

УДК 517.988

ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И ПОГРЕШНОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Б. Бакушинский¹, М. Ю. Кокурин², В. В. Ключев²

Исследуется класс конечно-разностных методов решения некорректной задачи Коши для абстрактного линейного дифференциального уравнения с секториальным оператором в банаховом пространстве. При различных априорных предположениях относительно решения установлены равномерные по времени оценки точности конечно-разностных аппроксимаций. Получены оценки погрешности, возникающей вследствие возмущений начального условия задачи.

Ключевые слова: конечно-разностные методы, задача Коши, некорректно-поставленные задачи, дифференциальные уравнения, устойчивость, сходимость.

1. Объектом исследования в работе является задача Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad x(0) = f, \quad (1)$$

где $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ — неограниченный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве X ; $\overline{D(A)} = X$, $f \in D(A)$. Нас интересует решение $x = x(t)$ задачи (1) на отрезке $[0, T]$. Функция $x: [0, T] \rightarrow X$, где $x(0) = f$, $x(t) \in D(A)$, $t \in (0, T]$, называется решением (1), если она непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, T]$ в смысле нормы X и при $t \in [0, T]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению из (1). Обозначим через $\sigma(A)$ спектр оператора A и положим $K(\varphi) = \{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg \zeta| < \varphi\}$, $\varphi \in (0, \pi)$. Через $R(\zeta, A) = (\zeta E - A)^{-1}$, где $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, будем обозначать резольвенту оператора A ; E — единичный оператор пространства X .

Всюду ниже будем предполагать, что оператор A удовлетворяет следующему условию секториальности.

Условие 1. Справедливо включение $\sigma(A) \subset K(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, и имеет место оценка

$$\|R(\zeta, A)\| \leq \frac{C_0}{1 + |\zeta|} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus K(\varphi_0), \quad (2)$$

где постоянная C_0 не зависит от ζ .

Из условия 1 следует, что $(-A)$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(U_{-A}(t))_{t \geq 0}$, где $U_{-A}(t) \in L(X)$, $t > 0$; $U_{-A}(0) = E$; $U_{-A}(t+s) = U_{-A}(t)U_{-A}(s)$, $t, s \geq 0$. Кроме того, полугруппа $(U_{-A}(t))_{t \geq 0}$ допускает аналитическое продолжение с положительной полуоси $\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ в сектор $K(\pi/2 - \varphi_0)$. Таким образом, задача Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ax(t), \quad x(0) = \tilde{f}, \quad (3)$$

является корректно поставленной и ее решение определяется выражением $x(t) = U_{-A}(t)\tilde{f}$, $t \geq 0$ [1, 2]. Задача (3) эквивалентна задаче Коши с обратным направлением времени:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(T) = \tilde{f}. \quad (4)$$

Связь между решениями задач (3) и (4) имеет вид $\tilde{x}(t) = x(T - t)$, $t \in [0, T]$, так что

$$\tilde{x}(t) = U_{-A}(T - t)\tilde{f}, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

¹ Институт системного анализа РАН, пр. 60-летия Октября, д. 9, 117312, Москва; e-mail: bakush@isa.ru

² Марийский государственный университет, пр. Ленина, д. 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kokurin@marsu.ru

В то же время исходная задача (1) в общем случае поставлена некорректно. Это означает, что, во-первых, решение рассматриваемой задачи существует не для всякого элемента $f \in D(A)$ и, во-вторых, при наличии решения отсутствует непрерывная зависимость определяемого (1) элемента $x(t) \in X$, где $t \in (0, T]$, от начального значения $f \in D(A)$.

В силу сделанных выше предположений задача (1) при любом начальном элементе f имеет не более одного решения. Действительно, пусть имеются два решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \in [0, T]$, и для некоторого момента времени $t_0 \in (0, T]$ выполняется $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$. Тогда $U_{-A}(t_0)x_1(t_0) = U_{-A}(t_0)x_2(t_0) = f$ и, следовательно, $U_{-A}(t_0)z = 0$, где $z = x_1(t_0) - x_2(t_0) \neq 0$. На основании полугруппового свойства для всех $t \geq t_0$ справедливо равенство $U_{-A}(t)z = U_{-A}(t - t_0)U_{-A}(t_0)z = 0$. В силу аналитичности отображения $\zeta \rightarrow U_{-A}(\zeta)z$, $\zeta \in K(\pi/2 - \varphi_0)$ отсюда следует $U_{-A}(\zeta)z = 0$ для всех $\zeta \in K(\pi/2 - \varphi_0)$. Поэтому с учетом сильной непрерывности полугруппы $(U_{-A}(t))_{t \geq 0}$ имеем $z = \lim_{t \rightarrow 0+} U_{-A}(t)z = 0$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Будем предполагать, что для данного f решение $x = x(t)$ задачи Коши (1) существует на отрезке $[0, T]$, и поставим задачу аппроксимации этого решения, считая вначале элемент f известным без погрешности. Рассмотрим следующий класс разностных схем численной аппроксимации функции $x = x(t)$:

