

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОУРОВНЕВЫХ МАТРИЦ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Д. В. Савостьянов¹, Е. Е. Тыртышников¹

Рассмотрено распространение электромагнитной волны в неоднородной среде, содержащей идеально проводящую плоскость. В модели локально неоднородной среды задача сведена к объемному интегральному уравнению. На равномерных декартовых сетках с использованием базисных функций специального вида методом Галеркина получена матрица, обладающая трехуровневой блочной структурой вида ТТТ + ТНТ. С учетом структуры полученной матрицы предложен параллельный алгоритм решения сформулированной задачи, использование которого позволило существенно повысить точность вычисления значений полей вблизи неоднородности. Применение параллельной версии алгоритма дало возможность смоделировать данные измерений с точностью, достаточной для решения обратной задачи, т.е. для исследования структуры неоднородности. Приведены результаты решения обратной задачи с использованием приближения Борна, показавшие высокую точность метода. Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов № 04-07-90336, 05-01-00721) в соответствии с программой приоритетных фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН “Вычислительные и информационные технологии решения больших задач”.

1. Прямая задача электродинамики.

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим распространение электромагнитной волны в полупространстве, ограниченном плоскостью, представляющей собой идеальный проводник. Будем считать, что зависимость полей от времени гармоническая $e^{i\omega t}$. Электрические параметры среды будем считать переменными, но ограничимся моделью *локально неоднородной* среды, согласно которой среда представляет из себя однородное пространство, в котором располагается конечных размеров *неоднородность* V [1, 2]. Размеры неоднородности предполагаются столь большими, чтобы их увеличение не оказывало существенного влияния на поведение полей в области, где производятся измерения. Таким образом, тот факт, что неоднородное пространство сведено к неоднородности конечных размеров, не отражается на значениях измеряемых величин.

Мы ограничим рассмотрение случаем, когда область V по форме является параллелепипедом. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы идеальный проводник содержался в плоскости $x_2 = 0$, неоднородность располагалась в области $x_2 \geq 0$, а ось x_2 проходила через ее центр. При таком представлении неоднородности следует выбирать ее размеры так, чтобы значения электрического и магнитного полей на боковых и верхней стенках параллелепипеда достаточно сильно затухали в рамках выбранной точности. Геометрия задачи представлена на рис. 1.

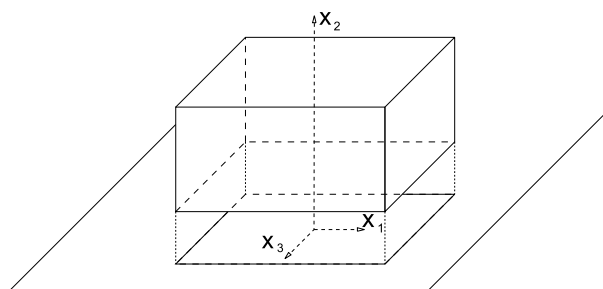


Рис. 1. Геометрия задачи

Будем считать, что сама неоднородность V представляет собой набор подобластей, в каждой из которых проводимость и диэлектрическая проницаемость среды постоянна (но различна в разных подобластях). Магнитная проницаемость внутри неоднородности совпадает с магнитной проницаемостью внешней среды.

Источником электромагнитного поля является магнитный диполь, направленный вдоль оси x_2 и расположенный вне неоднородности в точке $(0, h, 0)$. Магнитное поле измеряется в нескольких точках в плоскости $x_2 = h$. Типичная частота источника — 100 МГц, сопротивление внешней среды — $10^3 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

¹ Институт вычислительной математики РАН, ул. Губкина, д. 8, 119991, Москва; e-mail: draug@bach.inm.ras.ru; tee@inm.ras.ru

1.2. Интегральное уравнение. Внутри каждой подобласти с постоянными параметрами среды справедлива система уравнений Максвелла, имеющая в гармоническом случае вид

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{j}^0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu \mathbf{H},\end{aligned}\quad (1)$$

где комплекснозначная ε определена равенством $\varepsilon = \varepsilon_d - i\sigma/\omega$. Определим *первичное поле* $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ равенством

