

УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ В ВОЛНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. В. Гончарский¹, С. Ю. Романов¹

Работа посвящена разработке методов и алгоритмов решения прямых и обратных задач инженерной сейсмологии на вычислительных кластерах с параллельной архитектурой. Рассматриваемые методы решения задач базируются на томографических подходах в рамках скалярной волновой модели гиперболического типа с учетом специальной схемы проведения эксперимента. Благодаря использованию технологий параллельного программирования на мощных вычислительных кластерах удалось на порядки увеличить скорость и размерность решаемых задач, что позволило провести расчет прямых и обратных задач при широком наборе параметров. Выполненные модельные расчеты показали высокую эффективность и масштабируемость разработанного программного обеспечения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-01-08068).

1. Введение. В настоящей статье рассматриваются задачи инженерной сейсмологии и акустического зондирования по определению неоднородностей, включенных в однородные физические среды. Проблема может быть интерпретирована как обратная задача определения неизвестной характеристики среды (коэффициента рефракции) из наблюдений скалярного волнового поля, возбуждаемого некоторым источником. Возбуждение и наблюдение поля осуществляется в некоторых областях, зависящих от постановки эксперимента.

Для исследований использованы томографические методы. В настоящее время томографические методы широко используются при решении различных обратных задач акустики и сейсмологии. При решении этих задач зачастую необходим существенный учет волновых свойств распространения звука (дифракции и интерференции волн), в особенности если размеры изучаемых объектов сравнимы с длиной волны. Это, в частности, означает, что обычные томографические методы, разработанные на основе лучевой акустики, не применимы в этом конкретном случае. В данной работе рассматриваются методы решения прямой и обратной задач рассеяния звука на неоднородности в трехмерном пространстве с учетом его волновых свойств.

Только применение технологии параллельных вычислений позволяет вывести томографические методы на принципиально новый уровень и расширить класс исследуемых объектов, поскольку использование однопроцессорных компьютеров не дает возможности решать реальные задачи волновой томографии из-за огромного объема вычислений.

Рассматриваемые задачи инженерной сейсмологии и акустического зондирования представляют значительный интерес для приложений, например, для инженерно-строительных работ в приповерхностных слоях земли (строительство линий метро, дорог, прокладка коммуникаций, строительство многоэтажных зданий), в ультразвуковых исследованиях и в применении геофизических методов при поиске ископаемых.

В настоящее время в мире накоплен большой опыт решения обратных задач сейсмических исследований. Однако чаще всего рассматриваемая физическая модель предполагает наиболее простое лучевое приближение, которое, конечно, не является адекватным приближением для задач волновой томографии. Широко распространенный в мире метод миграции для волновых моделей достаточно прост в реализации, но не позволяет построить хорошее приближение к решению. Из-за сложности решения обратной задачи в этих методах обратный оператор заменяется сопряженным. Ясно, что такое приближение не дает хороших результатов.

Предлагаемый подход позволяет формулировать эффективные методы решения обратных задач волновой томографии на основе современных методик с использованием суперкомпьютеров с параллельной



Рис. 1. Схема эксперимента

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: gonchar@srcc.msu.ru; romanov@srcc.msu.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова

архитектурой. Разработанные в рамках этого подхода программы могут быть использованы в других программных комплексах по обработке акустических и сейсмических данных. Все это дает возможность создать технологии применения сейсмических и акустических методов исследования приповерхностных слоев земли с большим объемом данных и сверхвысоким разрешением.

2. Постановка задачи сейсмоки. Рассмотрим распространение излучения в среде, ограничиваясь следующей скалярной волновой моделью гиперболического типа:

$$\Delta u(r, q, t) - \frac{1}{c^2(r)} u_{tt}(r, q, t) = \delta(r - q)f(t), \quad (1)$$

где $u(r, q, t)$ — скалярная функция излучения в среде, зависящая от пространственных переменных $r, q \in \mathbb{R}^3$ и времени $t \geq 0$, Δ — оператор Лапласа, $c(r)$ — скорость распространения излучения, $\delta(r - q)f(t)$ описывает возмущение среды точечным источником, располагающимся в точке $q \in \mathbb{R}^3$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака. Начальные условия имеют вид $u(r, q, t)|_{t=0} = 0$, $u_t(r, q, t)|_{t=0} = 0$.