$$\sum_{\nu=0}^k \alpha_\nu x_{n+\nu} = \Delta t \sum_{\nu=0}^k \beta_\nu A x_{n+\nu}, \quad 0 \leq n \leq N - k, \quad \Delta t = \frac{T}{N}, \quad x_0 = f. \quad (6)$$

Здесь $k \geq 1$ — фиксированное натуральное число, α_ν , β_ν , $0 \leq \nu \leq k$ — вещественные параметры, выбор которых определяет конкретную разностную схему. Помимо них необходимо задать еще начальные значения $x_1, \dots, x_{k-1}$. Обычно они выбираются так, чтобы не уменьшить общий порядок аппроксимации схемы (6). В настоящей работе мы ограничимся исследованием простейшего случая $x_1 = \dots = x_{k-1} = f$. Схемы (6) получены формальным применением к бесконечномерной задаче (1) известной процедуры (см., например, [3, 4]) конструирования конечно-разностных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Целью работы является формулирование условий, обеспечивающих квалифицированную по Δt и равномерную по $t = n\Delta t$ оценку скорости сходимости приближений x_n к $x(n\Delta t)$, т.е. оценку вида

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_1 h(\Delta t), \quad 0 \leq n \leq N, \quad \Delta t \in (0, \varepsilon), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} h(\tau) = 0, \quad (7)$$

где постоянная C_1 не зависит от n и Δt , а также получение оценок погрешности, возникающей при возмущении начального условия. Без ограничения общности построений можем считать, что $\Delta t < 1$.

2. В дальнейшем относительно параметров схемы (6) будем предполагать выполненными неравенства

$$\alpha_k > 0, \quad \beta_k < 0. \quad (8)$$

Отметим, что схема (6) корректно определяет приближения x_m для всех $k \leq m \leq N$. Действительно, пусть элементы $x_0, \dots, x_{m-1}$ ($m = n + k$, $n \geq 0$) уже получены. Согласно (6) для отыскания $x_m = x_{n+k}$ необходимо решить уравнение

$$(\alpha_k E - \beta_k \Delta t A) x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (\beta_j \Delta t A - \alpha_j E) x_{n+j}.$$

В силу условия 1, $\inf \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} > 0$, так что согласно (8) точка $\alpha_k \beta_k^{-1} (\Delta t)^{-1}$ не принадлежит $\sigma(A)$ и оператор $\alpha_k E - \beta_k \Delta t A$ имеет непрерывный обратный, определенный на всем X . Поэтому при $f \in D(A)$ рассматриваемое уравнение эквивалентно равенству $x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (\beta_j \Delta t A - \alpha_j E) (\alpha_k E - \beta_k \Delta t A)^{-1} x_{n+j}$,

корректно определяющему x_{n+k} . Существенно, что правая часть последнего соотношения определена при любом начальном значении f в (1), даже не принадлежащем $D(A)$. Ее можно рассматривать как способ продолжения формальной конечно-разностной процедуры (6) на случай произвольного $f \in X$. Ниже, говоря о реализации этой процедуры для таких начальных значений, будем всюду иметь в виду построенное только что продолжение.

При выполнении условий (8) вспомогательное разностное уравнение

$$\sum_{\nu=0}^k \alpha_\nu v_{n+\nu} = \Delta t \lambda \sum_{\nu=0}^k \beta_\nu v_{n+\nu}, \quad 0 \leq n \leq N - k, \quad v_0 = v_1 = \dots = v_{k-1} = 1, \quad (9)$$

имеет решение $v_n = v_n(\lambda)$, $0 \leq n \leq N$, если спектральный параметр λ находится вне некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей точку $\alpha_k \beta_k^{-1}(\Delta t)^{-1}$, при этом $v_j(\lambda) \equiv 1$, $0 \leq j \leq k-1$. Нетрудно установить, что функции $v_n(\lambda)$, $k \leq n \leq N$, аналитичны по λ вне Ω , в том числе и в точке $\lambda = \infty$. Таким образом, определена величина $v_n(\infty) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} v_n(\zeta)$. Введем обозначения $S(r) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq r\}$, $K(\varphi, r) = K(\varphi) \setminus S(r)$ и зафиксируем постоянную r_0 так, что $S(r_0) \cap \sigma(A) = \emptyset$. Обозначим через $\Gamma(\varphi_0, r_0)$ границу множества $K(\varphi_0, r_0)$.