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H}^0 &= -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}^0 + \mathbf{j}^0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 &= i\omega\mu \mathbf{H}^0,\end{aligned}\quad (2)$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость внешней среды. Представим полное поле как сумму первичного и *аномального* поля:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^s, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^s.\end{aligned}\quad (3)$$

Для аномального поля $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$ из (1), (2) и (3) имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H}^s &= -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}^s + i\omega(\varepsilon_0 - \varepsilon) \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^s &= i\omega\mu \mathbf{H}^s.\end{aligned}\quad (4)$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{H}^s = 0$, то $\mathbf{H}^s = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, что вместе с предыдущим уравнением дает $\mathbf{E}^s = i\omega\mu \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Phi$, где $\mathbf{A}$ и Φ — *векторный* и *скалярный* потенциалы соответственно. Теперь первое уравнение из (4) переписывается в виде

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = k_0^2 \mathbf{A} - i\omega\varepsilon_0 \operatorname{grad} \Phi + i\omega\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \mathbf{E},$$

где $k_0 = \sqrt{\varepsilon_0\mu\omega^2}$.

В декартовых координатах имеем $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$. Учитывая это равенство, получим

$$\operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{A} + i\omega\varepsilon_0 \Phi) = (\Delta + k_0^2) \mathbf{A} + i\omega\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \mathbf{E}.$$

Принимая во внимание условие калибровки Лоренца $\Phi = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{A}$, имеем $\mathbf{E}^s = \frac{1}{-i\omega\varepsilon_0} (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \mathbf{A}$. Тогда векторный потенциал $\mathbf{A}$ должен удовлетворять векторному волновому уравнению

$$(\Delta + k_0^2) \mathbf{A} = i\omega\varepsilon_0 \mathbf{J}, \quad (5)$$

где $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$, $\gamma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1$. Отсюда заключаем, что $\mathbf{A}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} G(x, y) \mathbf{J}(y) dy$, где $G(x, y)$ — тензорная функция Грина. Таким образом, для аномальных полей справедливы формулы

$$\mathbf{E}^s(x) = (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_{\mathcal{V}} G(x, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad (6)$$

$$\mathbf{H}^s(x) = -i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot} \int_{\mathcal{V}} G(x, y) \mathbf{J}(y) dy. \quad (7)$$

Для определения тока $\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^s)$ перепишем уравнение (6) в виде *объемного интегрального уравнения* [3]

$$\gamma^{-1} \mathbf{J}(x) - (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_{\mathcal{V}} G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0, \quad x \in \mathcal{V}. \quad (8)$$

Функция Грина для однородной среды, в плоскости $x_2 = 0$ которой размещен идеальный проводник, имеет вид

$$G(x, y) = \begin{bmatrix} g_1(x, y) & & \\ & g_2(x, y) & \\ & & g_3(x, y) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $g_1(x, y) = g_3(x, y) = \frac{e^{i k_0 \|x-y\|}}{4\pi \|x-y\|} - \frac{e^{i k_0 \|x-y^*\|}}{4\pi \|x-y^*\|}$, $g_2(x, y) = \frac{e^{i k_0 \|x-y\|}}{4\pi \|x-y\|} + \frac{e^{i k_0 \|x-y^*\|}}{4\pi \|x-y^*\|}$, а точка y^* получается “отражением” точки y относительно идеально проводящей плоскости $y^* = (y_1, y_2, y_3)^* = (y_1, -y_2, y_3)$.

1.3. Метод дискретизации. Для дискретизации интегрального уравнения (8) применяется метод Галеркина. В качестве базисных функций используются конечные элементы, кусочно-линейные по одному из направлений и кусочно-постоянные по двум другим [3]. Введем на области $\mathcal{V}$ сетку, построенную декартовым произведением трех равномерных сеток $\{x_1^{j_1}\} \circ \{x_2^{j_2}\} \circ \{x_3^{j_3}\}$.

