

УДК 519.6

## ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

В. А. Морозов<sup>1</sup>

Рассматривается проблема построения “оптимального” алгоритма решения задачи вычисления значений оператора на решении операторного уравнения как с точными, так и с приближенными исходными данными. Выяснена структура оптимального алгоритма. Доказана оптимальность по порядку ряда известных методов решения некорректно поставленных задач: метода регуляризации с выбором параметра регуляризации из принципа невязки, операторного метода невязки, метода квазирешений и др. при различных способах задания априорной информации. Приведены два примера. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00026).

**Ключевые слова:** операторные уравнения, некорректные задачи, метод регуляризации, обобщенный принцип невязки, метод коллокации.

1. Многие задачи вычислительной математики сводятся к задаче вычисления значений некоторого (вообще говоря, нелинейного и неограниченного) оператора  $B$ , действующего из  $H$  в  $V$ , при этом  $H$ ,  $V$  — линейные нормированные пространства. Достаточно общий способ задания входной информации об элементах, на которых требуется вычислить значение оператора  $B$ , состоит в следующем. Пусть  $f = Au \in F$ , где  $A$  — линейный оператор, действующий из  $H$  в  $F$ , а  $u \in M_R = \{u \in D : \|Lu\|_G \leq R\}$ ,  $0 \leq R < +\infty$ ,  $L$  — линейный оператор, действующий из  $H$  в  $G$ , а  $D = D_A \cap D_L \subseteq D_B$ , при этом  $F$  и  $G$  — линейные нормированные пространства,  $f \in F$ .

Обозначим  $N_R = \{f \in Au, u \in M_R\}$  — множество точных входных данных, множество приближенных входных данных  $N_{\delta R} = \{\tilde{f} \in F : \tilde{f} = Au + \xi, u \in M_R, \xi \in F, \|\xi\|_F \leq \delta\}$ ; число  $\delta \geq 0$  характеризует точность задания элементов  $f \in N_R$ .

При сделанных предположениях сформулированная задача является некорректно поставленной [1].

Допустимым алгоритмом будем называть любой (необязательно линейный) оператор  $T$ , определенный на  $N_{\delta R}$ , действующий в  $V$ . Будем приближать элемент  $Bu$  элементом  $T\tilde{f}$ . Естественной и весьма важной задачей при этом является отыскание наилучших (оптимальных в том или ином смысле) операторов  $T$ .

Задача определения оптимальных операторов при точном задании информации была рассмотрена С. Б. Стечкиным [2] и Н. С. Бахваловым [3]. Оптимальное приближение линейных ограниченных функционалов в случае приближенного задания информации рассмотрено А. Г. Марчуком и К. Ю. Осипенко [4]. Оптимальные по порядку операторы найдены В. А. Морозовым [5]. Отметим также работы [6]–[8], посвященные данной тематике.

В работах ряда зарубежных авторов [9]–[11], посвященных задачам оптимального приближения операторов (и функционалов),  $A$  задается в виде набора операторов  $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ , и оптимальный оператор ищется на множестве операторов  $T$ , представимых в виде линейной комбинации операторов  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , что является существенным ограничением, которое отсутствует в нашей постановке задачи.

Подчеркнем также, что в настоящей работе доказательство существования оптимального оператора основано на функциональном методе и не опирается на геометрические рассуждения, развитые, например, в [3] и [4].

2. Перейдем к более точной постановке задачи и изложению результатов. Характеризуем погрешность приближения оператора  $B$  на множестве  $M_R$  величиной  $\omega_B(\delta, R, T) = \sup_{u \in M_R, \xi : \|\xi\|_F \leq \delta} \|Bu - T\tilde{f}\|_V$ .

**Теорема 1.** Пусть  $B(-u) = -Bu$ ,  $\forall u \in D_B$ . Если функция  $\omega_B(\delta, R) = \sup_u \|Bu\|_V$  при  $u \in U_{\delta R}$ ,  $U_{\delta R} = \{u \in M_R : \|Au\|_F \leq \delta\}$ , конечна при всех  $\delta \geq 0$ ,  $R \geq 0$ , то для любого допустимого оператора  $T$  справедлива оценка

$$\omega_B(\delta, R, T) \geq \omega_B(\delta, R). \quad (1)$$

<sup>1</sup> Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: morozov.msu.ru

**3.** Пусть  $\delta = 0$ , пространства  $H, G, F$  — гильбертовы пространства. Для некоторого фиксированного  $f \in N_R$  введем множества  $U_R(f) = \{u \in M_R : Au = f\}$ ,  $f \in A[D]$ . Рассмотрим вспомогательную задачу: найти элемент  $u_f \in D$ , который мы назовем  $L$ -псевдорешением, такой, что

$$\|Lu_f\|_G = \inf_{u \in U(f)} \|Lu\|_G. \quad (2)$$

Предполагается, что задача (2) разрешима единственным образом. Следовательно, на  $N_R$  определен оператор  $A^+$ , который мы назовем  $L$ -псевдообратным, такой, что  $A^+f = u_f$ . Нетрудно убедиться, что это линейный оператор. Достаточные условия, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (2), приведены, например, в работе [5].

