

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КИЛЬВАТЕРНЫХ ВОЛН В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Л. М. Горбунов¹, Е. В. Чижонков²

Для решения системы нелинейных уравнений в частных производных, описывающей трехмерную динамику ионов и электронов в плазменной кильватерной волне, возбуждаемой мощным коротким лазерным импульсом, предложена разностная схема и итерационный алгоритм ее реализации. Существенным отличием настоящей работы является отказ от аксиальной симметрии задачи, что приводит к усложнению уравнений и повышению размерности. Результаты численного моделирования иллюстрируют различие в кильватерных волнах, порождаемых импульсами кругового и эллиптического сечений. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00511).

1. Введение. В последние годы достигнут значительный прогресс в генерации ультракоротких мощных лазерных импульсов. Распространяясь в плазме, такой импульс возбуждает позади себя колебания плотности электронов (так называемую кильватерную волну). В электрическом поле кильватерной волны, возникающем из-за разделения зарядов электронов и ионов плазмы, возможно эффективное ускорение электронов до высоких энергий [1]. Обычно, рассматривая распространение лазерных импульсов и возбуждение кильватерных волн, используют ряд упрощающих предположений. Например, пренебрегают движением ионов, масса которых более чем на три порядка превышает массу электронов. Однако в недавних экспериментах [2, 3], выполненных при высоких интенсивностях лазерного излучения, были обнаружены потоки быстрых ионов. Очевидно, что описание такого рода эффектов требует учета движения ионов, поэтому первоначально используемая модель плазмы [4] была модернизирована в [5] добавлением необходимых уравнений для ионов. Другое традиционное упрощение состоит в предположении об аксиальной симметрии задачи. В действительности распределение интенсивности излучения в лазерном импульсе в той или иной степени отличается от аксиально-симметричного, что отражается на структуре кильватерных волн. В данной работе аксиальная симметрия задачи не предполагается, что приводит к увеличению как числа уравнений, так и количества независимых переменных.

Для описания лазерного импульса мы используем уравнение для огибающей высокочастотного поля, для описания плазмы — систему усредненных по высокочастотному движению релятивистских гидродинамических уравнений для электронов и нерелятивистские гидродинамические уравнения для ионов, а для описания электромагнитных полей в плазме — уравнения Максвелла. На базе такой модели проведено численное моделирование эволюции возбуждаемых коротким лазерным импульсом полностью трехмерных (не обязательно аксиально-симметричных!) нелинейных кильватерных волн, учитывающее также и движение ионов плазмы. Насколько известно авторам, численное моделирование взаимодействия лазерного импульса с плазмой на основе полной трехмерной системы гидродинамических уравнений ранее не проводилось.

Система гидродинамических уравнений (см., например, [4]) для холодных, идеальных, релятивистской электронной и нерелятивистской ионной жидкостей совместно с уравнениями Максвелла и уравнением для огибающей имеет следующий вид:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} (n_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t} = e \mathbf{E} - m_e c^2 \nabla \gamma, \quad (1.2)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p_e^2}{m_e^2 c^2} + \frac{|a|^2}{2}}, \quad (1.3)$$

¹ Физический институт РАН им. П.Н. Лебедева, Ленинский проспект, д. 53, 119991, Москва; e-mail: gorbun@sci.lebedev.ru

² Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{p}_e}{m_e \gamma}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} (n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = \frac{e_i}{m_i} \mathbf{E}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -4\pi(e n_e \mathbf{v}_e + e_i n_i \mathbf{v}_i) - \frac{c^2}{e} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{p}_e, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{c}{e} \operatorname{rot} \mathbf{p}_e. \quad (1.8)$$

Здесь e, e_i, m_e, m_i — заряды и массы электронов и ионов соответственно; c — скорость света; $n_e, \mathbf{p}_e, \mathbf{v}_e$ — концентрация, удельный импульс и скорость электронов; $n_i, \mathbf{v}_i$ — концентрация и скорость ионов; γ — лоренцевский фактор; $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ — напряженности электрического и магнитного полей, a — комплексная амплитуда лазерного поля (так называемая огибающая), определяемая уравнением

$$\left(\frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} + \Delta_{\perp} \right) a = \frac{\omega_{p0}^2}{c^2} \left(\frac{n_e}{n_{e0}\gamma} - 1 \right) a, \quad (1.9)$$

где i — мнимая единица, ω, k — частота и волновое число лазерного импульса, распространяющегося вдоль оси OZ ; n_{e0} — концентрация электронов перед лазерным импульсом, где плазма считается нейтральной ($e_i n_{i0} + e n_{e0} = 0$), $\omega_{p0} = \sqrt{\frac{4\pi n_{e0} e^2}{m_e}}$ — плазменная частота, $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — поперечная часть оператора Лапласа.