Ниже мы будем пользоваться исчислением секториальных операторов в банаховом пространстве (см., например, [1]). Напомним, что если оператор A удовлетворяет условию 1, а функции комплексного переменного $F(\zeta)$ и $G(\zeta)$ аналитичны в окрестности множества $K(\varphi_0, r_0)$ и убывают на бесконечности быстрее некоторой положительной степени $|\zeta|$ равномерно по $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\arg \zeta| \leq \varphi_0$, то формула

$$F(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} F(\zeta) R(\zeta, A) d\zeta \quad (10)$$

определяет оператор $F(A) \in L(X)$. При этом справедливо равенство

$$F(A)G(A) = (FG)(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} F(\zeta)G(\zeta)R(\zeta, A) d\zeta. \quad (11)$$

Функция $F_t(\zeta) = \exp(-(T-t)\zeta)$ при $t \in [0, T)$ удовлетворяет указанным выше условиям, поэтому согласно (5), (10) имеем

$$x(t) = U_{-A}(T-t)x(T) = F_t(A)x(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \exp(-(T-t)\lambda) R(\lambda, A)x(T) d\lambda, \quad 0 \leq t < T, \quad (12)$$

и, в частности,

$$x(0) = U_{-A}(T)x(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \exp(-T\lambda) R(\lambda, A)x(T) d\lambda. \quad (13)$$

Пусть, кроме того, $\tilde{\Gamma}(\Delta t)$ — произвольный ограниченный замкнутый контур, целиком лежащий в области $\mathbb{C} \setminus \overline{K(\varphi_0, r_0)}$ и окружающий точку $\alpha_k \beta_k^{-1}(\Delta t)^{-1}$. Тогда для определяемого схемой (6) элемента x_n имеет место представление [5]

$$x_n = v_n(A)x(0) = v_n(\infty)x(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} v_n(\lambda) R(\lambda, A)x(0) d\lambda, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (14)$$

Согласно (13), (14) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x_n &= v_n(A)U_{-A}(T)x(T) = \frac{v_n(\infty)}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \exp(-T\lambda) R(\lambda, A)x(T) d\lambda + \\ &+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} v_n(\mu) \exp(-T\lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)x(T) d\lambda d\mu = \\ &= \frac{v_n(\infty)}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \exp(-T\lambda) R(\lambda, A)x(T) d\lambda + \\ &+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \left(\int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} \frac{v_n(\mu) d\mu}{\mu - \lambda} \right) \exp(-T\lambda) R(\lambda, A) d\lambda - \\ &- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} \left(\int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \frac{\exp(-T\lambda) d\lambda}{\mu - \lambda} \right) v_n(\mu) R(\mu, A) d\mu. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу теоремы Коши имеют место равенства $\int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} \frac{v_n(\mu) d\mu}{\mu - \lambda} = 2\pi i (v_n(\lambda) - v_n(\infty)) \quad \forall \lambda \in \Gamma(\varphi_0, r_0)$,

$\int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \frac{\exp(-T\lambda) d\lambda}{\mu - \lambda} = 0 \quad \forall \mu \in \tilde{\Gamma}(\Delta t)$. Поэтому из (15) следует представление

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} v_n(\lambda) \exp(-T\lambda) R(\lambda, A) x(T) d\lambda. \quad (16)$$

Объединяя (12) и (16), для $0 \leq n \leq N-1$ получаем

$$x_n - x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} [v_n(\lambda) \exp(-T\lambda) - \exp(-(T-t)\lambda)] R(\lambda, A) x(T) d\lambda, \quad t = n\Delta t. \quad (17)$$

Заметим, что условие 1 обеспечивает существование обратного для A оператора $A^{-1} \in L(X)$ и любых отрицательных степеней $A^{-q} \in L(X)$ ($q > 0$), которые в соответствии с (10) могут быть определены выражением

$$A^{-q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \zeta^{-q} R(\zeta, A) d\zeta. \quad (18)$$

