

УДК 539.3:518.12

# КОНЕЧНО-ОБЪЕМНАЯ TVD-СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ 2D ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Н. М. Евстигнеев<sup>1</sup>

Предложена конечно-объемная численная схема для решения задачи Коши для нестационарных двумерных уравнений мелкой воды с условием Римана на контактном разрыве. Численная схема адаптирована для решения задач с глубиной, равной нулю, возникающих, например, при расчете волн прорыва. Для расчета нелинейных членов применен алгоритм TVD MUSCL (алгоритм уменьшения полной вариации, монотонная противопотоковая схема для законов сохранения). Алгоритм позволяет сохранить монотонность и повысить точность во всей расчетной области.

**1. Введение.** В прикладной гидродинамике многие процессы динамики жидкости можно описать с помощью уравнений Навье–Стокса в приближении мелкой воды, в которой считается, что масштаб процессов по вертикальной оси много меньше масштабов процессов по горизонтальным осям, и вводится некое предположение о значениях переменных по вертикальной оси с последующим осреднением. Уравнения мелкой воды, состоящие из осредненных уравнений сохранения импульса и осредненного уравнения сохранения массы, носят имя Буссинеска–Сен-Венана и для двумерного эволюционного процесса записываются в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S,$$

$$U = \begin{pmatrix} z \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda u|V|}{2} - gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ -\frac{\lambda v|V|}{2} - gh \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $z$  — отметка свободной поверхности с учетом волнения,  $h$  — глубина с учетом волнения,  $z_b$  — отметка дна,  $u$  — скорость течения жидкости в направлении оси  $x$ ,  $v$  — скорость течения жидкости в направлении оси  $y$ ,  $|V| = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\lambda$  — коэффициент гидравлического трения,  $g$  — ускорение свободного падения.

**2. Постановка задачи.** Уравнение (1) является уравнением в частных производных гиперболического типа, для решения которого необходимо поставить корректную начально-краевую задачу в расчетной области. Для этого уравнение (1) дополняется следующими граничными и начальными условиями:

$$U(t, \Omega_\Gamma) = U(\Gamma), \quad U(0, x) = U_0. \quad (2)$$

Здесь  $\Omega$  — произвольная расчетная область,  $\Gamma$  — граница расчетной области,  $U_0$  — начальные условия. Условие (2) соответствует одному из фундаментальных решений системы (1).

Данное уравнение имеет следующую особенность, которая присуща нелинейным уравнениям гиперболического типа: наличие контактных разрывов, сопровождающихся волнами разрыва (аналогично уравнениям газовой динамики при возникновении ударных волн). В связи с этим система (1) для условий (2) должна удовлетворять классическому решению Римана для волн разрыва, которое в одномерном эволюционном приближении для закона сохранения может быть записано в виде

$$\int [f dt - U dx] = 0; \quad U(0, x) = \begin{cases} U_L, & x < 0, \\ U_R, & x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $U_L$  соответствует левому от  $x = 0$  значению  $U$ , а  $U_R$  соответствует правому от  $x = 0$  значению  $U$ ; при  $x = 0$  имеет место разрыв. Для одномерного приближения получено аналитическое решение задачи Римана для системы (1); например, в [1] такое решение записывается в форме

$$x_L(U_L - U_*) = t(f_* - f_L), \quad x_R(U_* - U_R) = t(f_R - f_*),$$

<sup>1</sup> Институт проблем механики РАН, пр. Вернадского, д. 101, корп. 1, 119526, Москва; e-mail: evstigneevnm@yandex.ru

где символ со звездочкой означает значение на разрыве. Приводя подобные члены и группируя, получим  $f_* = \frac{a_R f_L - a_L f_R + a_L a_R (U_R - U_L)}{a_R - a_L}$ , где  $a = x/t$  — скорость распространения волны слева и справа от разрыва.

Для двумерной эволюционной задачи, как показано в [2], можно найти приближение к точному решению с любой требуемой точностью.

В двумерной по пространству постановке задачи Иппеном и Кнаппом в 1939 г. [1] получено аналитическое решение уравнения (1) с условиями (2) для случая “косого гидравлического прыжка” в прямоугольной области. В большинстве же случаев область интегрирования  $\Omega$  является сложной из-за сложности геометрии реального объекта, а нахождение аналитического решения для двумерных уравнений мелкой воды в произвольных областях является невозможным или трудновыполнимым. В этой связи для решения задачи (1), (2) используются численные методы.

