

УДК 519.6; 517.938

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ РЯДОВ ПРОЕЦИРОВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОЕ МНОГООБРАЗИЕ

А. Б. Калинина¹

Для уравнения типа Чафе–Инфанта в работе рассматривается численное решение задачи проецирования начальных данных на устойчивое многообразие методом функционально-аналитических рядов. Выводятся расчетные формулы, отмечаются особенности практической реализации, приводятся результаты численных экспериментов для случая квадратичной нелинейности.

Ключевые слова: уравнение Чафе–Инфанта, численные методы, метод функциональных рядов, устойчивые многообразия.

1. Введение. Пусть $\mathbb{H} = \{u(x) \in L_2[0, \pi] \mid u(0) = u(\pi) = 0\}$ — банахово пространство с нормой, задаваемой скалярным произведением $(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$. Дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) - \alpha u(t, x) + f(u) = 0, & \alpha = \text{const} \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \geq 0 \\ u(0, x) = u_o(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (1)$$

порождает на $\mathbb{H}$ эволюционный процесс (динамическую систему) с непрерывным временем. Динамика задается разрешающим оператором $S(t)$ уравнения (1), т.е. $S(t)u_o = u(t)$, где $u(t)$ есть решение уравнения (1) с начальным условием u_o . Пусть $\mathcal{L} = \{e_1 \dots e_N\}$ — некоторое конечномерное подпространство $\mathbb{H}$. Рассмотрим следующую задачу: построить по заданной функции $\omega(x)$ такую функцию $\varphi(x) \in \mathcal{L}$, что решение уравнения (1) с начальным условием $u_o(x) = \omega(x) + \varphi(x)$ при всех $t \geq 0$ удовлетворяет неравенству $\|u(t, \cdot)\| < C\|u_o\|$. Переформулируем данную задачу в терминах устойчивого многообразия.

Определение. Множество $\mathcal{M}_- \subset \mathbb{H}$ называется *устойчивым инвариантным многообразием* динамической системы $S(t)$, если для каждого $u_o \in \mathcal{M}_-$ имеем: при любом $t \geq 0$ $S(t)u_o \in \mathcal{M}_-$ (инвариантность) и $\|S(t)u_o\| < C\|u_o\|$ (устойчивость) (см. [3, 4]).

Из данного определения следует, что исходная задача может быть сведена к проецированию функции $\omega(x)$ на устойчивое многообразие $\mathcal{M}_-$ системы $S(t)$ вдоль подпространства $\mathcal{L}$. Для построения соответствующей проекции будем использовать метод функционально-аналитических рядов. Данный метод обычно применяется при теоретических исследованиях, и вопрос о его эффективности для численного проецирования на устойчивое многообразие остается открытым.

Далее будем считать, что нелинейность в уравнении (1) имеет вид $f(u) = u^2$. Описываемый метод естественным образом обобщается на случай нелинейности полиномиального вида.

2. Теоретическая часть. Определим вид многообразия $\mathcal{M}_-$ в случае $f(u) \equiv 0$. Решив уравнение (1) методом Фурье, получим $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} e_k(x)$. Известно, что функции $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$ являются собственными функциями оператора $A = -\partial_{xx} - \alpha$ с собственными значениями $\lambda_k = (k^2 - \alpha)$ и образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{H}$. Здесь c_k — коэффициенты разложения u_o в ряд Фурье по $\{e_k\}$. Будем считать, что у оператора A нет нулевого собственного значения, т.е. $\alpha \neq k^2, \forall k \in \mathbb{N}$. Если коэффициенты c_k при $k < \sqrt{\alpha}$ равны нулю, то решение задачи (1) будет убывать по времени, так как в его разложение входят только экспоненты с отрицательными показателями.

Представим пространство $\mathbb{H}$ в виде прямой суммы подпространств

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_-, \quad \mathbb{H}_+ = \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}, \quad \mathbb{H}_- = \text{span}\{e_{N+1}, \dots, e_k, \dots\},$$

¹ Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: vokati@cityline.ru

где N — наибольшее целое число, меньшее $\sqrt{\alpha}$, т.е. $N = [\sqrt{\alpha}]$. Не сложно показать, что в данном случае для точек подпространства $\mathcal{M}_-$ выполняются условия из определения устойчивого многообразия, следовательно $\mathcal{M}_- = \mathbb{H}_-$.

Пусть $f(u) = u^2$. Устойчивое многообразие нелинейной задачи будем искать в некоторой окрестности нуля $\mathcal{O}(\mathbb{H})$. Обозначим $\mathcal{O}(\mathbb{H}_-) = \mathcal{O}(\mathbb{H}) \cap \mathbb{H}_-$. Поскольку $\mathbb{H} = \mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_-$, то каждый элемент $u \in \mathbb{H}$ можно представить в виде $u = u_+ + u_-$, где $u_+ \in \mathbb{H}_+$, $u_- \in \mathbb{H}_-$. Определим проекторы P_+ и P_- следующим образом: $P_+ : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_+$, $P_+ u = u_+$, $P_- : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_-$, $P_- u = u_-$. Введем обозначения: $S_+(t) = P_+ S(t)$, $S_-(t) = P_- S(t)$.