В работе рассмотрена следующая постановка обратной задачи. Пусть неоднородность среды локализована в области H (рис. 1). Предположим, что источники волн (положение которых характеризуется координатой q) располагаются в области X ($q \in X$), а измерения поля $u(r, q, t)$ доступны только в области Y ($r \in Y$). Область H не имеет общих точек с областями X и Y . Пусть $c(r)$ — гладкая функция, отличающаяся от известной константы c_0 только в пределах области H ($0 < c_1 < c^2(r) < c_2$). Функция $f(t)$, описывающая возмущение, известна априори. В обратной задаче мы должны определить функцию $c(r)$ при $r \in H$ на основе экспериментальных данных $u(r, q, t)$, полученных при $r \in Y$. Эта обратная задача, очевидно, является нелинейной, т.е. функция $u(r, q, t)$ при $r \notin Y$ не известна. Подобная постановка коэффициентной задачи является широко распространенной в задачах сейсморазведки [1, 6–8].

3. Методы решения обратной задачи сейсмоки. Остановимся на методах решения обратной задачи. Пусть $\xi(r) = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$; тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\Delta u(r, q, t) - \frac{1}{c_0^2} u_{tt}(r, q, t) = \delta(r - q)f(t) - u_{tt}(r, q, t)\xi(r). \quad (2)$$

Используем функцию Грина $\frac{1}{4\pi|r - q|} \delta\left(t - \tau - \frac{|r - q|}{c_0}\right)$ для волнового уравнения (2). В работе [7] показано, что в борновском приближении для источников возмущения взрывного типа уравнение (2) может быть представлено в форме

$$U(r, q, t) = - \int_H \frac{1}{16\pi^2|r' - r||r' - q|} \delta\left(t - \frac{|r' - r| + |r' - q|}{c_0}\right) \xi(r') dr', \quad (3)$$

где $U(r, q, t)$ — функция, известная в области измерений (при $r \in Y$). Таким образом, обратная задача в борновском приближении сводится к определению $\xi(r')$ из линейного интегрального уравнения (3).

Отметим связь рассмотренной обратной задачи с задачами томографии. Интеграл в уравнении (3) имеет специальный вид и представляет собой интеграл от функции $\xi(r')$ с весовым множителем по двумерной поверхности пересечения области H и эллипсоида $t = (|r' - r| + |r' - q|)/c_0$ при различных значениях параметров t, r, q . Параметры r и q определяют фокусы эллипсоидов, при увеличении параметра t эллипсоиды расширяются.

Подобная задача относится к области томографических задач, в которых требуется найти некоторую функцию в $\mathbb{R}^3$ по известным интегралам от этой функции вдоль различных двумерных поверхностей [4, 7]. Остановимся на методах решения томографического уравнения (3). К настоящему времени разработан богатый арсенал методов, в число которых входит метод ρ -фильтрации обратной проекции. Идея метода состоит в сведении уравнения (3) к уравнению, которое в операторной записи имеет вид $R^*U = R^*R\xi$, где R — интегральный оператор в (3) и R^* — оператор, имеющий вид

$$R^*U(r, q, t) = - \int_Y \int_{t \geq 0} \frac{1}{16\pi^2|r' - r||r' - q|} \delta\left(t - \frac{|r' - r| + |r' - q|}{c_0}\right) U(r, q, t) dt dr = v(r', q). \quad (4)$$

Здесь $r' \in \mathbb{R}^3$.

Вычисление выражения (4) сводится к интегрированию измеренной в ходе эксперимента функции $U(r, q, t)$ с весовым множителем по гиперболоидам $t = (|r' - r| + |r' - q|)/c_0$ при различных значениях

параметров r', q . Интересно отметить, что идеи метода миграции, широко распространенного в обратных задачах сейсморазведки [2, 3], сводятся именно к вычислению выражения (4) от известной функции $U(r, q, t)$. Таким образом, в методе миграции для обращения интегрального уравнения (3) применяется оператор R^* . Нетрудно видеть, что в рассматриваемой задаче оператор R^* отличен от обратного оператора R^{-1} .

Будем рассматривать задачу (3) при $r = q$, что соответствует эксперименту, при котором измерения поля проводятся в точке взрыва q . В сейсморазведке задача с таким набором данных называется zero-offset data. Предполагается, что данные $U(r, r, t)$ регистрируются на поверхности $z = 0$ ($r = (x, y, 0)$); тем самым, область Y совпадает с плоскостью $z = 0$.

