}\\
&K_{r,z}(p) = \begin{cases} K_s K_u(p), & p < 0,\\ K_s, & p \geqslant 0, \end{cases}\\
&K_u(p) = S^{1/2}\bigl(1 - (1 - S^{1/M})^M\bigr)^2,\\
&S = \frac{1}{\bigl(1 + |\alpha p|^n\bigr)^M}, \quad 0 \leqslant S \leqslant 1,\\
&M = 1 - \frac{1}{n}\,,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $p(r,z,t)$ — давление, измеряемое в метрах водного столба; θ_r — остаточная влажность (минимальное содержание влаги в порах); θ_s — влажность полного насыщения (максимальное содержание влаги в порах); μ^* — упругая водоотдача; K_s — коэффициент фильтрации при полном насыщении (равен в этом случае вертикальному K_z или горизонтальному K_r коэффициенту фильтрации); θ_r, θ_s, μ^*, K_s — величины, определяемые характеристикой среды; α, n — параметры аппроксимации Ван Генухтена.

Пространственная дискретизация, используемая для решения задачи, приведена на рис. 2 б.

Размер исследуемой области: $m = 8$ м по вертикали и $R = 5$ м по горизонтали. Верхний водоупор имеет вертикальную координату $z = 0$ м, нижний — $z = 8$ м. Вертикальный шаг сетки 0.2 м, положение узлов сетки в горизонтальном направлении имеет логарифмическую зависимость вследствие радиального характера задачи: $r_{i+1} - r_i = r_i - r_{i-1}$, где r_i — горизонтальное положение сетки.

3. Сопоставление с аналитическим решением для совершенной скважины в напорном пласте ($l = m$, $h > m$). Приведем верификацию результатов расчета программ VS2D и DUMKA с аналитическим решением Тейса. Формула Тейса, описывающая понижение уровня воды при откачке из скважи-

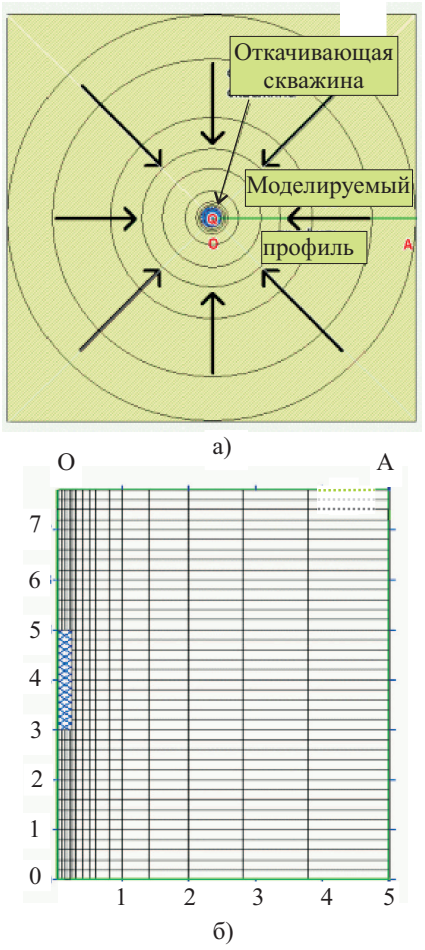


Рис. 2. а) Конфигурация модели радиального потока; б) пространственная дискретизация, используемая для решения задачи

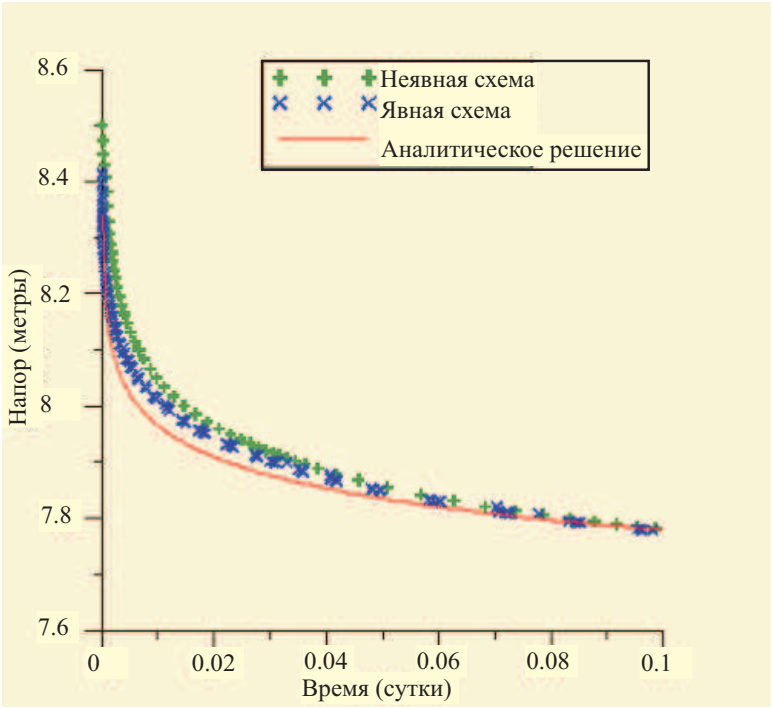


Рис. 3. Кривые понижения уровня воды в скважине ($r = 0$) для аналитической и численных моделей (VS2D и DUMKA)