Имеет место [1] следующее утверждение:

Теорема 1. Для задачи (1) в некоторой окрестности $\mathcal{O}(\mathbb{H}_-)$ существует непрерывное отображение $F : \mathcal{O}(\mathbb{H}_-) \rightarrow \mathbb{H}_+$, такое что $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$, задающее инвариантное устойчивое многообразие $\mathcal{M}_-$ в виде $\mathcal{M}_- = \{u_- + F(u_-), u_- \in \mathcal{O}(\mathbb{H}_-)\}$.

Будем считать, что $\mathcal{L} = \mathbb{H}_+$. Тогда для произвольной функции ω имеем $u_- = P_- \omega$, $u_o = u_- + F(u_-)$ и решение исходной задачи сводится к нахождению отображения F . Выведем формулы для вычисления $F(u_-)$ [2].

Свойство инвариантности устойчивого многообразия в терминах отображения F запишется следующим образом: $S_+(t)u_o = F(S_-(t)u_o)$. Так как оно верно при всех $t \geq 0$, можем продифференцировать по t , получим

$$\frac{d}{dt} S_+(t)u_o = \left\langle F'(S_-(t)u_o), \frac{dS_-(t)u_o}{dt} \right\rangle, \quad (2)$$

где скобки $\langle, \rangle$ обозначают результат применения линейного оператора $F'(S_-(t)u_o)$ к функции $\frac{dS_-(t)u_o}{dt}$.

Заменим $u(t)$ в уравнении (1) на $S(t)u_o$ и применим к нему P_+ и P_- , учитывая, что $\mathbb{H}_+$ и $\mathbb{H}_-$ — собственные подпространства оператора $A = -\partial_{xx} - \alpha$, поэтому P_+ и P_- коммутируют с A :

$$\partial_t S_{\pm}(t)u_o + AS_{\pm}(t)u_o + P_{\pm}(S(t)u_o)^2 = 0.$$

Подставим полученные равенства в (2), получим:

$$-AS_+(t)u_o - P_+(S(t)u_o)^2 = \left\langle F'(S_-(t)u_o), -AS_-(t)u_o - P_-(S(t)u_o)^2 \right\rangle.$$

Перейдем к пределу при $t \rightarrow 0$. Заметим, что в силу непрерывности $S(t)u_o \rightarrow u_o$, $S_+(t)u_o \rightarrow P_+ u_o = F(u_-)$, $S_-(t)u_o \rightarrow P_- u_o = u_-$, следовательно

$$-AF(u_-) - P_+(u_- + F(u_-))^2 = \left\langle F'(u_-), -Au_- - P_-(u_- + F(u_-))^2 \right\rangle \quad (3)$$

Отметим, что в уравнение (3) не входит $S(t)$.

Разложим u_- и $F(u_-)$ по базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$: $u_- = \sum_{\xi=N+1}^{\infty} u^{\xi} e_{\xi}$, $F(u_-) = \sum_{j=1}^N F^j e_j$, где u^{ξ} — ξ -й коэффициент Фурье в разложении u_- по $\{e_k\}$, $F^j = F^j(u_-)$ — j -й коэффициент Фурье в разложении $F(u_-)$.

$$(u_- + F(u_-))^2 = \sum_{\eta_1, \eta_2=N+1}^{\infty} u^{\eta_1} u^{\eta_2} e_{\eta_1} e_{\eta_2} + \sum_{j_1, j_2=1}^N F^{j_1} F^{j_2} e_{j_1} e_{j_2} + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{\eta=N+1}^{\infty} F^j u^{\eta} e_j e_{\eta}.$$

Отметим, что в случае другого вида нелинейности, на этом шаге проявится отличие в выводе вычислительных формул.

Подставим полученные разложения в (3), учитывая, что e_k — собственные функции оператора A , и разложим обе части равенства по базису $\{e_j\}_{j=1}^N$. Обозначим $G(j, j_1, j_2) = \int_0^{\pi} e_{j_1}(x) e_{j_2}(x) e_j(x) dx$ —

проекцию произведения $e_{j_1} e_{j_2}$ на e_j . Тогда уравнение (3) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^N \lambda_j F^j e_j - \sum_{j=1}^N e_j \left\{ \sum_{\eta_1=N+1}^{\infty} \sum_{\eta_2=N+1}^{\infty} G(j, \eta_1, \eta_2) u^{\eta_1} u^{\eta_2} + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j_1=1}^N \sum_{\eta=N+1}^{\infty} G(j, j_1, \eta) F^{j_1} u^{\eta} + \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N G(j, j_1, j_2) F^{j_1} F^{j_2} \right\} = \\ & = \sum_{j=1}^N e_j \left\{ \sum_{\xi=N+1}^{\infty} \frac{\partial F^j(u_-)}{\partial u^{\xi}} \left[-\lambda_{\xi} u^{\xi} - \sum_{\eta_1=N+1}^{\infty} \sum_{\eta_2=N+1}^{\infty} G(\xi, \eta_1, \eta_2) u^{\eta_1} u^{\eta_2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \sum_{j_1=1}^N \sum_{\eta=N+1}^{\infty} G(\xi, j_1, \eta) F^{j_1} u^{\eta} - \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N G(\xi, j_1, j_2) F^{j_1} F^{j_2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Это равенство можно рассматривать как уравнение с частными производными относительно вектор-функции $(F^1, \dots, F^N)$, зависящей от бесконечного числа переменных u^{ξ} , $\xi = N+1, \dots$. В силу линейной независимости базисных функций $\{e_j\}_{j=1}^N$ приравняем коэффициенты при одинаковых e_j . Это позволит выписать систему из N уравнений:

$$\begin{aligned} & \lambda_j F^j + \sum_{\eta_1=N+1}^{\infty} \sum_{\eta_2=N+1}^{\infty} G(j, \eta_1, \eta_2) u^{\eta_1} u^{\eta_2} + 2 \sum_{j_1=1}^N \sum_{\eta=N+1}^{\infty} G(j, j_1, \eta) F^{j_1} u^{\eta} + \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N G(j, j_1, j_2) F^{j_1} F^{j_2} = \\ & = \sum_{\xi=N+1}^{\infty} \frac{\partial F^j(u_-)}{\partial u^{\xi}} \left[\lambda_{\xi} u^{\xi} + \sum_{\eta_1=N+1}^{\infty} \sum_{\eta_2=N+1}^{\infty} G(\xi, \eta_1, \eta_2) u^{\eta_1} u^{\eta_2} + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j_1=1}^N \sum_{\eta=N+1}^{\infty} G(\xi, j_1, \eta) F^{j_1} u^{\eta} + \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N G(\xi, j_1, j_2) F^{j_1} F^{j_2} \right], \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4)$$

Определение. Отображение $Q(x) : \mathbb{H}_- \rightarrow \mathbb{R}$ называется *аналитическим* в окрестности $\mathcal{O}(\mathbb{H}_-)$, если оно представимо в виде сходящегося ряда $Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x)$, где $Q_k(x)$ — однородные отображения по x порядка k , т.е. $Q_k(x) = \widehat{Q}_k(\underbrace{x, \dots, x}_{k \text{ раз}})$, где $\widehat{Q}_k(x, \dots, x)$ — симметричный k -мерный линейный функционал.

Симметричность означает, что $\widehat{Q}_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \widehat{Q}_k(x_1, \dots, x_k)$ для любой перестановки $(i_1, \dots, i_k)$ набора $(1, \dots, k)$; равенство $\widehat{Q}_k(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, v_2, \dots, v_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \widehat{Q}_k(x_i, v_2, \dots, v_k)$ показывает линейность по каждому аргументу.

Верна [2]

Теорема 2. Коэффициенты Фурье $F^j(u_-)$ искомого отображения $F(u_-)$ являются аналитическими функциями в некоторой окрестности $\mathcal{O}(\mathbb{H}_-)$.

Из данной теоремы следует, что решение системы уравнений (4) необходимо искать в классе аналитических в $\mathcal{O}(\mathbb{H}_-)$ функций.

Так как $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$, суммирование начинается с членов второго порядка однородности: $F^j(u_-) = \sum_{k=2}^{\infty} F_k^j(u_-)$, где $F_k^j(u_-) = \widehat{F}_k^j(u_-, \dots, u_-)$. Подставим в последнее выражение разложение u_- по базису, в силу линейности $\widehat{F}_k^j$ получим:

$$F_k^j(u_-) = \sum_{\eta_1=N+1}^{\infty} \dots \sum_{\eta_k=N+1}^{\infty} \widehat{F}_k^j(e_{\eta_1}, \dots, e_{\eta_k}) u^{\eta_1} \dots u^{\eta_k}.$$

Введем следующие обозначения: $F_k^j(\eta_1, \dots, \eta_k) = \widehat{F}_k^j(e_{\eta_1}, \dots, e_{\eta_k})$, $\overline{\eta}^k = (\eta_1, \dots, \eta_k)$; $\sum_{\overline{\eta}^k} = \sum_{\eta_1=N+1}^{\infty} \dots \sum_{\eta_k=N+1}^{\infty}$;

$u^{\overline{\eta}^k} = u^{\eta_1} \dots u^{\eta_k}$. Тогда $F^j(u_-) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\overline{\eta}^k} F_k^j(\overline{\eta}^k) u^{\overline{\eta}^k}$.

Подставим полученное выражение для $F^j(u_-)$ в систему уравнений (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых членах. Для этого заметим, что

- 1) если $\sum_{k=2}^{\infty} Q_k(u) = \sum_{m=2}^{\infty} \tilde{Q}_m(u)$, то $Q_k(u) = \tilde{Q}_k(u)$;
- 2) если $\sum_{\bar{\eta}^k} Q_k(\bar{\eta}^k) u^{\bar{\eta}^k} = \sum_{\bar{\xi}^k} \tilde{Q}_k(\bar{\xi}^k) u^{\bar{\xi}^k}$, то $Q_k(\bar{\eta}^k) = \tilde{Q}_k(\bar{\eta}^k)$ только тогда, когда Q_k и $\tilde{Q}_k$ симметричны относительно $\bar{\eta}^k$, поэтому в случае, когда суммируемые выражения не симметричны относительно $\bar{\eta}^k$, применим к ним оператор симметризации:

$$S_{\bar{\eta}^k} Q(\bar{\eta}^k) = \frac{1}{k!} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} Q(\eta_{i(1)} \dots \eta_{i(k)})$$

(сумма по всем перестановкам набора $(1, \dots, k)$). Отметим, что $\sum_{\bar{\eta}^k} S_{\bar{\eta}^k} Q_k(\bar{\eta}^k) u^{\bar{\eta}^k} = \sum_{\bar{\eta}^k} Q_k(\bar{\eta}^k) u^{\bar{\eta}^k}$.