Неизвестную функцию $\mathbf{J}$ будем приближенно искать в виде комбинации

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(x_1, x_2, x_3) = & \sum_{j_1=1}^{n_1-1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{j_3=1}^{n_3} u_{j_1 j_2 j_3}^1 \mathbf{F}_{j_1 j_2 j_3}^1(x_1, x_2, x_3) + \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2-1} \sum_{j_3=1}^{n_3} u_{j_1 j_2 j_3}^2 \mathbf{F}_{j_1 j_2 j_3}^2(x_1, x_2, x_3) + \\ & + \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{j_3=1}^{n_3-1} u_{j_1 j_2 j_3}^3 \mathbf{F}_{j_1 j_2 j_3}^3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{F}_{j_1 j_2 j_3}^1 = \begin{bmatrix} \Phi_{j_1}^1 \Psi_{j_2}^2 \Psi_{j_3}^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{j_1 j_2 j_3}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_{j_1}^1 \Phi_{j_2}^2 \Psi_{j_3}^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{j_1 j_2 j_3}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_{j_1}^1 \Psi_{j_2}^2 \Phi_{j_3}^3 \end{bmatrix},$$

где $\Phi_{j_k}^k$ ($j_k = 1, \dots, n_k - 1$) — кусочно-линейные функции с носителем $[x_k^{j_k}, x_k^{j_k+2}]$, а $\Psi_{j_k}^k$ ($j_k = 1, \dots, n_k$) — кусочно-постоянные функции с носителем $[x_k^{j_k}, x_k^{j_k+1}]$. Неизвестные коэффициенты из разложения (10) определяются, согласно методу Галеркина, из следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} (\gamma^{-1} \mathbf{J}(x), \mathbf{F}_{i_1 i_2 i_3}^k(x)) dx - \int_{\mathcal{V}} \left((k_0^2 + \text{grad div}) \int_{\mathcal{V}} G(x, y) \mathbf{J}(y) dy, \mathbf{F}_{i_1 i_2 i_3}^k(x) \right) dx = \\ = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E}^0(x), \mathbf{F}_{i_1 i_2 i_3}^k(x)) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученная линейная система имеет вид

$$\left(\begin{bmatrix} D_1 & & \\ & D_2 & \\ & & D_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Блочнo-диагональная часть матрицы соответствует внеинтегральному слагаемому из (11) и определяется равенством

$$(D_k)_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3} = \int_{\mathcal{V}} \gamma^{-1} (\mathbf{F}_{i_1 i_2 i_3}^k(x), \mathbf{F}_{j_1 j_2 j_3}^k(x)) dx. \quad (13)$$

Плотная часть матрицы, отвечающая интегральному слагаемому из (11), определяется формулой

$$(A_{kl})_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3} = - \int_{\mathcal{V}} \left(\left((k_0^2 + \text{grad div}) \int_{\mathcal{V}} G(x, y) \mathbf{F}_{j_1 j_2 j_3}^l(y) dy \right), \mathbf{F}_{i_1 i_2 i_3}^k(x) \right) dx. \quad (14)$$

Метод быстрого вычисления интегралов, необходимых для получения матричных элементов, и некоторые смежные вопросы изучаются в [8].

1.4. Специфика полученной матрицы. Именно действия с плотной частью матрицы требуют основных затрат для вычисления элементов и проведения операции умножения матрицы на вектор. Поэтому вопрос о ее эффективном хранении и умножении представляет наибольший практический интерес. Интегральная часть уравнения (11), представленная матрицей (14), обладает определенной спецификой, учитывая которую мы можем значительно снизить вычислительные затраты.

В нашей задаче функция Грина (9) представима в виде суммы двух функций: функции, зависящей от разности координат двух точек, и функции, зависящей от разности и суммы координат двух точек: $G(x, y) = G^{(1)}(|x - y|) + G^{(2)}(|x - y^*|)$. При выборе равномерной по всем трем направлениям сетки это

замечательное свойство ядра интегрального уравнения передастся и матрице линейной системы, для которой будет верно следующее представление:

$$(A_{kl})_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3} = A_{kl}^{(1)}(i_1 - j_1, i_2 - j_2, i_3 - j_3) + A_{kl}^{(2)}(i_1 - j_1, i_2 + j_2, i_3 - j_3). \quad (15)$$

Матрица, элементы которой зависят только от разности номера строки и столбца, называется *теплицевой*. Матрица, элементы которой зависят от суммы индекса строки и столбца, называется *ганкелевой*. Итак, в нашем случае матрица представляет собой блочную 3×3 матрицу, каждый блок которой является суммой трехуровневой матрицы вида $\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T}$ (трижды теплицевой) и трехуровневой матрицы вида $\mathbf{T} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{T}$ (теплицевой на первом, ганкелевой на втором и теплицевой на третьем уровне). Матрицы, обладающие подобными структурами, рассматривались в [3–5].