Наше первоначальное предположение о существовании решения $x(t)$ задачи (1) при $t \in [0, T]$ не позволяет в общем случае получить квалифицированную по Δt и равномерную по $t = n\Delta t$ оценку вида (7). Усилим это предположение следующим условием истокообразного представления элемента $x(T)$: существует такой элемент $w \in X$, что для некоторого $p > 0$ имеет место равенство

$$x(T) = A^{-p} w. \quad (19)$$

На основании (11) и (17)–(19) для любого $t = n\Delta t$, $0 \leq n \leq N-1$, имеем

$$x_n - x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} [v_n(\lambda) \exp(-T\lambda) - \exp(-(T-t)\lambda)] \lambda^{-p} R(\lambda, A) w d\lambda. \quad (20)$$

Из (20) с учетом (2) получаем оценку

$$\|x_n - x(t)\| \leq \frac{C_0}{2\pi} \|w\| \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T\lambda) - \exp(-(T-t)\lambda)|}{|\lambda|^p (1 + |\lambda|)} |d\lambda|, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (21)$$

Оценку интеграла в (21) удобно проводить, разбивая контур интегрирования на две части:

$$\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda) = \{\lambda \in \Gamma(\varphi_0, r_0) : \operatorname{Re} \lambda < \Lambda\}, \quad \Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda) = \{\lambda \in \Gamma(\varphi_0, r_0) : \operatorname{Re} \lambda \geq \Lambda\}.$$

Величина Λ может в общем случае зависеть от Δt . Способ выбора $\Lambda = \Lambda(\Delta t)$ будет уточнен ниже.

При оценке интеграла по $\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)$ воспользуемся тем, что скалярное разностное уравнение (9) аппроксимирует следующую задачу Коши с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1. \quad (22)$$

Очевидно, что задача (22) имеет решение $y(t) = \exp(\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Дополнительно к (8) потребуем, чтобы схема (9) удовлетворяла следующему условию устойчивости Дальквиста [4], обеспечивающему сходимость приближений v_n к соответствующим значениям $y(t)$ при $t = n\Delta t$, $0 \leq n \leq N$.

Условие 2. Все корни $\tilde{\xi} \in \mathbb{C}$ характеристического полинома $\rho(\xi) = \sum_{\nu=0}^k \alpha_\nu \xi^\nu$ таковы, что $|\tilde{\xi}| \leq 1$, а те корни, для которых $|\tilde{\xi}| = 1$, являются простыми.

При выполнении условия 2 для $k \leq n \leq N - 1$ имеет место оценка [3]

$$|v_n(\lambda) - \exp(\lambda t)| \leq C_2 \exp(\mu T \operatorname{Re} \lambda) \left(\sum_{j=k}^n |\tilde{g}_j| + \max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda) - \exp(j\lambda \Delta t)| \right), \quad \Delta t \in (0, \varepsilon). \quad (23)$$

Здесь постоянные C_2, μ зависят только от коэффициентов разностной схемы (6), величина $\tilde{g}_j = g_j \Delta t$, где $g_j = \sum_{\nu=0}^k \frac{\alpha_\nu y(t_{j+\nu})}{\Delta t} - \lambda \sum_{\nu=0}^k \beta_\nu y(t_{j+\nu})$, $k \leq j \leq n$, есть погрешность аппроксимации уравнения (22) разностной схемой (9). Если схема (9) обеспечивает порядок аппроксимации $m \geq 1$, то

$$|g_j| \leq C_3 \max_{t \in [0, T]} |y^{(m+1)}(t)| (\Delta t)^m, \quad k \leq j \leq n,$$

с постоянной C_3 , зависящей только от коэффициентов α_ν, β_ν , $0 \leq \nu \leq k$ [3]. Для выполнения условия 2 во всяком случае необходимо, чтобы порядок аппроксимации схемы (9) не был слишком большим [3]. В рассматриваемом случае $y(t) = \exp(\lambda t)$ и, следовательно, $\max_{t \in [0, T]} |y^{(m+1)}(t)| = |\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda)$. Таким образом,

$$\sum_{j=k}^n |\tilde{g}_j| = \Delta t \sum_{j=k}^n |g_j| \leq C_3 N \Delta t |\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda) (\Delta t)^m = C_3 T |\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda) (\Delta t)^m. \quad (24)$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в скобках в (23). Напомним, что $v_j(\lambda) \equiv 1$, $0 \leq j \leq k - 1$. Поскольку в дальнейшем оценка (23) будет использоваться для таких значений λ , при которых величина $\lambda \Delta t$ мала, можно считать, что

$$\max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda) - \exp(j\lambda \Delta t)| \leq C_4 |\lambda| \Delta t \quad (25)$$

с постоянной C_4 , не зависящей от λ и Δt . С учетом (24) и (25) из (23) для $k \leq n \leq N - 1$ получаем

$$|v_n(\lambda) - \exp(\lambda t)| \leq C_5 \exp(\mu T \operatorname{Re} \lambda) (|\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda) (\Delta t)^m + |\lambda| \Delta t), \quad \Delta t \in (0, \varepsilon). \quad (26)$$

Очевидно, что в случае $k = 1$ слагаемое $|\lambda| \Delta t$ в правой части (26) может быть опущено.