Для этого случая в работе [7] получено выражение

$$R^* R \xi = c_0 \int_H \frac{1}{|\bar{r} - r'|^2 |\bar{r} - r'^*|^2} \sqrt{(\bar{x} - x')^2 + (\bar{y} - y')^2} \xi(r') dr' = R^* U = v(\bar{r}), \quad (5)$$

где $r' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $\bar{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$ и $r'^* = (x', y', -z') \in \mathbb{R}^3$. Как можно заметить из (5), ядро оператора $R^* R$ имеет особенность в точке r' , однако $R^* R$ не является единичным оператором. Выражение (5) показывает, что функция $R^* U = v(\bar{r})$, рассматриваемая в методе миграции как реконструированное изображение, на самом деле существенно отличается от $\xi(r')$. Используя теорию регуляризации Тихонова для построения семейства приближенных решений $\xi^\alpha(r')$, можно получить явное выражение для приближенного решения уравнения (5):

$$\xi^\alpha(r') + \xi^\alpha(r'^*) = z' F^{-1} \left(\frac{|w_3|}{(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)^{3/2} + \alpha} \right) F(\bar{z} R^* U). \quad (6)$$

Здесь F, F^{-1} — прямое и обратное преобразование Фурье в $\mathbb{R}^3$ и α — параметр регуляризации в схеме Тихонова [1, 5]. Используя априорную информацию о том, что H располагается в полуплоскости $z > 0$, мы рассматриваем только те $\xi^\alpha(r')$, для которых $z' > 0$.

4. Модельные расчеты на кластерных системах. Был выполнен комплекс модельных расчетов по решению прямой и обратной задачи рассмотренными выше методами. Поскольку обсуждаемая задача является трехмерной, то необходимо обрабатывать очень большие массивы данных, что требует значительных вычислительных затрат. Простые оценки показывают, что решать подобные задачи на однопроцессорных компьютерах можно только на достаточно грубых сетках, а это снижает практическую значимость результатов. Современные установки по регистрации сейсмических данных позволяют получать объемы данных, которые нереально обработать на однопроцессорных компьютерах. В связи с этим работы по проекту были изначально нацелены на разработку методов и алгоритмов, которые допускают эффективную реализацию на параллельных компьютерах с распределенной памятью.

Наиболее распространенной технологией программирования для такого рода компьютеров в настоящее время является технология MPI. Был выбран стандарт MPI в версии 1.1, так как современные реализации MPI чаще всего соответствуют именно этому стандарту. Кроме того, версия 1.1 позволяет использовать доступные библиотеки программ, написанные для параллельных компьютеров. Одной из таких библиотек является библиотека FFTW (версия 2.1.3) быстрого дискретного преобразования Фурье. Расчеты проводились на кластере АНТ НИВЦ МГУ.

На первом этапе модельных расчетов решалась прямая задача. Решение прямой задачи необходимо для получения расчетных данных, которые в дальнейшем используются в обратной задаче. Модельная неоднородность в прямой задаче задается функцией $\xi(r)$, при этом регистрация совпадает с местом возмущения среды и выполняется на плоскости $z = 0$ в декартовой системе координат $Oxyz$, такой, что ось z направлена вниз, а неоднородность располагается в полуплоскости $z > 0$. На рис. 2 приведены сечения в плоскости Oxz трех модельных неоднородностей, описываемых функцией $\xi(r)$.

Модельные экспериментальные данные $U(r, r, t)$ вычисляются по формуле (3). В нашем случае $r \in \mathbb{R}^2$ и $t \in \mathbb{R}^1$; таким образом, экспериментальные данные $U(r, r, t)$ представляют собой функцию трех переменных (x, y, t) , где x и y — координаты плоскости $z = 0$. Как легко видеть из формулы (3), вычисление функции U для каждой точки (x, y, t) некоторой сетки проводится независимо. Это свойство функции U позволяет создать эффективный параллельный алгоритм ее вычисления. При этом обмен данными между параллельными процессами практически отсутствует, что приводит к высокой масштабируемости процесса вычислений.