Будем характеризовать погрешность приближения оператора  $B$  оператором  $T$  в точке  $f$  величиной  $\omega_B(R, T, f) = \sup_{u \in U_R(f)} \|Bu - Tf\|_V$ , а на множестве  $N_R$  величиной  $\omega_B(R, T) = \sup_{f \in N_R} \omega_B(R, T, f)$ . Оператор  $T_0$  назовем  $f$ -оптимальным, если

$$\omega_B(R, T_0, f) = \inf_T \omega_B(R, T, f) \equiv \bar{\omega}_B(R, f). \quad (3)$$

Оператор  $P_0$  назовем  $N_R$ -оптимальным, если

$$\omega_B(R, P_0) = \inf_T \omega_B(R, T) \equiv \hat{\omega}_B(N_R). \quad (4)$$

**Теорема 2.** Если  $B$  — линейный оператор, то при сделанных предположениях решением задач (3) и (4) является один и тот же линейный оператор  $T_0 = P_0 = BA^+$ . При этом  $\hat{\omega}_B(N_R) = \omega_B(0, R)$ ,  $\bar{\omega}_B(R, f) = \sup_{u \in U_R(f)} \|Bu - BA^+f\|_V$ . Если пространство  $V$  — гильбертово, то оператор  $T_0 = BA^+$  есть единственное решение задачи (3).

**Замечание 1.** Если  $u \in N_L = \{u \in D : Lu = 0\}$ , то в силу предположения о единственности решения задачи (2) имеем:  $A^+f = u_f \equiv u$ ,  $\forall f \in A[N_L]$ . Следовательно,  $\bar{\omega}_B(R, f) \equiv 0$ ,  $\forall f \in A[N_L]$ .

**Замечание 2.** Структура оптимального оператора  $T_0 = BA^+$  замечательна тем, что оператор  $A^+$  не зависит от приближаемого оператора  $B$ . Тем самым построены операторы (притом линейные), оптимальные на классе задач. Заметим, что  $A^+$  не зависит ни от  $R$ , ни от  $f$ , ни от выбора пространства  $V$ .

**4.** При  $\delta > 0$  построение оптимального оператора  $\hat{T}$  из условия  $\omega_B(\delta, R, \hat{T}) = \inf_T \omega_B(\delta, R, T)$  затруднительно. Поэтому естественно рассмотреть задачу построения операторов  $\hat{T}_K$  таких, что

$$\omega_B(\delta, R, \hat{T}_K) \leq K \omega_B(\delta, R), \quad 1 \leq K < +\infty. \quad (5)$$

Для таких операторов из (1) получаем неулучшаемость по порядку  $\delta$  и  $R$  оценки (5) и оптимальность оператора  $\hat{T}_K$  по порядку этих величин.

В [5] показано, что в случае линейного оператора  $B$  оптимальными по порядку являются “сглаживающие” операторы, построенные:

а) на основе метода регуляризации, т.е. нахождения такого элемента  $u_\alpha \in D$ , что

$$\|Au_\alpha - \tilde{f}\|_F^2 + \alpha \|Lu_\alpha\|_G^2 = \min_{u \in D} \{\|Au - \tilde{f}\|_F^2 + \alpha \|Lu\|_G^2\},$$

с выбором параметра  $\alpha$  из принципа невязки:  $\|Au_\alpha - \tilde{f}\|_F = \delta$ ;

б) на базе метода невязки:  $\|Lu\|_G = \min$  при  $\|Au - \tilde{f}\|_F \leq \delta$ ;

в) на базе метода квазирешений:  $\|Au - \tilde{f}\|_F = \min$  при  $\|Lu\|_G \leq R$ ;

г) на базе “детерминированного” байесовского подхода, когда в методе регуляризации выбирается параметр  $\alpha = \delta^2/R^2$ .

При этом операторы, соответствующие а) и г) — линейны. Отметим, что для построения этих операторов требуется различная априорная информация.

**5.** Изложенные результаты применимы не только к решению задачи вычисления значений оператора  $B$ , но и к задаче оценки точности решения операторного уравнения  $Au = f$  при априорном предположении о его решении  $u \in M_R$  и приближенном задании элемента  $f$ . Выбор оператора  $B$  и пространства  $V$  соответствует различным мерам точности решения этой задачи. Тогда псевдообратный оператор  $A^+$  и упомянутые операторы  $\hat{T}_K$  являются оптимальными с точки зрения рассмотренных критериев точности.