После введения оператора симметризации и перегруппировки членов уравнения (4) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\bar{\eta}^m} \lambda_{\bar{\eta}^m} F_m^j(\bar{\eta}^m) u^{\bar{\eta}^m} - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\bar{\eta}^m} \lambda_j F_m^j(\bar{\eta}^m) u^{\bar{\eta}^m} = \\ & = \sum_{\bar{\eta}^2} G(j, \eta_1, \eta_2) u^{\bar{\eta}^2} + 2 \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{\bar{\eta}^m} S_{\bar{\eta}^m} \left(\sum_{j_1=1}^N G(j, j_1, \eta_m) F_{m-1}^{j_1}(\eta_1, \dots, \eta_{m-1}) \right) u^{\bar{\eta}^m} + \\ & + \sum_{m=4}^{\infty} \sum_{\bar{\eta}^m} S_{\bar{\eta}^m} \left(\sum_{k+n=m} \sum_{j_1, j_2=1}^N G(j, j_1, j_2) F_k^{j_1}(\eta_1, \dots, \eta_k) F_n^{j_2}(\eta_{k+1}, \dots, \eta_m) \right) u^{\bar{\eta}^m} - \\ & - \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{\bar{\eta}^m} (m-1) \sum_{\xi=N+1}^{\infty} S_{\bar{\eta}^m} (F_{m-1}^j(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{m-2}) G(\xi, \eta_{m-1}, \eta_m)) u^{\bar{\eta}^m} - \\ & - 2 \sum_{m=4}^{\infty} \sum_{\bar{\eta}^m} \sum_{\xi=N+1}^{\infty} S_{\bar{\eta}^m} \left(\sum_{k+n=m} \sum_{j_1=1}^N k G(\xi, j_1, \eta_m) F_k^j(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}) F_n^{j_1}(\eta_k, \dots, \eta_{m-1}) \right) u^{\bar{\eta}^m} - \\ & - \sum_{m=5}^{\infty} \sum_{\bar{\eta}^m} \sum_{\xi=N+1}^{\infty} S_{\bar{\eta}^m} \left(\sum_{k_1+k_2+k_3=m+1} \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N k_1 G(\xi, j_1, j_2) F_{k_1}^j(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{k_1-1}) \times \right. \\ & \left. \times F_{k_2}^{j_1}(\eta_{k_1}, \dots, \eta_{k_1+k_2-1}) F_{k_3}^{j_2}(\eta_{k_1+k_2}, \dots, \eta_m) \right) u^{\bar{\eta}^m}, \quad \lambda_{\bar{\eta}^k} = \sum_{l=1}^k \lambda_{\eta_l}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых членах, получим:

при $m = 2$

$$F_2^j(\eta_1, \eta_2) = \frac{G(j, \eta_1, \eta_2)}{\lambda_{\eta_1} + \lambda_{\eta_2} - \lambda_j}; \quad (6)$$

при $m = 3$

$$(\lambda_{\bar{\eta}^3} - \lambda_j) F_3^j(\bar{\eta}^3) = 2 S_{\bar{\eta}^3} \left(\sum_{j_1=1}^N G(j, j_1, \eta_3) F_2^{j_1}(\eta_1, \eta_2) \right) - 2 \sum_{\xi=N+1}^{\infty} S_{\bar{\eta}^3} (F_2^j(\xi, \eta_1) G(\xi, \eta_2, \eta_3)); \quad (7)$$

при $m = 4$

$$\begin{aligned} & (\lambda_{\bar{\eta}^4} - \lambda_j) F_4^j(\bar{\eta}^4) = \\ & = 2 S_{\bar{\eta}^4} \left(\sum_{j_1=1}^N G(j, j_1, \eta_4) F_3^{j_1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \right) + S_{\bar{\eta}^4} \left(\sum_{j_1, j_2=1}^N G(j, j_1, j_2) F_2^{j_1}(\eta_1, \eta_2) F_2^{j_2}(\eta_3, \eta_4) \right) - \\ & - 3 \sum_{\xi=N+1}^{\infty} S_{\bar{\eta}^4} (G(\xi, \eta_3, \eta_4) F_3^j(\xi, \eta_1, \eta_2)) - 4 \sum_{\xi=N+1}^{\infty} S_{\bar{\eta}^4} \left(\sum_{j_1=1}^N G(\xi, j_1, \eta_4) F_2^j(\xi, \eta_1) F_2^{j_1}(\eta_2, \eta_3) \right); \end{aligned} \quad (8)$$