ны, полностью вскрывающей напорный водоносный пласт, имеет вид: $h_0 - h(r=0,t) = \dfrac{Q}{4\pi K_r m} \displaystyle\int_u^\infty \dfrac{e^u\,du}{u}$,

где $h_0 - h(0,t)$ — понижение уровня воды в скважине, $u = \dfrac{r_s^2 \mu}{4T(r,t)\,t}$ — безразмерный параметр.

Параметры численных моделей (выбраны в соответствии с условиями задачи Тейса): мощность водоносного потока $m = 8$ м, напор $h_0 = 8.5$ м $> m$, $K_r = 8$ м/сут, $K_z = 8$ м/сут, упругая водоотдача $\mu = \mu^* = 0.06$. Скважина располагается в точке с координатой $r = 0$ и имеет радиус $r_s = 0.05$ м, положение фильтра: $z_b = 0$, $z_t = 8$ м, постоянный расход $Q = 65$ м^3/сут, время откачки из скважины 2.5 часа. На рис. 3 приведены кривые понижения уровня воды в скважине для аналитической и численных моделей.

Процессорное время в условных временны́х единицах, затраченное программами VS2D и DUMKA

	DUMKA	VS2D
Линейная задача ($l < m$, $h > m$)	5	9
Нелинейная задача ($l < m$, $h < m$)	12	41

4. Сопоставление результатов расчетов для несовершенной скважины ($l < m$) **в напорном пласте** ($h > m$)**: линейная задача.** Параметры, используемые в задаче, имеют следующие значения. Начальный напор $h_0 = 8.5$ м $> m = 8$ м, радиус скважины $r_s = 0.05$ м, $K_r = K_z = 8$ м/сут, упругая водоотдача $\mu = \mu^* = 0.06$, постоянный расход $Q = 65$ м^3/ сут, время откачки из скважины 0.1 сут, $z_t = 5$ м, $z_b = 3$ м. На рис. 4 приведено сопоставление решений DUMKA и VS2D. В таблице приведены

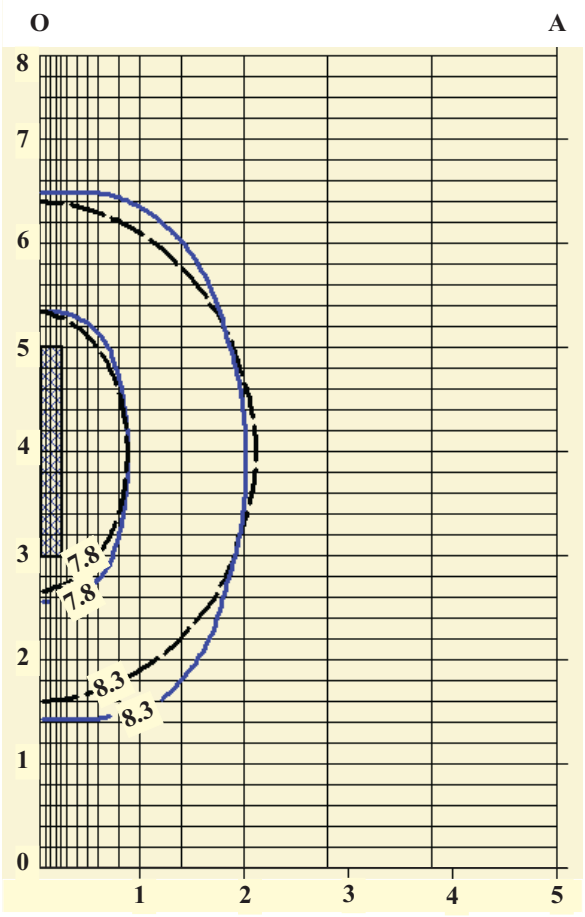


Рис. 4. Сопоставление изолиний напора $h(r, z, t)$. Сплошная линия — решение, полученное DUMKA, пунктирная линия — решение VS2D