Как известно, для хранения теплицевой матрицы размера n необходимо $O(n)$ ячеек памяти, а умножение на нее можно выполнить за $O(n \log(n))$ арифметических действий [6]. То же самое справедливо и для ганкелевой матрицы, так как перестановкой строк и столбцов ее можно привести к теплицевой. Таким образом, матрицу нашей задачи можно хранить в $O(n_1 n_2 n_3)$ ячейках памяти и умножать на вектор за $O(n_1 n_2 n_3 \log(n_1 n_2 n_3))$ арифметических операций при помощи процедур быстрого умножения Фурье [7].

Имея оптимизированную процедуру умножения на матрицу, мы можем найти решение линейной системы (12) каким-нибудь итерационным методом (в нашей работе применяется метод минимальных невязок). По найденному значению тока $\mathbf{J}$ вычисляются поля в точках наблюдения согласно формулам (6) и (7).

Таблица 1
Количество необходимой памяти в зависимости
от размера сетки

n	16	32	64	128	256
$N = n^3/2$	2^{11}	2^{14}	2^{17}	2^{20}	2^{23}
mem (N)	32 Kb	256 Kb	2 Mb	16 Mb	128 Mb
mem ($A^{(1)}$)	2.3 Mb	18.4 Mb	144 Mb	1.1 Gb	9.2 Gb

2. Параллельный алгоритм. Предварительные расчеты, проведенные по указанному алгоритму, показывают, что точность вычисления величин полей заметно ухудшается, когда плоскость, содержащая источник и точки наблюдения, приближается к неоднородности. В этом случае для поддержания определенной точности ответа приходится уменьшать шаги одномерных сеток, что приводит к резкому увеличению размеров памяти, необходимой для хранения матриц и векторов задачи, и количества арифметических операций, необходимых для решения линейной системы.

В качестве модельного примера рассмотрим неоднородность $\mathcal{V}$, представляющую собой параллелепипед $[-a, a] \times [H, H + a/2] \times [-a, a]$. Сетку для дискретизации выберем размером $n \times n/2 \times n$. В табл. 1 приведена зависимость количества памяти, необходимой для хранения векторов и матриц, использованных при расчете, от размера выбранной сетки.

На большинстве персональных компьютеров, доступных в настоящее время, количество оперативной памяти не превышает 2 Гб. Таким образом, провести интересные нас расчеты на персональной станции возможно только при числе точек сетки $n = 16, 32, 64$. Для расчетов с большими значениями числа точек n необходимо привлекать многопроцессорные станции, обладающие большими ресурсами оперативной памяти и большей вычислительной мощностью. В этой работе мы изучаем метод реализации описанного алгоритма на многопроцессорных платформах с распределенной памятью, а именно на *кластерных станциях*, которые представляют собой вычислительную систему на основе обычных рабочих станций, соединенных скоростной сетью. Такой принцип построения вычислительных систем является весьма недорогим, но кластерные станции обладают рядом особенностей:

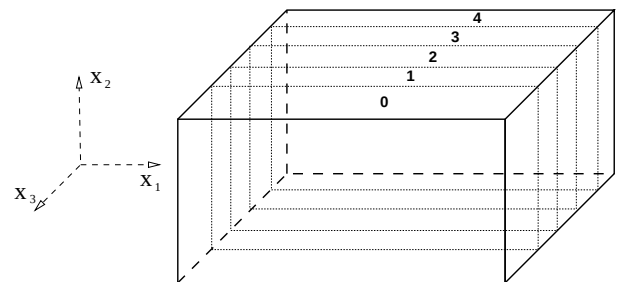


Рис. 2. Схема размещения неизвестных по процессорам

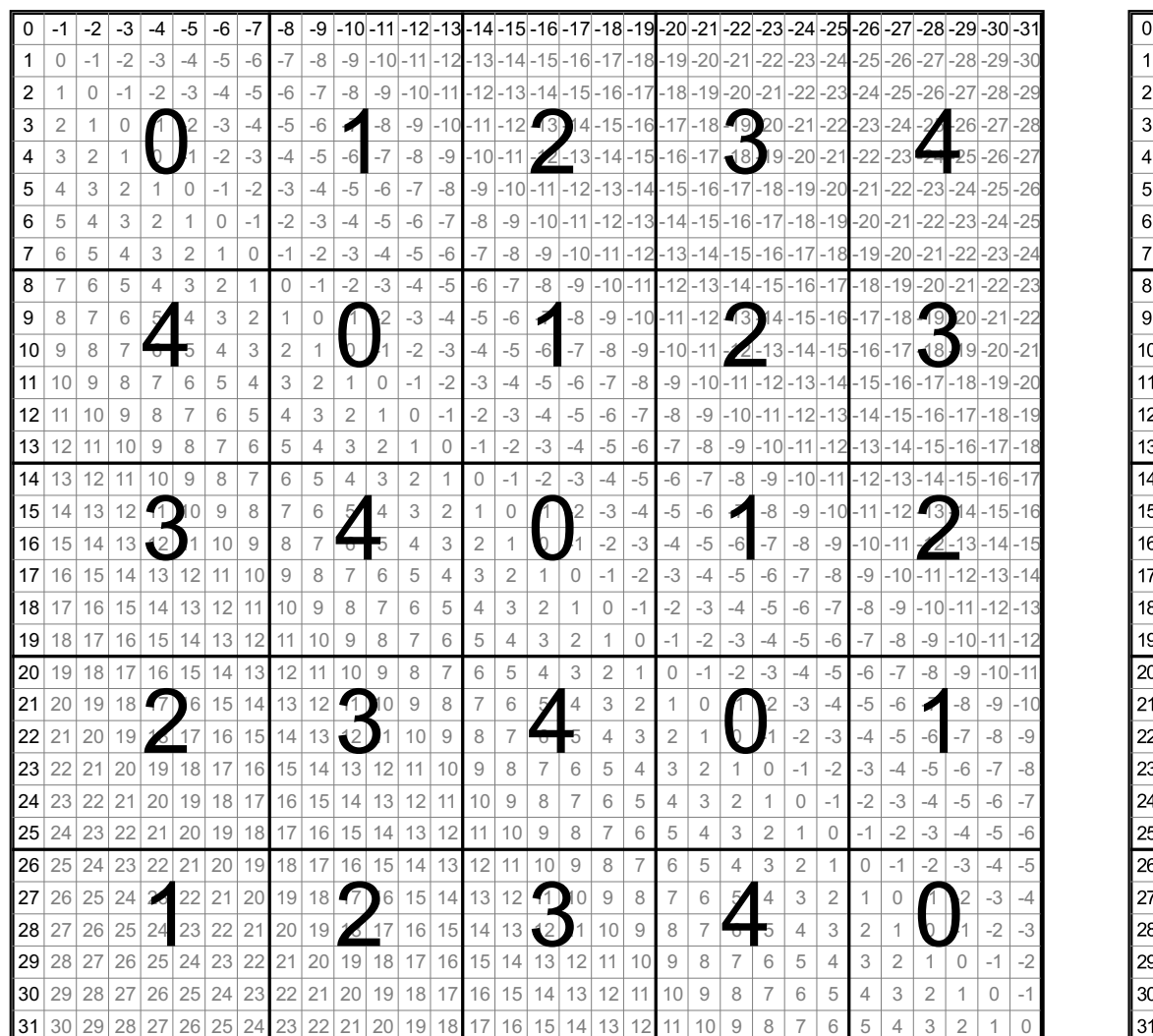


Рис. 3. Распределение элементов вектора и циркулянтной матрицы по сетке из пяти процессоров:

$$n_3 = 32, k_3 = 6, r_3 = 2, n_3^{\{0\}} = 8, n_3^{\{p\}} = 6, p \geq 1$$

— скорость межпроцессорных соединений невысока, много медленнее скорости операция внутри одного вычислительного узла;

— время передачи массива данных складывается из фиксированного *времени инициализации* и *времени пересылки*, которое пропорционально длине массива; на практике время инициализации может быть весьма велико;

— скорость обмена данными между соседними узлами выше, чем скорость обмена данными между случайной парой узлов.