6. Приведем некоторые примеры.

**Пример 1.** Пусть  $D = D_L$  — выпукло и  $Au = (A_1u, A_2u, \dots, A_mu)$ , где  $A_i$  линейные ограниченные операторы, определенные на  $D$  и переводящие гильбертово пространство  $H$  в гильбертовы пространства  $F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Пространство  $F$  определим как декартово произведение пространств  $F_i$  с нормой  $\|f\|_F^2 = \|f_1\|_{F_1}^2 + \|f_2\|_{F_2}^2 + \dots + \|f_m\|_{F_m}^2$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in F$ .

Из теоремы 2 следует, что метод операторных (а также функциональных) интерполирующих сплайнов [5, стр. 273] является оптимальным для вычисления значений произвольного линейного оператора  $B$ ,  $D \subseteq D_B$ , при наличии априорной информации  $u \in U_R(f)$ ,  $f \in N_R$ .

**Пример 2.** Пусть задано операторное уравнение  $Au = f$ ,  $u \in H$ ,  $f \in F$ , где  $H$  и  $F$  — гильбертовы пространства.  $B = E$  — тождественный оператор. Из теоремы 2 следует, что модифицированный метод коллокации решения операторных уравнений, предложенный в [12], является оптимальным при сделанных предположениях. Например, пусть поставлена краевая задача:

$$Au = u''(x) - g(x)u(x) = f(x), \quad q(x) \geq 0, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0,$$

относительно решения  $u(x)$  которой известно, что оно существует, единственно и удовлетворяет для некоторого  $R > 0$  условию  $\|u''(x)\|_{L_2[0,1]} \leq R$ , функции  $q(x)$  и  $f(x)$  считаются непрерывными и заданными лишь на сетке  $\{x_i\}$ :  $x_i = (i-1)h$ ,  $h = 1/(m-1)$ ,  $q(x_i) = q_i$ ,  $f(x_i) = f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Применяя модифицированный метод коллокации (для случая точного задания величин  $q_i$  и  $f_i$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ ) получаем оптимальную разностную схему для нахождения приближенных значений решения в узлах сетки  $i = 2, 3, \dots, m-1$ :

$$u_{i+1} \left( 1 - \frac{q_{i+1}h^2}{6} \right) - 2u_i \left( 1 + \frac{q_i h^2}{3} \right) + u_{i-1} \left( 1 - \frac{q_{i-1}h^2}{6} \right) = h^2 \frac{f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}}{6}, \quad u_1 = u_m = 0.$$

Автор выражает благодарность И. В. Колосу за помощь в подготовке данной статьи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. **151**, № 3. 501–504.
2. Стечкин С.Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. **1**, № 2. 137–148.
3. Бахвалов Н.С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. **11**, № 4. 1014–1018.
4. Марчук А.Г., Осипенко К.Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностями в конечном числе точек // Матем. заметки. 1975. **17**, вып. 3. 359–368.
5. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974.
6. Иванов В.К. Об оценке погрешности при решении операторных уравнений первого рода // Сб. “Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов”. Тр. симпозиума. Киев. 1969. 102–116.
7. Страхов В.Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве // Дифф. уравнения. 1970. **6**, № 8. 1490–1495.
8. Танана В.П. Об оптимальности регуляризирующих алгоритмов при решении некорректных задач // Тр. Всесоюзной школы молодых ученых “Методы решения некорректных задач и их применение”. МГУ. 1974. 99–101.
9. Sard A. Optimal Approximation // J. Functional Anal. 1967. **1**. 222–244.
10. Munteanu M.J. Generalized Smoothing Spline Functions for Operators // SIAM J. Numer. Anal. 1973. **10**, N 1. 28–34.
11. Reinsch C. Two Extensions of the Sard-Schoenberg Theory of Best Approximation // SIAM J. Numer. Anal. 1974. **11**, N 1. 45–51.
12. Морозов В.А. Сходимость одного приближенного метода решения операторных уравнений I рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. **13**, № 1. 3–17.
13. Morozov V.A. Regularization Methods for ill-posed Problems. London: CRC Press. 1993.
14. Morozov V.A., Grebennikov A.I. Methods for solving ill-posed problems: algorithmic aspects. Moscow: Moscow University Press, 2005.
15. Морозов В.А. Оценки точности регуляризации нелинейных неустойчивых задач // ЖВМ и МФ. 1995. **35**, № 9. 1139–1145.
16. Морозов В.А. Регуляризация при больших помехах // ЖВМ и МФ. 1996. **36**, № 9. 1175–1181.
17. Morozov V.A. On the convergence rate for regularized solutions // Numer. Funct. Anal. and Optim. 1998. **19**, N 3. 345–352.

Поступила в редакцию  
24.03.2006