при $m \geq 5$

$$\begin{aligned}
 (\lambda_{\bar{\eta}^m} - \lambda_j) F_m^j &= S_{\bar{\eta}^m} \left(\sum_{k+n=m} \sum_{j_1, j_2=1}^N G(j, j_1, j_2) F_k^{j_1}(\bar{\eta}^k) F_n^{j_2}(\eta_{k+1}, \dots, \eta_m) + \right. \\
 &+ 2S_{\bar{\eta}^m} \left(\sum_{j_1=1}^N G(j, j_1, \eta_m) F_{m-1}^{j_1}(\bar{\eta}^{m-1}) \right) - (m-1) \sum_{\xi=N+1}^{\infty} S_{\bar{\eta}^m} (F_{m-1}^j(\xi, \bar{\eta}^{m-2}) G(\xi, \eta_{m-1}, \eta_m)) - \\
 &- 2 \sum_{\xi=N+1}^{\infty} S_{\bar{\eta}^m} \left(\sum_{k+n=m} k \sum_{j_1=1}^N G(\xi, j_1, \eta_m) F_k^j(\xi, \bar{\eta}^{k-1}) F_n^{j_1}(\eta_k, \dots, \eta_{m-1}) \right) - \sum_{\xi=N+1}^{\infty} S_{\bar{\eta}^m} \times \\
 &\times \left(\sum_{k_1+k_2+k_3=m+1} \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N k_1 G(\xi, j_1, j_2) F_{k_1}^j(\xi, \bar{\eta}^{k_1-1}) F_{k_2}^{j_1}(\eta_{k_1}, \dots, \eta_{k_1+k_2-1}) F_{k_3}^{j_2}(\eta_{k_1+k_2}, \dots, \eta_m) \right).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что если $f(u) = \beta u^2$, все вышеуказанные формулы домножаются на коэффициент β .

Для нахождения F_k^j при $k > 2$ достаточно знать F_l^i , $l < k$, $i \leq N$. Чтобы найти $F_2^j(\eta_1, \eta_2)$ необходимо вычислить соответствующий интеграл $G(j, \eta_1, \eta_2)$. Определим его точное значение, учитывая что $\cos \pi i \cos \pi j \cos \pi k = \begin{cases} 1, & \text{если сумма } (i+j+k) \text{ четная;} \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 G(i, j, k) &= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^3 \frac{2ijk(\cos \pi i \cos \pi j \cos \pi k - 1)}{(i+j+k)(i-j+k)(i+j-k)(i-j-k)} = \\
 &= -4 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^3 \frac{ijk((i+j+k) \bmod 2)}{(i+j+k)(i-j+k)(i+j-k)(i-j-k)}.
 \end{aligned}$$

Пусть нам известно u_- , принадлежащее конечномерному подпространству $\mathbb{H}_-$, и его разложение по $\{e_k\}$ имеет вид: $u_- = \sum_{j=N+1}^M u^j e_j$. Тогда $F^j(u_-) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\eta_1=N+1}^M \dots \sum_{\eta_k=N+1}^M F_k^j(\bar{\eta}^k) u^{\eta_1} \dots u^{\eta_k}$. При практической реализации вычислений бесконечная сумма по k заменится на конечную (до некоторого K). В итоге будут найдены приближенные значения коэффициентов Фурье (10) и искомого отображения (11).

$$F^j[K](u_-) = \sum_{k=2}^K \sum_{\eta_1=N+1}^M \dots \sum_{\eta_k=N+1}^M F_k^j(\bar{\eta}^k) u^{\eta_1} \dots u^{\eta_k}, \tag{10}$$

$$F[K](u_-) = \sum_{j=1}^N e_j F^j[K](u_-). \tag{11}$$

Так как $F^j[K](u_-)$ аналитичны, а $F^j[K](u_-)$ — частичные суммы соответствующего абсолютно сходящегося ряда, то значения $F[K](u_-)$ сходятся к $F(u_-)$ при $K \rightarrow \infty$. Опишем метод вычисления $F[K](u_-)$. Значение $F[K](u_-)$ может быть найдено конечным суммированием по формулам (10) и (11), если нам известны $F_k^j(\bar{\eta}^k)$ при $k \leq K$, $\eta_i = N+1, \dots, M$, $i = 1, \dots, k$. Величины $F_k^j(\bar{\eta}^k)$ для всех $j \leq N$ будем вычислять последовательно по k .

Пусть $k = 2$. В этом случае необходимые нам $F_2^j(\eta_1, \eta_2)$ определяются по формуле (6). При $k \geq 3$, как видно из формул (7)–(9), появляется бесконечное суммирование по ξ , поэтому для нахождения, например, $F_3^j(\bar{\eta}^3)$, не достаточно знать $F_2^{j_1}(\xi_1, \xi_2)$ при $j_1 = 1, \dots, N$, $\xi_1, \xi_2 = N+1, \dots, M$, которые уже найдены для вычисления $F[2](u_-)$, необходимы еще все $F_2^j(\xi, \varsigma)$, где $\xi = 2, \dots, M, \dots$, а $\varsigma = \eta_1, \eta_2, \eta_3$.

В связи с этим введем параметр Ξ и заменим $\sum_{\xi=N+1}^{\infty}$ на $\sum_{\xi=N+1}^{\Xi}$ во всех формулах. В силу абсолютной сходимости рядов по ξ можем выбрать значение Ξ , обеспечивающее необходимую точность вычислений.

Итак, при $k = 2$ вычисления ведутся точно, при $k > 2$ приблизительно.