2. Постановка задачи. Введя новые независимые переменные $\eta = \frac{\omega_{p0}}{c} (z - ct)$, $x' = \frac{\omega_{p0}}{c} x$, $y' = \frac{\omega_{p0}}{c} y$, $\theta = \omega_{p0} t$ и новые безразмерные функции $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{p}_e}{m_e c} = (q_x, q_y, q_z)^T$, $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_i}{c} = (v_x, v_y, v_z)^T$, $b_z = \frac{e B_z}{m_e c \omega_{p0}}$, $\nu = \frac{n_i}{n_{i0}}$, $\psi = q_z - \gamma$, $\beta = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$, $\varphi = \frac{\nu_e}{\gamma}$, из уравнений (1.1)–(1.9) в квазистатическом приближении $\frac{\partial}{\partial \theta} \ll \frac{\partial}{\partial \eta}$, $\varepsilon = \frac{\omega_{p0}}{\omega} \ll 1$, $|\mathbf{v}| \ll 1$ получим исходную для численного моделирования систему уравнений. В результате математическое описание исследуемой проблемы выглядит следующим образом. В области $\Omega \times [0, T_{\max}]$, где $\Omega = \{(x', y', \eta) : |x'| \leq X_{\max}, |y'| \leq Y_{\max}, Z_{\min} \leq \eta \leq Z_{\max}\}$, $0 \leq \theta \leq T_{\max}$, найти решение системы уравнений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \beta = 0, \quad (2.1)$$

$$v_z + \delta(1 + \psi) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [\nu(v_z - 1)] + \frac{\partial}{\partial x'} (\nu v_x) + \frac{\partial}{\partial y'} (\nu v_y) = 0, \quad (2.3)$$

$$\varphi \psi - \Delta_{\perp} \psi + \nu(1 - v_z) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x'} + \frac{\partial q_y}{\partial y'} \right) - \Delta_{\perp} \gamma + \varphi \gamma - \nu = 0, \quad (2.5)$$

$$q_x \varphi + \frac{\partial \beta}{\partial x'} - \nu v_x - \frac{\partial b_z}{\partial y'} = 0, \quad (2.6)$$

$$q_y \varphi + \frac{\partial \beta}{\partial y'} - \nu v_y + \frac{\partial b_z}{\partial x'} = 0, \quad (2.7)$$

$$2\gamma \psi + \psi^2 + q_x^2 + q_y^2 + 1 + \frac{|a|^2}{2} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial \eta} - \delta \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x'} - \frac{\partial q_x}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial \eta} - \delta \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y'} - \frac{\partial q_y}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (2.10)$$

$$b_z = \frac{\partial q_x}{\partial y'} - \frac{\partial q_y}{\partial x'}, \quad (2.11)$$

$$\frac{2i}{\varepsilon} \frac{\partial a}{\partial \theta} + \Delta_{\perp} a + (1 - \varphi) a = 0. \quad (2.12)$$

Система зависит от двух числовых коэффициентов $\delta = -\frac{e_i m_e}{\varepsilon m_i}$ и $\varepsilon = \frac{\omega_{p0}}{\omega}$, а ее решение представляют 12 функций $\psi, \beta, \varphi, \gamma, \nu, v_x, v_y, v_z, q_x, q_y, b_z, a$, которые в силу специфики постановки зависят от независимых переменных различным образом. Например, первые 11 из них — вещественные функции, неявно зависящие от временной переменной θ и явно — от переменных x', y', η ; они связаны замкнутой системой (2.1)–(2.11), в которую в качестве заданной функции входит величина $|a|^2/2$ (см. уравнение (2.8)), зависящая от времени. Это означает, что указанные неизвестные функции зависят от времени как от внешнего параметра. С другой стороны, комплекснозначная функция a , удовлетворяющая уравнению (2.12), явно зависит от переменных θ, x', y' и неявно — от η : зависимость от последней проявляется через функцию φ , которая входит в уравнение в виде заданного коэффициента.