**3. Численная реализация.** Необходимо отметить, что численная схема, применяемая к системе (1), должна полностью соответствовать исходным дифференциальным уравнениям. В связи с тем, что (1) предполагает наличие разрывов, имеет смысл применять численные схемы, аналогичные используемым для уравнений газовой динамики, с учетом специфики исходной задачи. Иными словами, необходимо основываться на решении (3) и рассматривать контактные разрывы без введения искусственных схемных приемов.

Введем произвольное сеточное пространство  $\Omega \in [1, \dots, M; 1, \dots, N]$ , покрытое связанными выпуклыми произвольными четырехугольниками — конечными объемами (КО). Для выполнения перечисленных выше требований запишем исходную систему в другом виде. Интегрируя (1) для произвольной выпуклой четырехугольной дискретной области конечного объема  $\Omega_{ij}$  (рис. 1)

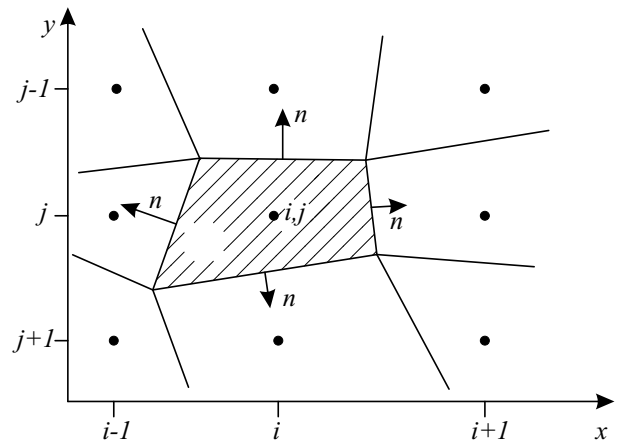


Рис. 1. Конечный объем  $\Omega_{ij}$  в точке  $(i, j)$  дискретного сеточного пространства

$$\int_{V\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_{V\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dV = \int_{V\Omega} S dV \quad (4)$$

и применяя теорему Гаусса–Остроградского ко второму члену в (4), получим

$$\int_{V\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} dV + \oint_{S\Omega} (F n dy - G n dx) = \int_{V\Omega} S dV. \quad (5)$$

Записывая интеграл (5) для дискретной области КО в точке  $(i, j)$ , показанной на рис. 1, и интегрируя по объему, получим

$$\frac{\Delta U_{ij}}{\Delta t} \Delta V_{\Omega[i,j]} = - \sum_{k=1}^4 (F_k n_k \Delta y_k - G_k n_k \Delta x_k) + S \Delta V_{\Omega[i,j]}, \quad (6)$$

где  $i \in [1, \dots, M]$  — дискретный индекс по оси  $x$ ,  $j \in [1, \dots, N]$  — дискретный индекс по оси  $y$ ,  $k$  — номер стороны КО,  $n$  — внешняя нормаль к соответствующей грани КО,  $\Delta x_k, \Delta y_k$  — длина  $k$ -й стороны КО в соответствующем направлении,  $\Delta V_{\Omega[i,j]}$  — площадь КО; суммирование производится по часовой стрелке, начиная с восточной грани КО (рис. 1).

Запись (6) аналогична записи (5) с точностью до дискретного аналога аппроксимации переменных, входящих в  $U, F, G$  и  $S$ , при этом как (5), так и (6) допускают наличие разрывных решений в отличие от других видов дискретной интерпретации (1).

Для построения разрывных решений в дискретной системе (6) нелинейные члены  $F$  и  $G$  должны быть записаны так, чтобы удовлетворять инварианту Римана при условиях на разрыве, аналогичных (3). В связи с этим система (6) должна предполагать наличие аналитического решения с отброшенным источником  $S$ . Как и для уравнений газовой динамики [3], запишем соотношение на  $F$  и  $G$  с учетом скорости движения разрыва:

$$Q = \frac{a_R Q_L - a_L Q_R + a_L a_R (U_R - U_L)}{a_R - a_L}, \quad (7)$$

где:  $Q = \left| \frac{F}{G} \right|$ ,  $a$  — скорость распространения волны, индекс “ $R$ ” относится к “правой” стороне в КО относительно  $k$ , индекс “ $L$ ” — к “левой” (для направления  $y$  соответственно к нижней и верхней сторонам). Как видно, запись (7) удовлетворяет решению Римана (3) и для двумерного по пространству случая. Скорости распространения волны имеют вид

$$a_R = \max \left\{ \lambda_p \left( \frac{\partial Q}{\partial U} \right)_L, \lambda_p \left( \frac{\partial Q}{\partial U} \right)_R, 0 \right\}, \quad a_L = \max \left\{ \lambda_1 \left( \frac{\partial Q}{\partial U} \right)_L, \lambda_1 \left( \frac{\partial Q}{\partial U} \right)_R, 0 \right\}, \quad (8)$$

где  $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$  — собственные значения якобиана  $\frac{\partial Q}{\partial U}$  при  $Q = \left| \frac{F}{G} \right|$ .