Был разработан пакет программ решения прямой задачи на параллельных компьютерах. Интеграл в формуле (3) вычислялся методом средних прямоугольников. В табл. 1 приведена зависимость времени

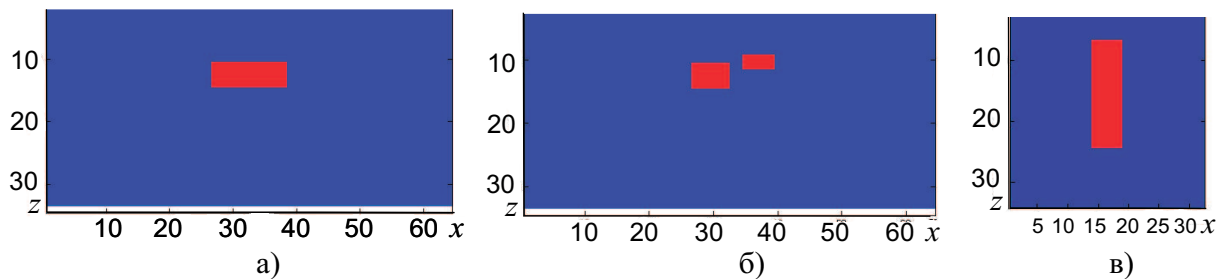


Рис. 2. Сечения трех модельных неоднородностей в плоскости Oxz

расчетов от числа используемых процессоров кластера на сетке, состоящей из 22 272 точек. Хотя написанный на первом этапе пакет расчета прямой задачи не претендует на очень высокую эффективность, однако он показал хорошую масштабируемость задачи и позволил выполнить вычисления для задачи большой размерности.

Таблица 1
Масштабируемость прямой задачи

Количество точек	Количество процессоров	Время решения, сек.
22 272	1	211
	2	108
	4	57
	8	31
	16	18

Таблица 2
Масштабируемость задачи миграции

Количество точек	Количество процессоров	Время решения, сек.
131 072	1	253
	2	129
	4	67
	8	35
	16	19

На втором этапе решалась обратная задача описанными выше методами. Были проведены модельные расчеты по реконструкции трехмерных объектов методом обращения по формуле (6) и методом миграции по формуле (4). Как видно из (4), вычисления методом миграции являются прямыми вычислениями, т.е. необходимо вычислить интеграл от известных экспериментальных данных $R^*U(r, t)(\bar{r})$ для набора точек $\bar{r} \in \mathbb{R}^3$.

Легко видеть, что вычисления методом миграции для каждой точки $\bar{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$ некоторой сетки проводятся независимо. Это свойство, как и в случае прямой задачи, позволяет создать эффективный параллельный алгоритм, что приводит к высокой масштабируемости процесса. Был разработан пакет программ решения задачи миграции на параллельных компьютерах. В табл. 2 приведена зависимость времени расчетов от числа используемых процессоров кластера на сетке, состоящей из 131 072 точек. Алгоритм показал высокую масштабируемость, что в перспективе позволит провести вычисления для задач большой размерности.

На рис. 3 показаны сечения в плоскости Oxz трех восстановленных методом миграции модельных неоднородностей (см. рис. 2).

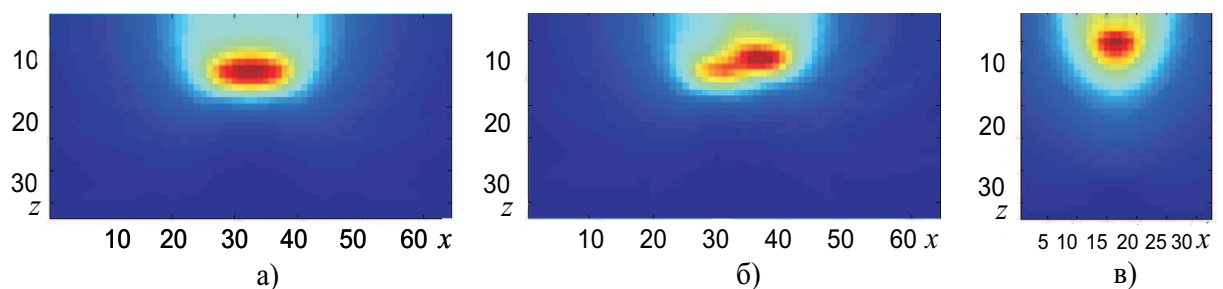


Рис. 3. Сечения в плоскости Oxz трех неоднородностей, восстановленных методом миграции

Из рисунков видно, что метод миграции позволяет получать лишь размазанное изображение. В этой связи на заключительном этапе проводилась реконструкция изображения методом обращения по формуле (6), позволяющей получать более качественное изображение, чем методом миграции. Как видно из (5), этот метод состоит из двух шагов: на первом шаге экспериментальные данные обрабатываются