Для точек $\lambda \in \Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)$ ($\Lambda = \Lambda(\Delta t)$) при оценке интеграла (21) будем использовать оценку

$$|v_n(\lambda)| \leq C_6 \exp(at \operatorname{Re} \lambda), \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (t = n\Delta t, \quad a \geq 1), \quad (27)$$

в которой постоянная C_6 не зависит от n, t, λ .

3. Проанализируем вначале случай, когда неравенство (27) выполняется с $a = 1$. С учетом (21), (26) и (27) имеем

$$\begin{aligned} \|x_n - x(t)\| &\leq \frac{C_0}{2\pi} \|w\| \left\{ \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T\lambda) - \exp(-(T-t)\lambda)|}{|\lambda|^p (1 + |\lambda|)} |d\lambda| + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T\lambda)|}{|\lambda|^p (1 + |\lambda|)} |d\lambda| + \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-(T-t)\lambda)|}{|\lambda|^p (1 + |\lambda|)} |d\lambda| \right\} \leq \\ &\leq \frac{C_0 \|w\|}{2\pi} \left\{ 2C_5 \Lambda^{m+1} \exp(\mu T \Lambda) \Delta t \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-T\lambda)|}{|\lambda|^p (1 + |\lambda|)} |d\lambda| + \right. \\ &\quad \left. + (C_6 + 1) \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^p (1 + |\lambda|)} \right\}, \quad t = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (28)$$

При $k = 1$ оценка (28) допускает уточнение. Поскольку в этом случае в (26) отсутствует слагаемое

$|\lambda|\Delta t$, вместо (28) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|x_n - x(t)\| \leqslant \frac{C_0 \|w\|}{2\pi} \left\{ C_5 \Lambda^{m+1} \exp(\mu T \Lambda) (\Delta t)^m \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-T\lambda)|}{|\lambda|^p (1 + |\lambda|)} |d\lambda| + \right. \\ \left. + (C_6 + 1) \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^p (1 + |\lambda|)} \right\}, \quad t = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (29)$$

Выберем находящуюся в нашем распоряжении величину $\Lambda = \Lambda(\Delta t)$ следующим образом:

$$\Lambda = -\ln \Delta t. \quad (30)$$

Используя (30), получаем, что правая часть последнего неравенства в (28) оценивается сверху величиной

$$C_7 [(-\ln \Delta t)^{m+1} (\Delta t)^{1-\mu T} + (-\ln \Delta t)^{-p}], \quad (31)$$

а правая часть (29) — величиной

$$C_8 [(-\ln \Delta t)^{m+1} (\Delta t)^{m-\mu T} + (-\ln \Delta t)^{-p}]. \quad (32)$$

В случае $k > 1$ будем предполагать выполненным условие

$$T < \mu^{-1}, \quad (33)$$

а при $k = 1$ — условие

$$T < m\mu^{-1}. \quad (34)$$

Объединяя (31) и (33), (32) и (34), заключаем, что для погрешности аппроксимации схемы (6) при любом $k \geqslant 1$ имеет место оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_9 (-\ln \Delta t)^{-p}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1, \quad \Delta t \in (0, \varepsilon). \quad (35)$$

Постоянная C_9 в (35) не зависит от n и Δt . Следующая теорема подытоживает проведенные рассуждения.

Теорема 1. Пусть $k > 1$ ($k = 1$), выполняются условия 1, 2, (8), оценка (27) с $a = 1$ и неравенство (33) (неравенство (34)). Предположим, что имеет место истокообразное представление (19). Тогда справедлива оценка (35).

Замечание 1. Условие $k = 1$ влечет $m \in \{1, 2\}$ [3].

Следующее утверждение (см. [5]) позволяет упростить практическую проверку выполнения (27).

Лемма 1. Пусть постоянная $a \geqslant 1$ такова, что при $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \Lambda_0$ справедливо неравенство

$$\eta_{k-1} \exp(-a\Delta t \operatorname{Re} \lambda) + \eta_{k-2} \exp(-2a\Delta t \operatorname{Re} \lambda) + \dots + \eta_0 \exp(-ka\Delta t \operatorname{Re} \lambda) \leqslant 1,$$

где $\eta_j = \left| \frac{\alpha_j - \lambda \beta_j \Delta t}{\alpha_k - \lambda \beta_k \Delta t} \right|$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Тогда для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, таких, что $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \Lambda_0$, имеет место оценка (27).