Исходя из этих особенностей вычислительной платформы, при разработке параллельного кода стоит по возможности придерживаться следующих принципов:

— уменьшить число обменов данными между вычислительными узлами (возможно, даже за счет увеличения вычислительной сложности на каждом узле);

— выполнять передачу данных крупными блоками;

— производить обмен данными между соседними вычислительными узлами, пользуясь процедурами глобального обмена данными только по необходимости;

— организовывать алгоритм так, чтобы минимизировать “простой” вычислительного узла, связанный с ожиданием им прибытия необходимых данных с других узлов.

Для параллельной реализации описанного метода необходимо распределить по np процессорам век-

Таблица 2

Параметры теста

Геометрия		Электрические параметры		
размер неоднородности	(0.8, 0.2, 0.8)	параметр	среда	неодн.
уровень неоднородности	$H = 0.06$	сопротивление	10^3	50
положение источника	(0, h , 0)	магн. прониц.	0	
тип источника	y -диполь	диэл. прониц.	1	
частота источника	100 МГц			
Точки наблюдения				
1	2	3	4	5
(0.02, h , 0.0)	(0.04, h , 0.0)	(0.06, h , 0.0)	(0.08, h , 0.0)	(0.10, h , 0.0)

торы размера $3n_1n_2n_3$ (правую часть уравнения (12), вектор неизвестных и прочие вспомогательные векторы) и составные части матрицы A (т.е. $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$), причем в силу указанной специфики количество памяти, необходимой для хранения каждой из этих матриц, пропорционально их линейному размеру и составляет $72n_1n_2n_3$.

Векторы распределяются по процессорам путем “разрезания” множества неизвестных на $\mathbf{np}$ частей вдоль оси x_3 (рис. 2). Конкретнее, определим числа $k_3 = \lfloor n_3 / \mathbf{np} \rfloor$, $r_3 = n_3 - k_3 \mathbf{np}$ и разобьем сетку вдоль оси x_3 на $\mathbf{np}$ частей, в каждую из которых войдет $n_3^{\{p\}}$ точек: $n_3^{\{0\}} = k_3 + r_3$, $n_3^{\{p\}} = k_3$, для прочих $p = 1, \dots, \mathbf{np} - 1$. Таким образом, “корневой” процессор с индексом 0 берет на себя большую из частей сетки x_3 , если ее невозможно распределить равномерно. С учетом трехуровневой структуры на каждом из процессоров хранится $3n_1n_2n_3^{\{p\}}$ элементов вектора.

Определим теперь схему размещения на процессорах элементов матрицы. Поскольку матрица обладает трехуровневой структурой, а разрезание множества неизвестных происходит только вдоль оси x_3 , можно рассматривать только разрезание верхнего уровня. На верхнем уровне, отвечающем сетке вдоль x_3 , все 3×3 блока матриц $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ являются теплицевыми, поэтому можно поставить вопрос об эффективном распределении по процессорам элементов теплицевой матрицы, не учитывая тот факт, что ее элементы сами по себе являются двухуровневыми матрицами специальной структуры. Поскольку для теплицевой матрицы элементы зависят только от разности индексов строки и столбца, т.е. $a_{ij} = a_{i-j}$, реально мы распределяем по процессорам вектор длины $2n - 1$, однако для эффективного умножения на распределенную матрицу структура распределения этого вектора должна быть согласована с распределением элементов вектора неизвестных и правой части, описанным выше. Иллюстрация этого распределения представлена на рис. 3.

Корневой процессор размещает у себя один сегмент матрицы. Индексы $i_3^{\{0\}} = i - j$ элементов a_s , размещенных на корневом процессоре, имеют вид $i_3^{\{0\}} = -n_3^{\{0\}} + 1, \dots, n_3^{\{0\}} - 1$. Прочие процессоры размещают у себя по два сегмента элементов, отвечающих индексам

$$i_3^{\{p\}} = (-p - 1)k_3 - r_3 + 1, \dots, (-p + 1)k_3 - 1, \quad i_3^{\{p\}} = (\mathbf{np} - p - 1)k_3 + 1, \dots, (\mathbf{np} - p + 1)k_3 + r_3 - 1.$$

Рассмотрим теперь алгоритм умножения на распределенную матрицу.