методом миграции, а на втором — решается уравнение типа свертки с помощью преобразования Фурье. При написании пакета программ была использована библиотека FFTW для вычисления преобразования Фурье на параллельных компьютерах. Процедура вычисления преобразования Фурье, очевидно, не допускает такого эффективного распараллеливания, которого можно достигнуть в методе миграции. Однако время, затрачиваемое на втором шаге на решение уравнения свертки, примерно в 20 раз меньше, чем на первом шаге (миграции). В перспективе использование параллельных процессоров позволит перейти к задачам большей размерности за счет использования распределенной памяти. На рис. 4 приведены сечения в плоскости Oxz трех восстановленных методом обращения модельных неоднородностей.

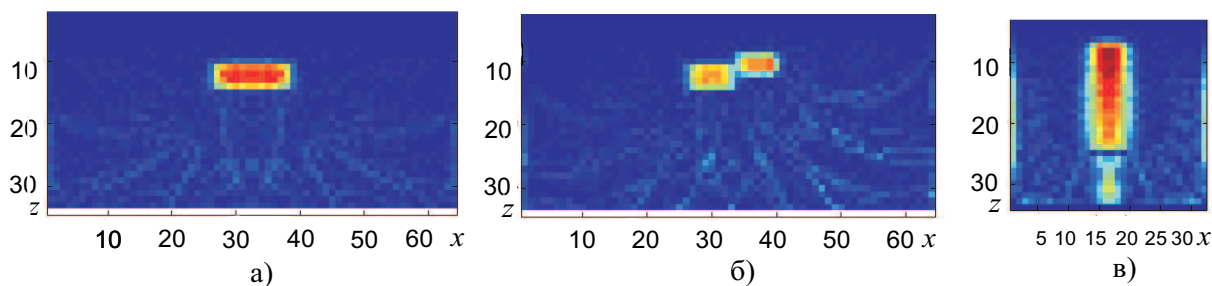


Рис. 4. Сечения в плоскости Oxz трех неоднородностей, восстановленных по формуле (6)

Из сравнения рисунков видно, что изображение, реконструированное методом обращения, имеет лучшее качество, чем в случае метода миграции, который позволяет получать лишь размытое изображение с невысоким разрешением. Метод обращения существенно повышает разрешающую способность алгоритма.

5. Заключение. Результаты модельных расчетов показали, что рассматриваемые задачи акустического зондирования и инженерной сейсмологии в волновом приближении в трехмерных физических средах не могут быть решены на однопроцессорных компьютерах, поскольку огромные объемы вычислений и размеры массивов обрабатываемых данных приводят к неприемлемым временным затратам и нехватке оперативной памяти.

Использование параллельных компьютерных технологий для рассмотренных задач является эффективным как с алгоритмической точки зрения, так и по времени выполнения расчетов, что позволяет ставить гораздо более сложные задачи и на порядки увеличивать размерности задач. Это приводит к возможности оптимизации схем экспериментов, параметров задач, используемых источников, приемников, аппаратуры.

Томографический подход и современные методы решения обратных задач позволили создать технологию исследования высокого разрешения, которая может быть реализована только с использованием технологий параллельных вычислений. Выполненные модельные расчеты показали высокую эффективность и масштабируемость разработанного программного обеспечения.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность чл.-кор. РАН Вл. В. Воеводину за постоянное внимание к работе, а также с.н.с. А. С. Антонову за консультации в области параллельных вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V. Ill-posed problems. Theory and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994.
2. Yilmaz O. Seismic data processing. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 1987.
3. Baysal E., Kosloff D.D., Sherwood J.W.C. Reverse time migration // Geophysics. 1983. **48**. 1514–1524.
4. Natterer F. The mathematics of computerized tomography. Stuttgart: Wiley & Sons, 1986.
5. Тухонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН. 1963. **153**, № 1. 49–52.
6. Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V., Romanov S.Yu., Seatzu S. On the identification of velocity in seismic and in acoustic sounding. Firenze, 1994.
7. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Об одной трехмерной задаче диагностики в волновом приближении // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 9. 1364–1367.
8. Головина С.Г., Романов С.Ю., Степанов В.В. Об одной обратной задаче сейсмологии // Вестник МГУ. Вычисл. матем. и киберн. 1994. № 4. 16–21.

Поступила в редакцию
11.12.2005