Пример 1. Положив в (6) $k = 1$, $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = -1$, получим итерационный процесс $-x_n + x_{n+1} = \Delta t(2Ax_n - Ax_{n+1})$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$, $x_0 = f$. Соответствующая схема (9) имеет порядок аппроксимации $m = 1$. Нетрудно проверить, что условие (27) выполняется с постоянной $a > (\cos \varphi_0)^{-1}$. При дополнительном условии $\varphi_0 < \pi/4$ неравенство (27) имеет место с $a = 1$.

4. Обратимся теперь к случаю, когда в условии (27) величина $a > 1$. В этой ситуации условие (19) не гарантирует в общем случае равномерную по $t = n\Delta t$ сходимость аппроксимаций x_n к $x(t) = x(n\Delta t)$. Наложим на решение задачи (1) более жесткое условие. А именно, предположим, что решение $x = x(t)$ этой задачи определено для всех $t \in [0, T_1]$, где $T_1 > aT$. Вместо (17) тогда получим

$$x_n - x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} [v_n(\lambda) \exp(-T_1 \lambda) - \exp(-(T_1 - t)\lambda)] R(\lambda, A) x(T_1) d\lambda, \quad t = n\Delta t, \quad 0 \leqslant n \leqslant N. \quad (36)$$

Из (36) с учетом (2) следует

$$\|x_n - x(t)\| \leqslant \frac{C_0}{2\pi} \|x(T_1)\| \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T_1 \lambda) - \exp(-(T_1 - t)\lambda)|}{1 + |\lambda|} |d\lambda|, \quad 0 \leqslant n \leqslant N. \quad (37)$$

Выберем произвольно $\tilde{T} \in (aT, T_1)$. Оценивая интеграл в правой части (37) как и в п.3, получим следующее неравенство для $n = 0, 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x(t)\| &\leq \frac{C_0}{2\pi} \|x(T_1)\| \left\{ \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T_1 \lambda) - \exp(-(T_1 - t)\lambda)|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T_1 \lambda)|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| + \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-(T_1 - t)\lambda)|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \right\} \leq \\ &\leq \frac{C_0 \|x(T_1)\|}{2\pi} \left\{ 2C_5 \Lambda^{m+1} \exp(\mu T \Lambda) \Delta t \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-T_1 \lambda)|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| + \right. \\ &\quad \left. + (C_6 + 1) \exp(-(T_1 - \tilde{T})\Lambda) \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-(\tilde{T} - at)\lambda)|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \right\}, \quad t = n\Delta t. \end{aligned} \quad (38)$$

В случае $k = 1$ имеет место более точная оценка для $n = 0, 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x(t)\| &\leq \frac{C_0 \|x(T_1)\|}{2\pi} \left\{ C_5 \Lambda^{m+1} \exp(\mu T \Lambda) (\Delta t)^m \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-T_1 \lambda)|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| + \right. \\ &\quad \left. + (C_6 + 1) \exp(-(T_1 - \tilde{T})\Lambda) \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-(\tilde{T} - at)\lambda)|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \right\}, \quad t = n\Delta t. \end{aligned} \quad (39)$$

Выбирая величину Λ в соответствии с (30), видим, что правая часть последнего неравенства в (38) оценивается сверху величиной

$$C_{10} [(-\ln \Delta t)^{m+1} (\Delta t)^{1-\mu T} + (\Delta t)^{T_1 - \tilde{T}}], \quad (40)$$

а правая часть (39) — величиной

$$C_{11} [(-\ln \Delta t)^{m+1} (\Delta t)^{m-\mu T} + (\Delta t)^{T_1 - \tilde{T}}]. \quad (41)$$

В случаях $k > 1$ и $k = 1$ считаем выполненными условия (33) и (34) соответственно. Введем обозначение

$$p = \begin{cases} \min \{1 - \mu T, T_1 - aT\}, & k > 1, \\ \min \{m - \mu T, T_1 - aT\}, & k = 1. \end{cases} \quad (42)$$

Несложный анализ выражений (40), (41) приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть $k > 1$ ($k = 1$), выполняются условия 1, 2, (8), оценка (27) с $a > 1$ и неравенство (33) (неравенство (34)). Предположим, что решение задачи (1) существует на отрезке $[0, T_1]$, где $T_1 > aT$. Тогда для любого $q \in (0, p)$ с величиной p , определенной в (42), имеет место оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_{12} (\Delta t)^q, \quad 0 \leq n \leq N, \quad \Delta t \in (0, \varepsilon). \quad (43)$$

Постоянная $C_{12} = C_{12}(q)$ не зависит от $n, \Delta t$.