Для однозначного определения искомых функций требуются дополнительные (начальные и граничные) условия. Опишем их структуру для полноты постановки задачи. В начальный момент $\theta = 0$ задается огибающая

$$a(x', y', \eta) = a_* \exp \left\{ -\frac{(x')^2 + \alpha(y')^2}{\rho_*^2} - \frac{\eta^2}{l_*^2} \right\}, \quad (2.13)$$

где a_*, α, ρ_*, l_* — безразмерные параметры, определяющие амплитуду и геометрическую форму лазерного импульса. Заметим, что значение $\alpha = 1$ соответствует импульсу кругового сечения, с которым допустимо аксиально-симметричное описание постановки задачи. Для простоты предполагается, что центр импульса всегда находится в точке $(0, 0, 0)$.

Сформулируем требования к согласованию параметров импульса и размеров области Ω . Физическая постановка задачи предусматривает, что поперечное сечение импульса существенно меньше поперечного размера области, занятой плазмой, т.е. $\rho_* \ll X_{\max}, \rho_* \ll Y_{\max}$. Типичные значения величин, использовавшиеся в расчетах: $1.5 \leq \rho_* \leq 2.5, 5 \leq X_{\max} = Y_{\max} \leq 8$. Продольные характеристики области Ω выбирались из других соображений: $l_* \ll Z_{\max}$, а значение $Z_{\min}$ определялось только исследовательскими целями и имеющимися вычислительными ресурсами; значения в расчетах: $l_* = 3.5, Z_{\max} = 11, Z_{\min} = -12$.

Таким образом, указанное согласование фактически означает моделирование следующей ситуации. Перед импульсом ($\eta \geq Z_{\max}$) имеется невозмущенная плазма: $\psi = -1, \varphi = \gamma = \nu = 1, \beta = v_x = v_y = v_z = q_x = q_y = b_z = 0$. Затем (при $Z_{\min} \leq \eta \leq Z_{\max}$) плазма меняет свою структуру в соответствии с решением системы (2.1)–(2.11), однако в поперечной плоскости импульс локализован настолько, что граничные значения функций (при $|x| = X_{\max}, |y| = Y_{\max}$) вполне можно считать невозмущенными, т.е. соответствующими состоянию покоя. Далее возмущения плазмы приводят к изменению импульса в соответствии с уравнением (2.12), но эти изменения сосредоточены в некоторой подобласти, отстоящей от границы Ω настолько далеко, что практически не влияют на состояние покоя на периферии. Конечно, рано или поздно возмущения станут значимыми и на поперечных границах, но это вполне регулируется либо изменением положения самих границ, либо величиной времени моделирования $T_{\max}$.

3. Разностная схема и метод решения. Для построения разностной схемы нам потребуются смещенные сетки D_i ($0 \leq i \leq 3$) в плоскости переменных (x', y') . Пусть M_x, M_y — число узлов по переменным x', y' соответственно. Введем обозначения $h_x = \frac{2X_{\max}}{M_x}, h_y = \frac{2Y_{\max}}{M_y}$ и определим:

$$\begin{aligned} D_0 &= \{(x_k, y_l) : x_k = k h_x, |k| \leq M_x; y_l = l h_y, |l| \leq M_y\}, \\ D_1 &= \{(x_k, y_l) : x_k = (k + 1/2) h_x, -M_x \leq k \leq M_x - 1; y_l = l h_y, |l| \leq M_y\}, \\ D_2 &= \{(x_k, y_l) : x_k = k h_x, |k| \leq M_x; y_l = (l + 1/2) h_y, -M_y \leq l \leq M_y - 1\}, \\ D_3 &= \{(x_k, y_l) : x_k = (k + 1/2) h_x, -M_x \leq k \leq M_x - 1; y_l = (l + 1/2) h_y, -M_y \leq l \leq M_y - 1\}. \end{aligned}$$

Обозначая $h_z = \frac{Z_{\max} - Z_{\min}}{M_z}$, где M_z — число узлов по переменной η , построим дискретные аналоги