При решении задач, связанных с распространением волны прорыва, необходимо находить скорость распространения волны около сухого основания, т.е. в точках, где  $h = 0$ . Использование выражений (8) для вычисления скорости распространения волны в этом случае может привести к равенству одной из скоростей бесконечности, т.к. при  $h = 0$  имеем  $U = 0$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial U} \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_p \left( \frac{\partial Q}{\partial U} \right)_{h=0} \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1 \left( \frac{\partial Q}{\partial U} \right)_{h=0} \rightarrow \infty$ ,  $a_R \rightarrow \infty$ ,  $a_L = 0$ . Во избежание возникновения сингулярности якобиана, при  $h = 0$  используются соседние собственные значения, при которых скорость на разрыве находится следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} a_R &= q_L - \sqrt{gh_L} \\ a_L &= q_L + 2\sqrt{gh_L} \end{aligned} \right\} h_R = 0, \quad \left. \begin{aligned} a_R &= q_R + \sqrt{gh_R} \\ a_L &= q_R - 2\sqrt{gh_R} \end{aligned} \right\} h_L = 0,$$

где  $q = \{u, v\}$  в зависимости от направления  $x$  или  $y$ .

Полученный метод можно отнести к аналогу метода Годунова, используемого в газовой динамике. Подставляя запись (7) в (6) и выполняя суммирование по указанным граням для отдельного КО, получаем дискретный аналог записи (5) при соблюдении условий на разрыве в виде (3) для двумерного эволюционного случая.

Интегрирование уравнения (6) по времени целесообразно провести с помощью явного метода интегрирования, который бы не понижал точность численной схемы и не был бы слишком обременителен для ресурсов компьютера. В качестве такого численного метода здесь выбран метод Рунге–Кутты второго порядка точности [4], который, с одной стороны, обладает большей условной устойчивостью, чем одношаговый метод Эйлера, а с другой стороны, не так требователен к ресурсам как, скажем, метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Шаг по времени  $\Delta t$  ограничивается условием устойчивости типа Куранта–Фридрихса–Леви (КФЛ), которое для уравнений мелкой воды записывается в виде  $\Delta t \leq k \frac{\min [\min (\Delta x); \min (\Delta y)]}{2 \max (a_R, -a_L)}$ ; здесь  $k$  — коэффициент устойчивости численной схемы, который позволяет гарантировать выполнение условия устойчивости при распространении ошибок округления; его значение подбирается экспериментально (в данном случае  $k = 0.95$  [4]).

В связи с ограничением КФЛ не целесообразно использовать более точные методы, обладающие большим запасом условной устойчивости численной схемы. Окончательно процесс интегрирования по времени запишется так:

$$U^{(1)} = U^n + 0.5 \Delta t \mathfrak{R}(U^n), \quad U^{n+1} = 0.5 U^n + 0.5 [U^{(1)} + \Delta t \mathfrak{R}(U^{(1)})],$$

где  $\mathfrak{R}$  — оператор в сеточном пространстве, представленный правой стороной выражения (6),  $n$  — слой по времени, верхним индексом (1) обозначен промежуточный слой по времени.

**4. Применение TVD-подхода.** Предложенный метод дискретизации имеет один недостаток — первый порядок точности по пространству, в чем можно убедиться, разложив полученный дискретный аналог в ряд Тейлора около КО. Для повышения точности метода воспользуемся применяемым в газовой динамике методом полиномиальной реконструкции значений, входящих в нелинейные члены  $F$  и  $G$ . Для этого воспользуемся TVD-методом, который для КО на рис. 1 запишется в виде

$$\text{TV}(Q(x, t)) = \sup \sum_{k=1}^4 |Q(x_R, t) - Q(x_L, t)|,$$

где  $\text{TV}$  — полная вариация и  $Q = \{u, v, h\}$ .

Такая запись постулирует, что в дискретной области для  $Q(x, t)$  значение локальных минимумов не уменьшается, а значение локальных максимумов не увеличивается. Данному подходу в применении к уравнениям газовой динамики посвящена обширная литература (см., например, [5–7]).