Основным достоинством приведенного метода является возможность один раз вычислить коэффициенты $F_k^j(\bar{\eta}^k)$, чтобы потом использовать их для поиска проекций на $\mathcal{M}_-$ различных интересующих нас точек u_- , а главными недостатками — высокая техническая сложность реализации и быстрый рост объема вычислений с увеличением точности приближения. При этом остается открытым вопрос об устойчивости

вычислений данного алгоритма. Отметим также, что в случае другого вида нелинейности в уравнении (1) все формулы необходимо выводить заново.

3. Конечноразностный случай. Разобьем отрезок $[0, \pi]$ на M равных частей с шагом $h = \pi/M$. Обозначим $v_i(t) = v(t, ih)$, функцию $v(t, x)$ заменим на вектор $\mathbf{v}(t) = (v_o(t), \dots, v_M(t))$. Заменим оператор $A = -\partial_{xx} - \alpha$ его конечноразностной аппроксимацией $\tilde{A}$: $(\tilde{A}\mathbf{v})_n = -\frac{v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}}{h^2} - \alpha v_n$. Вместо задачи (1) получим

$$\begin{cases} \partial_t v_n(t) - \frac{v_{n-1}(t) - 2v_n(t) + v_{n+1}(t)}{h^2} - \alpha v_n(t) + (v_n)^2(t) = 0 \\ v_o(t) = v_M(t) = 0, \quad t \geq 0 \\ v_i(n) = u_o(nh), \quad n = 1, \dots, M-1 \end{cases} \quad (12)$$

При каждом $t \geq 0$ определим оператор $\tilde{S}(t) : \tilde{S}(t)\mathbf{u}_o = \mathbf{v}(t)$ как решение задачи (12) с начальным условием $\mathbf{u}_o = (u_o(x_o), \dots, u_o(x_M))$.

Изложенная ранее техника позволяет найти начальный вектор $\mathbf{u}_o$, принадлежащий устойчивому многообразию $\tilde{\mathcal{M}}_-$ задачи (12). Действительно, собственными векторами линейного оператора $\tilde{A}$ являются $\mathbf{e}_m : e_{mk} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mkh$, $m = 1, \dots, M-1$, $k = 0, \dots, M$ с собственными значениями $\tilde{\lambda}_m : \tilde{\lambda}_m = \left(\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{mh}{2} - \alpha \right)$ соответственно. Пространство $\tilde{\mathbb{H}} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{M+1}, v_o = v_M = 0\}$ представим в виде прямой суммы подпространств $\tilde{\mathbb{H}}_+$ и $\tilde{\mathbb{H}}_-$: $\tilde{\mathbb{H}}_+ = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$, $\tilde{\mathbb{H}}_- = \text{span}\{\mathbf{e}_{N+1}, \dots, \mathbf{e}_{M-1}\}$, где N — наибольший номер отрицательного собственного значения.

Под действием линейной части оператора $\tilde{S}$ пространства $\tilde{\mathbb{H}}_+$ и $\tilde{\mathbb{H}}_-$ переходят в себя, в $\tilde{\mathbb{H}}_+$ происходит растяжение, а в $\tilde{\mathbb{H}}_-$ — сжатие (аналогично вводимым ранее подпространствам $\mathbb{H}_+$ и $\mathbb{H}_-$). Поскольку $\tilde{\mathbb{H}} = \tilde{\mathbb{H}}_+ \oplus \tilde{\mathbb{H}}_-$, каждый элемент $\mathbf{u} \in \tilde{\mathbb{H}}$ можно представить в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_+ + \mathbf{u}_-$, $\mathbf{u}_+ \in \tilde{\mathbb{H}}_+$, $\mathbf{u}_- \in \tilde{\mathbb{H}}_-$. Определим проекторы: $\tilde{P}_+ : \tilde{\mathbb{H}} \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}_+$, $\tilde{P}_+\mathbf{u} = \mathbf{u}_+$, $\tilde{P}_- : \tilde{\mathbb{H}} \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}_-$, $\tilde{P}_-\mathbf{u} = \mathbf{u}_-$. Введем обозначения: $\tilde{S}_+(t) = \tilde{P}_+\tilde{S}(t)$, $\tilde{S}_-(t) = \tilde{P}_-\tilde{S}(t)$.

Векторы $\mathbf{e}_m$ ортонормированы относительно скалярного произведения $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^{M-1} v_k w_k h$ и образуют базис в пространстве $\tilde{\mathbb{H}}$, поэтому каждый $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbb{H}}$ разлагается по этому базису так: $\mathbf{v} = \sum_{m=1}^{M-1} (\mathbf{v}, \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_m$. Обозначим $v^m = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_m)$.

Устойчивое многообразие будем искать в некоторой окрестности нуля $\mathcal{O}(\tilde{\mathbb{H}}) \subset \tilde{\mathbb{H}}$. Для $\tilde{S}(t)$ выполняется аналог теоремы 1, следовательно устойчивое многообразие мы также будем искать в виде $\tilde{\mathcal{M}}_- = \{\mathbf{u}_- + F(\mathbf{u}_-), \mathbf{u}_- \in \mathcal{O}(\tilde{\mathbb{H}}_-)\}$, где F — некоторое непрерывное отображение $\mathcal{O}(\tilde{\mathbb{H}}_-) \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}_+$, $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$. Отметим, что F отличается от соответствующего отображения для задачи (1).