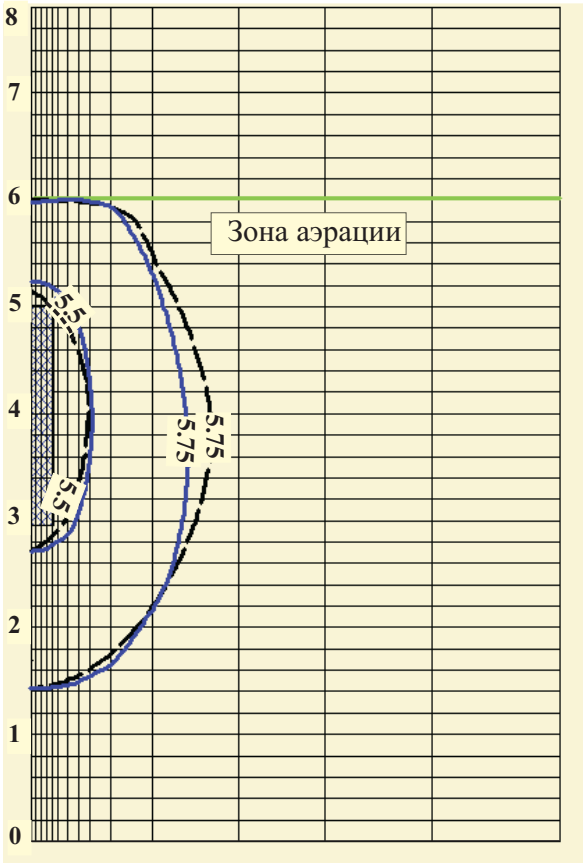


Рис. 5. Сопоставление решений для нелинейной задачи, полученных пакетом VS2D (пунктир) и DUMKA (сплошная линия)

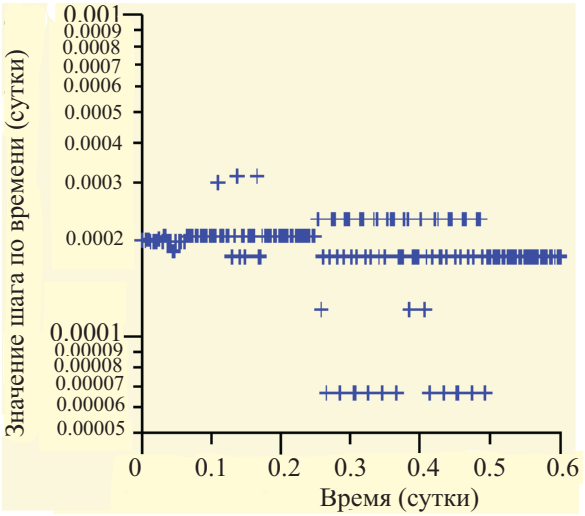


Рис. 6. Динамика изменения шагов по времени в пакете VS2D

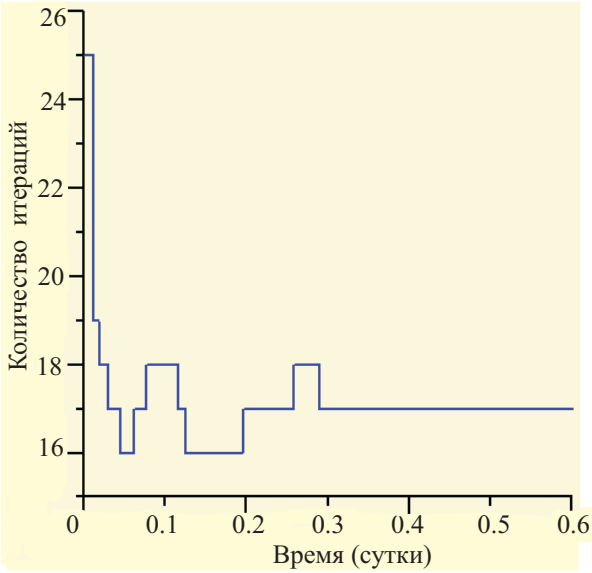


Рис. 7. Динамика изменения числа итераций по времени в пакете VS2D

временны́е затраты DUMKA и VS2D на решение этой задачи.

5. Сопоставление результатов расчетов для условий несовершенной скважины $(l < m)$ **и безнапорной фильтрации** $(h < m)$**: нелинейная задача.** Параметры, используемые в задаче, имеют