В данном случае будем использовать полиномиальную реконструкцию TVD MUSCL [5], которая в основном используется при моделировании трансзвуковых течений газа, где также возможно образование и исчезновение контактных разрывов. Тогда для получения значений  $Q = \{u, v, h\}$ , которые используются в нелинейных членах  $F$  и  $G$  дискретной записи уравнения (1), запишем (например, для восточной грани КО, рис. 1):

$$Q_L = Q_{ij} + \frac{1}{4} [\eta^- \min \text{mod} (\delta Q_{i-1/2,j}; \omega \delta Q_{i+1/2,j}) + \eta^+ \min \text{mod} (\delta Q_{i+1/2,j}; \omega \delta Q_{i-1/2,j})],$$

$$Q_R = Q_{i+1/2,j} + \frac{1}{4} [\eta^- \min \text{mod} (\delta Q_{i+3/2,j}; \omega \delta Q_{i+1/2,j}) + \eta^+ \min \text{mod} (\delta Q_{i+1/2,j}; \omega \delta Q_{i+3/2,j})],$$

где  $\eta^+ = 1 + \eta$ ,  $\eta^- = 1 - \eta$ ,  $\delta Q_{i-1/2,j} = Q_{ij} - Q_{i-1,j}$  и т.д. Оператор в сеточном пространстве определяется как  $\min \text{mod} (a, b) = \frac{1}{2} [\text{sgn} (a) + \text{sgn} (b)] \min (|a|, |b|)$ . Для получения третьего порядка точности по пространству для реконструируемых переменных полагаем  $\eta = 1/3$  и  $\omega = 3/2$  [5].

Полученная схема сравнивалась с аналитическими и экспериментальными результатами других авторов.

**5. Проверка численной схемы.** Аналитическое решение задачи (1) в одномерном по пространству случае для условия (2), аналогичное решению задачи распада произвольного разрыва в газовой динамике, впервые получено для уравнений мелкой воды Ритером [1] с помощью метода характеристик и известно как случай прорыва плотины для прямоугольного прорана. Для сравнения результатов численного решения уравнений (1) с решением Ритера эти уравнения при численном интегрировании рассматриваются как симметричные для переменных в направлении  $y$ . В направлении  $x$  использовалось 100 КО размером  $1 \times 1$  м. Начальные условия задачи:

$$h(0, x) = \begin{cases} 6 \text{ [м]}, & x < 50 \text{ [м]}, \\ 0 \text{ [м]}, & x \geq 50 \text{ [м]}, \end{cases} \quad U = V = 0 \text{ [м/с]}.$$

На рис. 2 показано решение задачи (1), (2) и ее сопоставление со значением в центре разрыва, рассчитанным по аналитической формуле Ритера. Как видно, значение наибольшей глубины в центре разрыва совпадает с аналитическим расчетом и равно 2.66667 м.

В таблице приведено сопоставление значения скорости в центре разрыва при аналитическом и численном расчете в разное время.

В рамках данной статьи численный метод для полной системы (1) имеет смысл проверить на чувствительность к “малым” возмущениям, т.е. искусственно вносимым возмущениям, амплитуда которых мала по сравнению с вертикальным масштабом осреднения (глубиной).

Такой расчетный случай, известный в литературе [8] как “падение капли”, обычно применяется при амплитуде начального возмущения в сто раз меньшей глубины для невязкой жидкости (в (1)  $\lambda = 0$ ). При этом корректно построенная численная схема должна воспроизвести распространение возмущений от источника возмущения и отражение возмущения от твердых поверхностей.

Сопоставление скорости движения жидкости  
в точке разрыва

| t<br>сек. | U-аналитическое,<br>м/с | U-численное,<br>м/с | $ 1 - U_a/U_\text{ч} $ |
|-----------|-------------------------|---------------------|------------------------|
| 1         | 5.11468                 | 5.11445             | $4.1 \times 10^{-5}$   |
| 5         | 5.11468                 | 5.11461             | $1.5 \times 10^{-5}$   |
| 50        | 5.11468                 | 5.11465             | $6.7 \times 10^{-6}$   |
| 100       | 5.11468                 | 5.11439             | $5.7 \times 10^{-5}$   |

Условие тестовой задачи — прямоугольная область  $\Omega$  разбивается нерегулярными конечными объемами (рис. 3 а); в ее центре вносится “малое” начальное возмущение  $\varepsilon = 0.001 h$ . Криволинейная сетка