Пример 2. Рассмотрим схему

$$x_{n+2} - x_n = \Delta t (-Ax_{n+2} + 4Ax_{n+1} - Ax_n), \quad 0 \leq n \leq N-2, \quad x_0 = x_1 = f. \quad (44)$$

Тогда в обозначениях леммы 1 имеем $\eta_0 = \left| \frac{-1 + \lambda \Delta t}{1 + \lambda \Delta t} \right|$, $\eta_1 = \left| \frac{4\lambda \Delta t}{1 + \lambda \Delta t} \right|$. Поскольку для $\lambda \in \Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)$ с достаточно большим Λ выполняется

$$\begin{aligned} \left| \frac{-1 + \lambda \Delta t}{1 + \lambda \Delta t} \right| &\leq 1 + |\lambda| \Delta t < \exp(|\lambda| \Delta t) = \exp((\cos \varphi_0)^{-1} \Delta t \operatorname{Re} \lambda), \\ \left| \frac{4\lambda \Delta t}{1 + \lambda \Delta t} \right| &\leq 4(1 + |\lambda| \Delta t) < 4 \exp((\cos \varphi_0)^{-1} \Delta t \operatorname{Re} \lambda), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \eta_1 \exp(-a\Delta t \operatorname{Re} \lambda) + \eta_0 \exp(-2a\Delta t \operatorname{Re} \lambda) &< 4 \exp((\cos \varphi_0)^{-1} \Delta t \operatorname{Re} \lambda) (\exp(-a\Delta t \operatorname{Re} \lambda) + \exp(-2a\Delta t \operatorname{Re} \lambda)) \leq \\ &\leq 8 \exp((\cos \varphi_0)^{-1} \Delta t \operatorname{Re} \lambda) \exp(-a\Delta t \operatorname{Re} \lambda) = \\ &= \exp\left(\left((\cos \varphi_0)^{-1} - a \ln 8\right) \Delta t \operatorname{Re} \lambda\right) \leq 1 \end{aligned}$$

при условии, что $a \geq (\ln 8 \cdot \cos \varphi_0)^{-1}$. Согласно лемме 1, при выполнении последнего неравенства для разностной схемы (44) справедлива оценка (27). В данном случае порядок аппроксимации $m = 2$. Подобные рассуждения нетрудно провести и для схем вида

$$x_{n+2} - (\alpha + 1)x_{n+1} + \alpha x_n = \Delta t(-\beta A x_{n+2} + (1.5 - 0.5\alpha + 2\beta)A x_{n+1} - (0.5 + 0.5\alpha + \beta)A x_n)$$

при $\alpha \in [-1, 1)$, $\beta \in (0, +\infty)$. Соответствующие схемы (9) также имеют второй порядок аппроксимации.

5. Обратимся к практически важному случаю, когда элемент f в задаче (1) известен приближенно. Будем считать, что вместо самого этого элемента задано некоторое его приближение $f_\delta \in X$, причем

$$\|f_\delta - f\| \leq \delta \quad (45)$$

с известным уровнем погрешности $\delta > 0$. Согласно (14) имеем

$$x_n = v_n(A)f_\delta, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (46)$$

Выясним условия, при которых равномерно относительно $0 \leq n \leq N$ (или $0 \leq n \leq N - 1$) и относительно выбора приближения f_δ из условия (45) выполняется равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x_n - x(n\Delta t)\| = 0. \quad (47)$$

Для погрешности аппроксимации $x(n\Delta t)$ имеет место оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| = \|v_n(A)f_\delta - x(n\Delta t)\| \leq \|v_n(A)\|\delta + \|v_n(A)f - x(n\Delta t)\|. \quad (48)$$