Каждому процессору присвоен уникальный номер p , лежащий в пределах от 0 до $\mathbf{np} - 1$. Алгоритм представлен для процессора с номером p , хотя выполняется, конечно же, на всех процессорах одновременно.

do $\mathbf{ip} = 0, \mathbf{np} - 1$ // расчет локальной части вектора y для процессора $\mathbf{ip}$

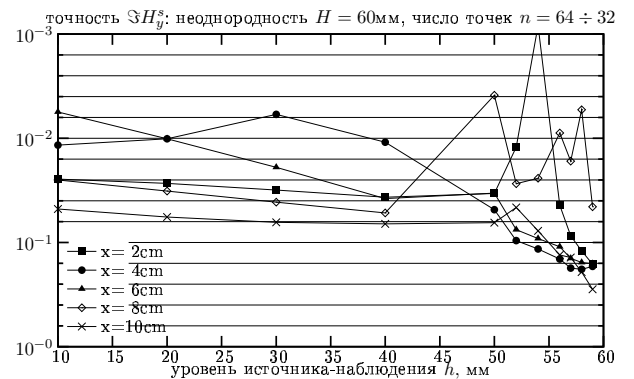


Рис. 4. Ухудшение точности при приближении плоскости измерения к неоднородности

1. [irecv] предоставить локальный вектор $\tilde{x}$ для приема локальной части вектора x с соседнего процессора;
2. [isend] $x \rightarrow \tilde{x}$ выслать локальную часть вектора x процессору с индексом $p + 1 \bmod np$ (“вниз”);
3. [A*x] $\tilde{y} := A \cdot x$ выполнить умножение подходящей локальной части матрицы на локальную часть вектора x ;
4. [allreduce] $y^{\{ip\}} := \sum_{\text{all}} \tilde{y}$ просуммировать локально вычисленные векторы $\tilde{y}$ на процессор ip;
5. [wait isend] дождаться завершения операции 2, если необходимо;
6. [wait irecv] дождаться завершения операции 1, если необходимо.

Для быстрого умножения на локальные части матриц (пункт 3 алгоритма) воспользуемся тем фактом, что блоки матрицы, хранимые на каждом из процессоров, как и вся матрица, обладают свойством $a_{ij} = a_{i-j}$, следовательно, являются теплицевыми матрицами (для процессора $p = 0$) или могут быть расширены до теплицевой матрицы (для прочих процессоров). Для умножения теплицевой матрицы на вектор существует эффективный алгоритм на основе быстрого умножения Фурье, позволяющий произвести умножение за $O(n \log n)$ действий для матрицы порядка n . Таким образом, результат умножения на прямоугольные матрицы можно получить путем умножения на расширенные (квадратные теплицевы) матрицы, дополнив, по необходимости, исходный вектор r_3 нулевыми компонентами.

Таблица 3
Число итераций gmres при разных значениях числа узлов n

h , мм	10	20	30	40	50	52	54	56	57	58	59
$n = 64$	2	2	2	2	4	6	6	7	8	8	8
$n = 256$	2	2	2	2	2	2	2	2	3	5	7

Построение параллельного алгоритма для умножения на блочно-диагональную часть матрицы (13) не представляет труда. Таким образом, умножение на матрицу задачи полностью представлено в параллельном виде. На основе параллельного алгоритма умножения на матрицу производится решение задачи (12) с помощью какого-либо итерационного метода. В нашей работе мы использовали метод минимальных невязок [9].

3. Точность и чувствительность измеряемых полей.

3.1. Повышение точности измерения полей. Суть эксперимента состоит в следующем. Измеряются значения магнитных полей в пяти точках наблюдения, расположенных на одном уровне с источником. Высота этого уровня изменяется в наших экспериментах в пределах от $h = 1$ см до $h = 5.9$ см. В измеренных полях рассматриваемой величиной является мнимая часть проекции поля, направленной вдоль оси “диполь–источник”, т.е. вдоль оси x_2 (эту ось мы в дальнейшем будем обозначать также через y). Нас интересует точность измерения этой компоненты, причем так как первичное поле вычисляется достаточно просто и надежно, мы будем исследовать точность измерения аномального поля $\Im H_y^s$. В качестве меры точности принимается критерий *внутренней сходимости*, выраженный через два измерения одной и той же величины, выполненных при двух значениях числа точек дискретизации n , отличающихся в два раза:

$$\varepsilon_{\text{im}}(n) = \frac{|\Im H_y^s(n) - \Im H_y^s(n/2)|}{\left(|\Im H_y^s(n)| + |\Im H_y^s(n/2)|\right)/2}.$$

Численные параметры эксперимента приведены в табл. 2.