исходной области Ω в виде $\Omega_{i,h} = \{(x_k, y_l, \eta_j) : (x_k, y_l) \in D_i, \eta_j = Z_{\min} + j h_z, 0 \leq j \leq M_z\}, 0 \leq i \leq 3$. Различные $\Omega_{i,h}$ далее будем использовать в качестве областей определения групп неизвестных сеточных функций: на $\Omega_{0,h}$ определены $a, \psi, \varphi, \nu, vz, \beta$ и γ , на $\Omega_{1,h}$ — qx и vx , на $\Omega_{2,h}$ — qy и vy , на $\Omega_{3,h}$ — bz . Здесь и далее нижние индексы у функций используются в качестве продолжений наименований (например, $b_z \rightarrow bz$), чтобы избежать путаницы с индексами узлов сетки.

Используя для сеточных функций обозначения вида $f(x_k, y_l, \eta_j, \theta_n) = f_{k,l,j}^n, \theta_n = n\tau, n \geq 0$, приведем разностные уравнения, опуская некоторые индексы там, где это не должно вызывать недоразумений.

Сначала выпишем блок явных вычислений в $\Omega_{0,h}$ для последовательного определения функций ψ, vz, ν, φ в сторону уменьшения индекса j :

$$\frac{\psi_{k,l,j+1} - \psi_{k,l,j}}{h_z} - \beta_{k,l,j+1} = 0, \quad (3.1)$$

$$vz_{k,l,j} + \delta(1 + \psi_{k,l,j}) = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_{k,l,j+1}(vz_{k,l,j+1} - 1) - \nu_{k,l,j}(vz_{k,l,j} - 1)}{h_z} + \\ & + \frac{1}{h_x} \left(vx_{k+1,l,j+1} \frac{\nu_{k+1,l,j+1} + \nu_{k,l,j+1}}{2} - vx_{k,l,j+1} \frac{\nu_{k-1,l,j+1} + \nu_{k,l,j+1}}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{h_y} \left(vy_{k,l+1,j+1} \frac{\nu_{k,l+1,j+1} + \nu_{k,l,j+1}}{2} - vy_{k,l,j+1} \frac{\nu_{k,l-1,j+1} + \nu_{k,l,j+1}}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\varphi_{k,l,j} \psi_{k,l,j} - \Delta \psi_{k,l,j} + \nu_{k,l,j}(1 - vz_{k,l,j}) = 0. \quad (3.4)$$

Здесь имеется в виду, что по известным значениям функций ψ, vz, ν, φ на слое с номером $j+1$ определяются их значения на слое с номером j во внутренних узлах области D_0 . Значения в граничных узлах области D_0 при этом не изменяются. Таким образом, интегрирование по переменной η ведется в направлении ее убывания. Остальные функции, участвующие в вычислениях этого блока, считаются известными (ранее определенными).

Следующие семь уравнений объединены в неявный блок для определения функций $\beta, qx, qy, \gamma, vx, vy, bz$:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_{k,l,j+1} - \beta_{k,l,j}}{h_z} - \Delta \gamma_{k,l,j} + \varphi_{k,l,j} \gamma_{k,l,j} - \nu_{k,l,j} + \frac{1}{h_x h_z} (qx_{k+1,l,j+1} - qx_{k+1,l,j} - qx_{k,l,j+1} + qx_{k,l,j}) + \\ & + \frac{1}{h_y h_z} (qy_{k,l+1,j+1} - qy_{k,l+1,j} - qy_{k,l,j+1} + qy_{k,l,j}) = 0 \quad \text{в } \Omega_{0,h}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$qx_{k,l,j} \frac{\varphi_{k,l,j} + \varphi_{k-1,l,j}}{2} + \frac{\beta_{k,l,j} - \beta_{k-1,l,j}}{h_x} - vx_{k,l,j} \frac{\nu_{k,l,j} + \nu_{k-1,l,j}}{2} - \frac{bz_{k,l+1,j} - bz_{k,l,j}}{h_y} = 0 \quad \text{в } \Omega_{1,h}, \quad (3.6)$$

$$qy_{k,l,j} \frac{\varphi_{k,l,j} + \varphi_{k,l-1,j}}{2} + \frac{\beta_{k,l,j} - \beta_{k,l-1,j}}{h_y} - vy_{k,l,j} \frac{\nu_{k,l,j} + \nu_{k,l-1,j}}{2} + \frac{bz_{k+1,l,j} - bz_{k,l,j}}{h_x} = 0 \quad \text{в } \Omega_{2,h}, \quad (3.7)$$