Повторим вывод формул для нахождения отображения F для задачи (12). Во всех формулах оператор A заменится его конечноразностной аппроксимацией $\tilde{A}$. Поскольку у новой системы фазовое пространство конечномерно, все разложения элементов $\tilde{\mathbb{H}}$ по базису конечны. Получим систему из N уравнений с частными производными относительно N неизвестных скалярных функций F^j , зависящих от $(M-N-1)$ переменных $u^{N+1}, \dots, u^{M-1}$, где u^j — коэффициенты разложения вектора $\mathbf{u}_-$ по $\{\mathbf{e}_j\}$, а F^j — коэффициенты разложения F . Система имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_j F^j + \sum_{\eta_1=N+1}^{M-1} \sum_{\eta_2=N+1}^{M-1} \tilde{G}(j, \eta_1, \eta_2) u^{\eta_1} u^{\eta_2} + 2 \sum_{j_1=1}^N \sum_{\eta=N+1}^{M-1} \tilde{G}(j, j_1, \eta) F^{j_1} u^\eta + \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N \tilde{G}(j, j_1, j_2) F^{j_1} F^{j_2} = \\ = \sum_{\xi=N+1}^{M-1} \frac{\partial F^j(\mathbf{u}_-)}{\partial u^\xi} \left[\tilde{\lambda}_\xi u^\xi + \sum_{\eta_1=N+1}^{M-1} \sum_{\eta_2=N+1}^{M-1} \tilde{G}(\xi, \eta_1, \eta_2) u^{\eta_1} u^{\eta_2} + 2 \sum_{j_1=1}^N \sum_{\eta=N+1}^{M-1} \tilde{G}(\xi, j_1, \eta) F^{j_1} u^\eta + \right. \\ \left. + \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N \tilde{G}(\xi, j_1, j_2) F^{j_1} F^{j_2} \right], \quad j = 1, \dots, N. \quad \text{Здесь } \tilde{G}(i, j, k) = h \sum_{t=1}^{M-1} e_{it} e_{jt} e_{kt}. \end{aligned} \quad (13)$$

Представим коэффициенты Фурье $F^j(\mathbf{u}_-)$ в виде сходящегося ряда $F^j(\mathbf{u}_-) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\bar{\eta}^k} F_k^j(\bar{\eta}^k) u^{\bar{\eta}^k}$ и

подставим эти выражения в уравнения (13). Приравняв коэффициенты при одинаковых членах, получим формулы для вычисления F_k^j , которые отличаются от аналогичных формул (6) – (9) тем, что вместо $G(i, j, k)$ и λ_j стоят $\tilde{G}(i, j, k)$ и $\tilde{\lambda}_j$ соответственно, а бесконечное суммирование по ξ, η, η_1 и η_2 заменено на конечное в связи конечномерностью фазового пространства $\tilde{\mathbb{H}}$. Заметим, что для нахождения F_k^j при $k > 2$ достаточно знать F_l^i , $l < k$, $i \leq N$. А чтобы найти F_2^j необходимо вычислить соответствующее скалярное произведение $\tilde{G}$.

Пусть нам дано $\mathbf{u}_-$. Разложим его по базису $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{M-1}$. Так как $\mathbf{u}_- \in \tilde{\mathbb{H}}_-$, $\mathbf{u}_- = \sum_{k=N+1}^{M-1} (\mathbf{u}_-, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k$. Для вычисления k -го приближения $F^j[K](\mathbf{u}_-)$ получим расчетные формулы:

$$F^j[K](\mathbf{u}_-) = \sum_{k=2}^K \sum_{\eta_1=N+1}^M \dots \sum_{\eta_k=N+1}^M F_k^j(\bar{\eta}^k) u^{\eta_1} \dots u^{\eta_k}, \quad (14)$$

Для их реализации будем последовательно по k вычислять $F_k^j(\bar{\eta}^k)$ при всех $j = 1, \dots, N$. В отличие от бесконечномерного случая, на каждом шаге все необходимые F_k^j определяются точно по выведенным формулам.

4. Заключение. В работе рассмотрен метод рядов проецирования на устойчивое многообразие в применении к уравнению с частными производными (1). Главным достоинством описанного метода является его эффективность для решения задач, требующих многочисленного проецирования на устойчивое многообразие, таких, например, как задачи асимптотической стабилизации по начальным данным или краевым условиям [1]. Вычислив один раз необходимые коэффициенты, мы можем использовать их для проецирования любых начальных функций с малыми временными затратами.

Основной недостаток численной реализации метода — очень быстрый рост объема вычислений с увеличением точности приближения. Чтобы уменьшить вычислительные затраты, можно частично сохранять найденные промежуточные значения.

Для оценки близости построенной проекции u_o к многообразию $\mathcal{M}_-$ будем применять следующий подход. При подстановке найденной точки $u_o = F[K](u_-) + u_-$ в качестве начального условия в уравнение (1) в силу ее близости к $\mathcal{M}_-$ норма решения должна убывать в течение некоторого времени, после чего она начнет расти. В качестве характеристики точности вычислений можно выбрать длину временного промежутка T , в течение которого норма решения убывает.