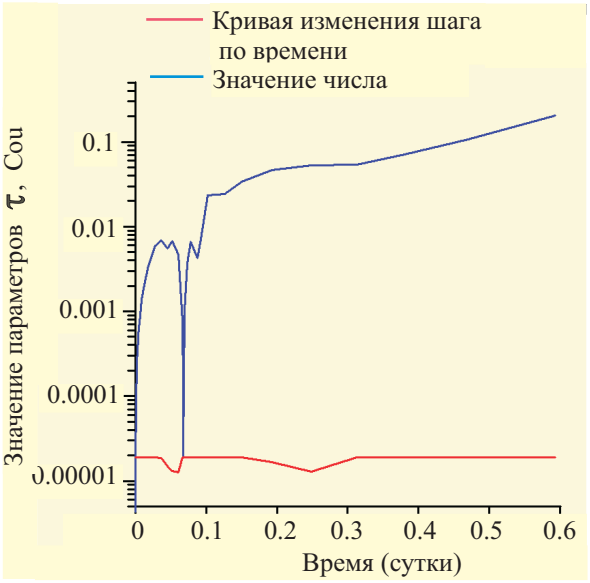


Рис. 8. Динамика изменения шагов по времени в DUMKA

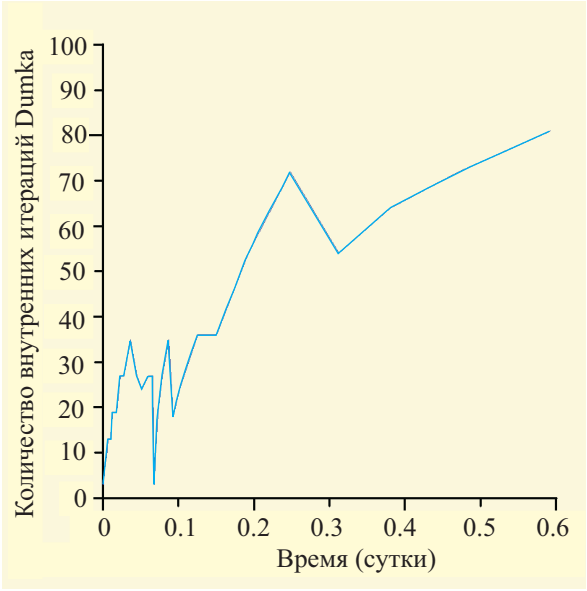


Рис. 9. Динамика изменения итераций в DUMKA

следующие значения. Начальный напор $h_0 = 6.0$ м $< m = 8$ м, радиус скважины $r_s = 0.05$ м, $K_s = 8$ м/сут, упругая водоотдача $\mu^* = 0.06$, постоянный расход $Q = 20$ м^3/ сут, время откачки из скважины 0.58 сут, $z_t = 5$ м, $z_b = 3$ м. Параметры ненасыщенной области имеют следующие значения: $\theta_r = 0.02$, $\theta_r = 0.375$, $\alpha = 4.31$, $n = 3.1$.

На рис. 5 приведено сопоставление изолиний напоров, полученных с помощью VS2D и DUMKA для нелинейной задачи (1) с учетом наличия зоны аэрации (2). Процессорное время, необходимое для получения решения этими методами, приведено в таблице.

6. Основные параметры, используемые при расчетах в VS2D. Значение релаксационного параметра $\lambda = 0.7$; минимальное количество итераций на один шаг по времени $\mathrm{Iter}_{\min} = 2$, максимальное — $\mathrm{Iter}_{\max} = 200$; точность при расчете значения $h(r, z, t)$ выбрана равной $\varepsilon = 0.05$. За начальный шаг по времени взято значение $H_0 = 10^{-6}$, минимальный шаг по времени $h_{\min} = 0.00001$, максимальный — $h_{\max} = 0.05$. На рис. 6 и 7 приведены графики изменения шагов и числа итераций по времени для метода неполной факторизации, используемого в программе VS2D.

7. Основные параметры, используемые при расчетах в DUMKA. Значение параметра, определяющего критерий аппроксимации, $NP = 2$ $(O(h^2))$, параметр, характеризующий точность аппроксимации, $EPS = 0.005$, начальный шаг по времени $h_{\mathrm{init}} = 0.000001$. Для алгоритма DUMKA на рис. 8 и 9 приведены графики изменения шагов по времени и числа внутренних итераций (τ — размер шага по времени и Cou — расчитываемое значение числа Куранта).

8. Заключение. Выполненные вычислительные эксперименты по решению радиальной задачи фильтрации позволяют сделать следующие выводы:

— явный метод DUMKA оказывается быстрее неявных методов при решении нелинейных задач фильтрации;

— явный метод DUMKA имеет соизмеримые с неявными методами вычислительные затраты при решении линейных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lapalla E.G, Healy R.W., and Weeks E.P.* Documentation of computer program VS2D to solve the equations of fluid flow in variably saturated porous media. U.S. Geological Survey Water Resources Investigations Report 83–4099. 1987.
2. *Lebedev V.I.* Explicit difference schemes for solving stiff problems with a complex or separable spectrum // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000. **40**, N 12. 1729–1740.
3. *Van Genuchten M.* A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. 1980. **44**. 892–898.

Поступила в редакцию
24.05.2006