$$2\gamma_{k,l,j} \psi_{k,l,j} + \psi_{k,l,j}^2 + \left(\frac{qx_{k,l,j} + qx_{k+1,l,j}}{2} \right)^2 + \left(\frac{qy_{k,l,j} + qy_{k,l+1,j}}{2} \right)^2 + 1 + \frac{|a_{k,l,j}^{n+1}|^2}{2} = 0 \quad \text{в } \Omega_{0,h}, \quad (3.8)$$

$$\frac{vx_{k,l,j+1} - vx_{k,l,j}}{h_z} + \delta \frac{qx_{k,l,j+1} - qx_{k,l,j}}{h_z} = \delta \frac{\gamma_{k,l,j} - \gamma_{k-1,l,j}}{h_x} \quad \text{в } \Omega_{1,h}, \quad (3.9)$$

$$\frac{vy_{k,l,j+1} - vy_{k,l,j}}{h_z} + \delta \frac{qy_{k,l,j+1} - qy_{k,l,j}}{h_z} = \delta \frac{\gamma_{k,l,j} - \gamma_{k,l-1,j}}{h_y} \quad \text{в } \Omega_{2,h}, \quad (3.10)$$

$$bz_{k,l,j} - \frac{qx_{k,l,j} - qx_{k,l-1,j}}{h_y} + \frac{qy_{k,l,j} - qy_{k-1,l,j}}{h_x} = 0 \quad \text{в } \Omega_{3,h}. \quad (3.11)$$

Выше для поперечной части оператора Лапласа $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial(x')^2} + \frac{\partial^2}{\partial(y')^2}$ в узле (x_k, y_l) использована стандартная пятиточечная аппроксимация “крест”:

$$\Delta f_{k,l} = \frac{f_{k+1,l} - 2f_{k,l} + f_{k-1,l}}{h_x^2} + \frac{f_{k,l+1} - 2f_{k,l} + f_{k,l-1}}{h_y^2}.$$

В неявном блоке, как и ранее, значения переменных на слое $j+1$ известны, кроме того, уже вычислены

переменные из явного блока. Поэтому уравнения (3.5)–(3.11) решались внутри областей D_i ($0 \leq i \leq 3$) с использованием невозмущенных величин в качестве граничных значений. Для нахождения приближенного решения системы нелинейных разностных уравнений применялся метод Ньютона с обращением линейной части оператора на основе пакета UMFPACK [6], предназначенного для решения больших систем уравнений с несимметричными разреженными матрицами. Точность фиксировалась максимальной по индексам k, l и всем уравнениям величиной невязки, не превосходящей $\delta_{\text{newt}} = 10^{-3}$. Как правило, это соответствовало не более чем трем ньютоновским итерациям.

Суммируя описанное выше, сформулируем итерационную процедуру решения уравнений (3.1)–(3.11). Пусть в момент времени θ_{n+1} известна функция $a_{k,l,j}^{n+1}$, входящая в уравнение (3.8). Тогда последовательно для каждого $j = M_z - 1, M_z - 2, \dots, 0$ производятся вычисления сначала в явном, а затем в неявном блоке, и этот процесс порождает значения всех функций, описывающих поведение плазмы.

Далее из полученного выше решения берется функция $\varphi_{k,l,j}$, чтобы доопределить уравнение для импульса:

$$\frac{2i}{\varepsilon \theta_*} \frac{a_{k,l,j}^{n+1} - a_{k,l,j}^n}{\tau} + \Delta a_{k,l,j}^{n+1} + (1 - \varphi_{k,l,j}) a_{k,l,j}^{n+1} = 0.$$

Это уравнение решалось итерационным методом типа сжимающих отображений (s — номер итерации):

$$\frac{2i}{\varepsilon \theta_*} \frac{a_{k,l,j}^{n+1,s+1} - a_{k,l,j}^{n+1,s}}{\tau} + \Delta a_{k,l,j}^{n+1,s+1} + (1 - \varphi_{k,l,j}^s) a_{k,l,j}^{n+1,s+1} = 0, \quad (3.12)$$