На практике мы не можем точно найти решение задачи (1), поэтому для приближенного решения задачи (1) рассматривалась чисто неявная разностная схема

$$\begin{cases} \frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\tau} - \frac{v_{n-1}^{m+1} - 2v_n^{m+1} + v_{n+1}^{m+1}}{h^2} - \alpha v_n^{m+1} + (v_n^{m+1})^2 = 0, \\ v_o^m = 0, \quad v_M^m = 0, \\ v_n^o = u_o(nh), \quad n = 1, \dots, M-1, \end{cases} \quad (15)$$

$v_i^m = v(m\tau, ih)$, $h = \pi/M$. Система уравнений (15) задает $\hat{S}(m)(\mathbf{u}_o) = (v_0^m, \dots, v_i^m, \dots, v_M^m)$ — динамическую систему на фазовом пространстве $H = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^{M+1}, v_o = v_M = 0\}$, при этом пространство времени дискретно.

Описанный в работе метод применим только к динамическим системам с непрерывным временем, поэтому мы не можем вывести аналогичные вычислительные формулы для системы (15). Отметим, однако, что в общем виде метод рядов применим и к динамическим системам с дискретным временем (см. [5]). В этом случае в условие инвариантности, записанное в терминах искомого отображения, подставляется его представление в виде ряда и приравниваются коэффициенты при одинаковых членах.

Для заданной функции u_- построим $u_o = F[K](u_-) + u_-$, спроецируем u_o на сетку, получим $\mathbf{u}_o$. Теперь определим наименьшее N такое, что $\|\hat{S}(N-1)(\mathbf{u}_o)\| \leq \|\hat{S}(N)(\mathbf{u}_o)\|$, т.е. N — номер шага, начиная с которого норма решения системы (15) начнет возрастать. Поскольку система (15) аппроксимирует уравнение (1), то при малых τ и $\mathbb{H}$ величина $T \approx n\tau$. Так реализованный критерий близости точки u_o к устойчивому многообразию, характеризует расстояние от нее до устойчивого многообразия $\hat{\mathcal{M}}_-$ системы (15), которое отличается от искомого $\mathcal{M}_-$, хотя и близко к нему при малых τ и $\mathbb{H}$. Отметим, что данный критерий не позволяет судить об увеличении точности приближения после того, как построенная точка попадает в окрестность многообразия $\mathcal{M}_-$ меньшего порядка, чем та, в которой лежит многообразие $\hat{\mathcal{M}}_-$.

Приведем результаты некоторых численных экспериментов. Пусть $\alpha = 7$, т.е. $\dim \mathbb{H}_+ = 2$. Положим $u_- = \sum_{k=3}^9 \frac{1}{k^2} e_k$. Посмотрим, как изменяется $\|u_o\|$ с увеличением K . Построим $u_o = F[K](u_-) + u_-$ при $\Xi = 10$. Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1

K	$\ u_o\ $	изменение $\ u_o\ $
0	0.1388674465217844	
2	0.1388696585562566	210^{-06}
3	0.1388696221339791	-410^{-08}
4	0.138869622740503	110^{-10}
5	0.138869622766783	310^{-12}
6	0.138869622766153	-610^{-14}

Таблица 2

K	$\ u_o\ $	изменение $\ u_o\ $
0	0.0832975911484539	
2	0.0832977674880355	210^{-07}
3	0.0832977668623647	-610^{-10}
4	0.0832977668619686	-410^{-13}
5	0.0832977668619754	710^{-15}
6	0.0832977668619754	910^{-17}

Пусть $\alpha = 10$, т.е. $\dim \mathbb{H}_+ = 3$. Положим $u_- = \sum_{k=4}^9 \frac{1}{k^2} e_k$. Составим аналогичную таблицу 2. Здесь при $K = 0$ приводится линейное приближение устойчивого многообразия, т.е. $F[0](u_-) = 0$, $u_o = u_-$. Как можно заметить, наиболее существенное изменение происходит при переходе от линейного приближения к квадратичному, поэтому для решения некоторых задач, требующих проецирования на устойчивое многообразие, достаточно квадратичного или кубического приближения. Результаты численных экспериментов демонстрируют сходимость вычислительного алгоритма.

Отметим, что метод функционально-аналитических рядов обычно используется для теоретического исследования существования и гладкости устойчивых многообразий. Вопрос о его применимости для численных расчетов имеет важное значение, т.к. метод экономичен при решении задач, требующих многочисленного проецирования на устойчивое многообразие. Главным результатом работы является практическая реализация данного метода, а также проверка вычислительной устойчивости рассмотренной реализации при приближенном проецировании на устойчивые многообразия нестационарных уравнений в частных производных.

Автор выражает благодарность Андрею Владимировичу Фурсикову за постановку задачи и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фурсиков А.В. Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Математический сборник. 2001. **192**, № 4. 115–160.
2. Fursikov A. V. Proceedings of the Summer Research Conference: "Control Methods in PDE-Dynamical Systems" to be published in a Volume of the AMS Contemporary Mathematics series, by 2006.
3. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1967. **90**.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений. Т. II. М.: Изд-во академии наук СССР, 1954.
5. Корнев А.А. Классификация методов приближенного проектирования на устойчивое многообразие // ДАН. 2005. **400**, № 6. 1–3.

Поступила в редакцию
16.02.2006