В условиях теоремы 1 второе слагаемое в (48) оценивается согласно (35). Если же выполнены условия теоремы 2, то это слагаемое оценивается в соответствии с (43). Для оценки нормы $\|v_n(A)\|$ выберем в (14) контур $\tilde{\Gamma}(\Delta t) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \alpha_k \beta_k^{-1}(\Delta t)^{-1}| = 0.5 |\alpha_k \beta_k^{-1}(\Delta t)^{-1}|\}$ и предположим, что с некоторыми постоянными C_{13} , $b > 0$ для всех λ , лежащих на $\tilde{\Gamma}(\Delta t)$ и вне этого контура, выполняется оценка

$$|v_n(\lambda)| \leq C_{13} \exp(bn), \quad 0 \leq n \leq N. \quad (49)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \|v_n(A)\| &\leq |v_n(\infty)| + \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} |v_n(\lambda)| \|R(\lambda, A)\| |d\lambda| \leq \\ &\leq C_{13} \exp(bn) \left(1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_k \beta_k^{-1}(\Delta t)^{-1} d\theta}{1 + 0.5 \alpha_k \beta_k^{-1}(\Delta t)^{-1}}\right) \leq 2C_{13} \exp(bn). \end{aligned} \quad (50)$$

Из (48), (50) следует, что если выполняются условия теоремы 1, то

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_{14} \left(\delta \exp(bT(\Delta t)^{-1}) + (-\ln \Delta t)^{-p}\right), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (51)$$

Используя (51), можно указать различные способы согласования $N = N(\delta)$, обеспечивающие выполнение регуляризационного соотношения (47). Например, полагая

$$N(\delta) = \lceil -\varepsilon^{-1} T \ln \delta \rceil, \quad \varepsilon > bT, \quad (52)$$

получаем, что правая часть неравенства (51) оценивается сверху величиной $O\left((\ln(-\ln \delta))^{-p}\right)$, $\delta \in (0, \varepsilon^{-1})$. Здесь $[\kappa]$ означает целую часть числа κ . Аналогично в условиях теоремы 2 выбор $N(\delta)$ согласно (52) приводит к оценке $O((-\ln \delta)^{-q})$, $\delta \in (0, 1)$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Пусть вместо элемента f в задаче (1) известно его приближение f_δ , удовлетворяющее условию (45), и приближения x_n к решению задачи (1) строятся по схеме (46), (52). Предположим, что справедлива оценка (49). Тогда в условиях теоремы 1 для всех $\delta \in (0, e^{-1})$ выполняется

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_{15}(\ln(-\ln \delta))^{-p}, \quad 0 \leq n \leq N(\delta) - 1.$$

Если выполняются условия теоремы 2, то при всех $\delta \in (0, 1)$ имеем

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_{16}(-\ln \delta)^{-q}, \quad 0 \leq n \leq N(\delta).$$

Отметим, что для схемы из примера 1 функция $v_n(\lambda)$ имеет вид $v_n(\lambda) = \left(\frac{1+2\lambda\Delta t}{1+\lambda\Delta t}\right)^n$, так что при $|\lambda + (\Delta t)^{-1}| \geq 0.5(\Delta t)^{-1}$ справедливы неравенства $|v_n(\lambda)| = \left|\frac{1+2\lambda\Delta t}{1+\lambda\Delta t}\right|^n \leq \left(2 + \frac{1}{|1+\lambda\Delta t|}\right)^n \leq 4^n$. Таким образом, оценка (49) имеет место с $b = \ln 4$. Для схемы из примера 2 при $|\lambda + (\Delta t)^{-1}| \geq 0.5(\Delta t)^{-1}$ имеем $|1 + \lambda\Delta t| \geq 0.5$. Следовательно, для указанных λ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |v_n(\lambda)| &\leq C_{17} \left| \frac{2\lambda\Delta t + \sqrt{1+3\lambda^2(\Delta t)^2}}{1+\lambda\Delta t} \right|^n \leq C_{17} \left| 2 - \frac{2}{u} + \sqrt{3 - \frac{6}{u} + \frac{4}{u^2}} \right|^n \leq \\ &\leq C_{17} \left(2 + \frac{2}{0.5} + \sqrt{3 + \frac{6}{0.5} + \frac{4}{0.5^2}} \right)^n = C_{17}(6 + \sqrt{31})^n, \quad u = 1 + \lambda\Delta t, \end{aligned}$$

и условие (49) также выполняется.

Полученные в работе результаты применимы к задачам Коши для дифференциальных уравнений параболического типа, оператор которых удовлетворяет условию (2). Примеры таких операторов указаны, например, в [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-01-00282а) и программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)” в рамках тематического плана Марийского государственного университета (№ 1.1.06).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
2. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филингов А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
4. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969.
5. Бакушинский А.Б. Разностные методы решения некорректных задач Коши для эволюционных уравнений в комплексном В-пространстве // Дифференциальные уравнения. 1972. 8, № 9. 1661–1668.

Поступила в редакцию
30.04.2006