где начальное приближение выбиралось как $a_{k,l,j}^{n+1,0} = a_{k,l,j}^n$, а $\varphi_{k,l,j}^s$ — решение системы (3.1)–(3.11), в которой для функции $a_{k,l,j}^{n+1}$ использовались ее значения на предыдущей итерации, т.е. $a_{k,l,j}^{n+1,s}$. Процесс повторяли до тех пор, пока $\max_{k,l,j} |a_{k,l,j}^{n+1,s+1} - a_{k,l,j}^{n+1,s}| > \delta_{it} = 10^{-3}$. После одной-двух итераций такого вида искомое значение $a_{k,l,j}^{n+1}$ для момента времени θ_{n+1} было получено и внешний цикл заканчивался.

Таким образом, полный шаг по времени представлял собой двойной вложенный итерационный цикл: внутренний — ньютоновский для семи функций системы (3.5)–(3.11) и внешний — типа сжимающих отображений для функции a с помощью соотношения (3.12).

Сделаем замечание о порядках аппроксимации построенной схемы относительно шагов по x' , y' , η и θ . По временной переменной θ схема выбрана полностью неявной, что определяет аппроксимацию первого порядка; по пространственным переменным x' и y' использование смещенных сеток приводит к аппроксимации второго порядка. В отношении дискретизации по переменной η дело обстоит сложнее. Если рассматривать формальные аппроксимации производных, входящих в уравнения (3.1)–(3.11), то порядок аппроксимации равен единице. Однако предложенная разностная схема обладает дополнительным свойством, проявляющимся на задачах, близких к линейным. Поясним это подробнее. Пусть возмущения фоновых значений для величин, описывающих плазму, малы, например, $\psi = -1 + \tilde{\psi}$, $\gamma = 1 + \tilde{\gamma}$, $|\tilde{\psi}| \ll 1$, $|\tilde{\gamma}| \ll 1$. Тогда исходную систему (2.1)–(2.11) можно линеаризовать в окрестности фона. Пренебрегая членами второго порядка малости, получим линейную задачу, из которой после исключения неизвестных следует одно базовое уравнение для возмущения потенциала: $\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \eta^2} + (1 + \delta)\tilde{\psi} + \frac{|a|^2}{4} = 0$. Возмущения остальных величин выражаются явным образом через $\tilde{\psi}$. Если подобные преобразования проделать с дискретными уравнениями (3.1)–(3.11), то в результате получится схема

$$\frac{\tilde{\psi}_{k,l,j+1} - 2\tilde{\psi}_{k,l,j} + \tilde{\psi}_{k,l,j-1}}{h_z^2} + (1 + \delta)\tilde{\psi}_{k,l,j} + \frac{|a_{k,l,j}^{n+1}|^2}{4} = 0,$$

очевидно имеющая второй порядок аппроксимации по переменной η . Тестовые вычисления подтверждают наличие этого свойства в слабонелинейных вариантах задачи.

4. Результаты расчетов. Численное моделирование проводилось для неизменного импульса вида (2.13) и показало, что короткий лазерный импульс ($l_* = 3.5$) эффективно возбуждает кильватерную волну, которая, воздействуя на ионы, образует позади лазерного импульса область с пониженной плотностью плазмы (плазменный канал). По мере удаления от импульса глубина канала возрастает, что приводит в конце концов к разрушению кильватерной волны.

Особый интерес представляет сравнение волн, возбуждаемых импульсами с различными поперечными сечениями. Эти расчеты проводились в области $\Omega = [-7, 7] \times [-7, 7] \times [-12, 11]$; при $\delta = 0$ (т.е. при неподвижных ионах) центр импульса находился в точке $\{0, 0, 0\}$; сетка содержала $31 \times 31 \times 231$ узлов; остальные параметры импульса: $a_* = 1.0$, $\rho_* = 1.8$.