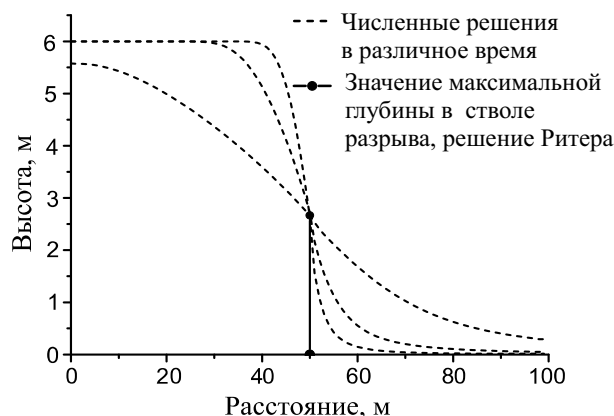


Рис. 2. Сравнение численного решения и аналитического решения Ритера

дополнительно позволяет проверить точность выполнения балансовых соотношений, аппроксимирующих интеграл (5).

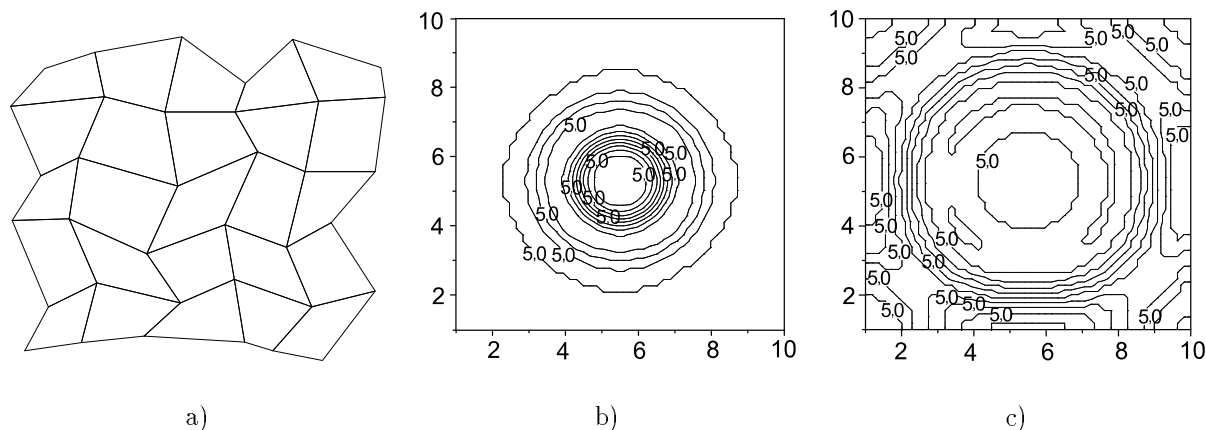


Рис 3. а) Фрагмент сетки КО, б) время интегрирования 2 сек., с) время интегрирования 6 сек.

Полученный результат показан на рис. 3 б и 3 с.

На криволинейной сетке при возмущении, равном  $1/1000$  глубины, получена симметричная картина распространения и отражения возмущения, что говорит о высокой степени разрешимости предлагаемой численной схемы.

**6. Выводы.** Таким образом, задача интегрирования уравнений (1) для произвольной области  $\Omega$  с условиями (2) и наличием контактных разрывов, описываемых (3), решена численно. Полученная схема может быть применена для моделирования различных задач прикладной гидродинамики в приближении мелкой воды, предполагает наличие аналитического решения для условий разрыва, не требует введения дополнительных численных приемов для нахождения разрывных решений, консервативна и монотонна, что обусловлено использованием алгоритма MUSCL, применяемого в основном при численном моделировании в газовой динамике. Предложенный алгоритм реализован автором в Visual C++ и является законченным программным продуктом.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уйзем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
2. Toro E. Riemann problems and the WAF method for solving the two-dimensional shallow water equations // Philosophical Trans. Royal Soc. 1992. **A338**. 43–68.
3. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 2004.
4. Ваннер Г., Персетт С., Хайпер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1990.
5. Barth T.J. Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier–Stokes equations. Moffet Field: NASA Ames Research Center, 1998.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
7. Leonard B.P. The ultimate conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection // Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1991. **88**. 17–74.
8. Soulis J.V. Computation of two-dimensional dam-break flood flows // International Journal of Numerical Methods in Fluids. 1992. **14**, N 6. 631–664.

Поступила в редакцию  
11.02.2006