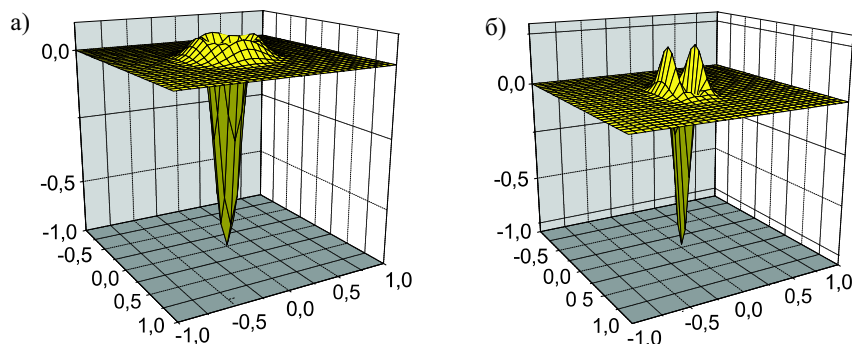


Рис. 1

На рис. 1а и 1б показаны возмущения плотности электронов на расстоянии половины периода от центра импульса: левый рисунок соответствует импульсу кругового сечения ($\alpha = 1$), правый — эллиптическому ($\alpha = 4$). Хорошо заметно различие в геометрической форме функций, возникающее при отказе от аксиальной симметрии задачи, при этом границы изменения функций практически одинаковы.

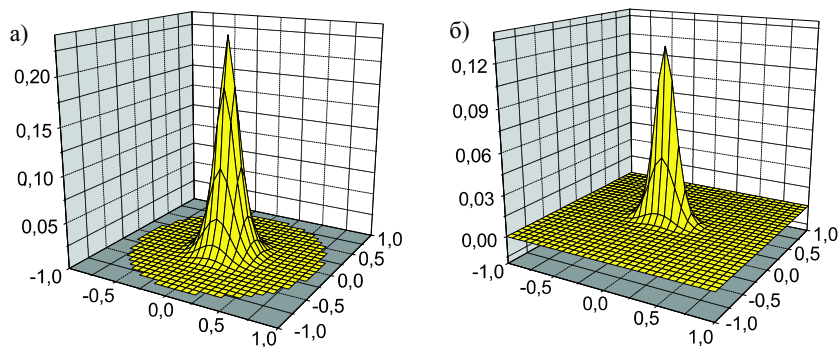


Рис. 2

На рис. 2а и 2б показаны возмущения потенциала на том же расстоянии от центра импульса и для тех же параметров. Здесь ситуация несколько другая: геометрические формы близки, зато существенно различие в абсолютных значениях (они расходятся более чем в два раза).

Основной итог работы можно сформулировать так: для решения системы нелинейных уравнений в частных производных, описывающей трехмерную динамику ионов и электронов в плазменной кильватерной волне, возбуждаемой мощным коротким лазерным импульсом, предложена разностная схема и итерационный алгоритм ее реализации; стартовые численные эксперименты показывают, что физические выводы, полученные на основе моделирования только аксиально-симметричных кильватерных волн, могут претерпеть существенные изменения, так как влияние геометрии инициирующего лазерного импульса велико не только качественно, но и количественно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Esarey E., Sprangle P., Krall J., Ting A. Overview of plasma-based accelerator concepts // IEEE Trans. on Plasma Science. 1996. **24**. 252–288.
2. Fuchs J., Malka G., Adam J.C., Amiranoff F., Baton S.D., Blanchot N., Heron A., Laval G., Mignel J.L., Mora P., Pepin H., Rousseaux C. Dynamics of subpicosecond relativistic laser pulse self-channeling in an underdense preformed plasma // Physical Review Letters. 1998. **80**, N 8. 1658–1661.
3. Krushelnick K., Clark E.L., Najmudin Z., Salvati M., Santala M.I.K., Tatarakis M., Dangor A.E., Malka V., Neely D., Allot R., Danson C. Multi-mev ion production from high-intensity laser interactions with underdense plasmas // Physical Review Letters. 1999. **83**, N 4. 737–740.
4. Andreev N.E., Chizhonkov E.V., Gorbunov L.M. Numerical modelling of the 3D nonlinear wakefield excited by a short laser pulse in a plasma channel // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998. **13**, N 1. 1–11.
5. Chizhonkov E.V., Gorbunov L.M. Numerical modelling of ion dynamics in 3D nonlinear wakefield // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2001. **16**, N 3. 235–246.
6. Davis T.A. UMFPACK Version 4.3 User Guide. Technical Report TR-04-003. Univ. of Florida, CISE Dept. Gainesville (Florida, USA), 2004.

Поступила в редакцию
08.12.2005