Из табл. 1 следует, что когда расчет по обсуждаемому методу происходит на стандартной персональной вычислительной платформе с памятью до 2 Гб, количество элементов сетки ограничено величиной $n = 64$. На иллюстрациях приведены результаты следующего эксперимента: мы фиксируем две сетки с количеством узлов $n = 32$ и $n = 64$ и, приближая к неоднородности плоскость, содержащую источник и точки наблюдения, измеряем точность вычисления интересующих нас компонент полей. Результаты, представленные на рис. 4, показывают, что при приближении к неоднородности на расстояние ближе 10 мм, т.е. при $h \geq 50$ мм, происходит резкое ухудшение точности измерения компонент полей практически для всех точек наблюдения. Для наших целей необходимо поддерживать точность вычисления компонент полей хотя бы на уровне 10 %. Для того чтобы выполнять расчеты с такой точностью в

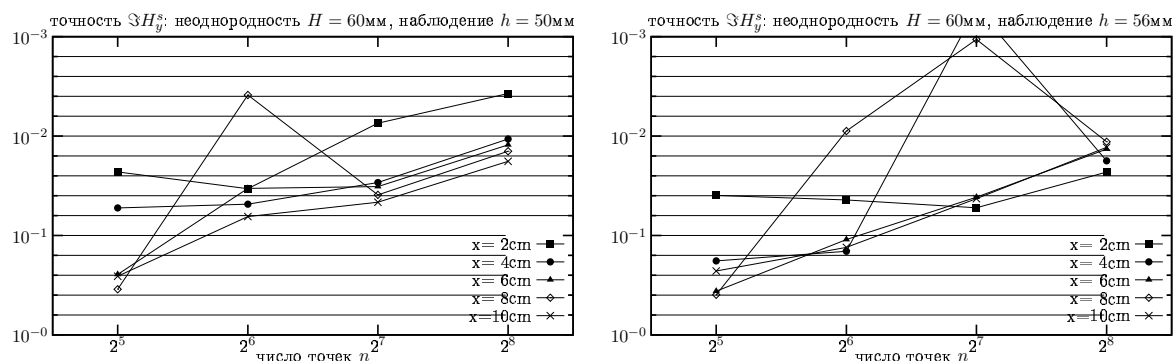


Рис. 5. Повышение точности расчета при увеличении числа точек сетки

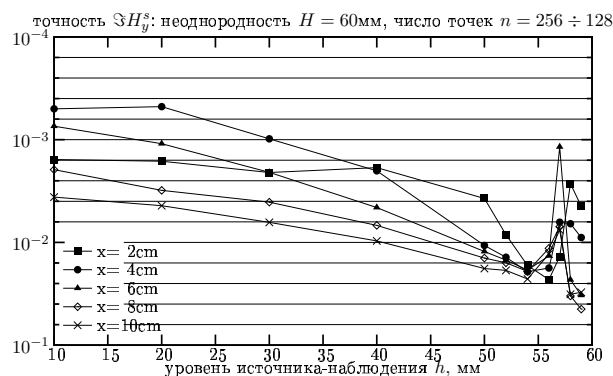


Рис. 6. Улучшенные значения точности для вычисляемых полей

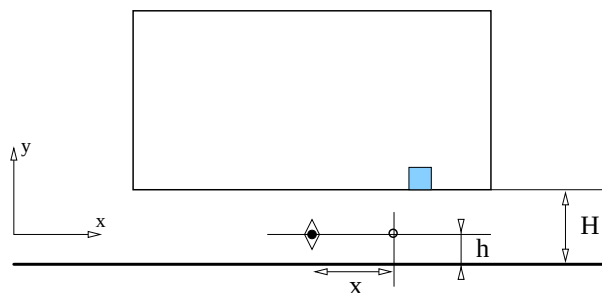


Рис. 7. Неоднородность с небольшим вкраплением

областях, более близких к неоднородности, нам приходится увеличивать количество точек сетки n , что приводит к необходимости использовать многопроцессорные вычислительные системы.

Таблица 4

Электрические параметры теста

Электрические параметры			
Параметр	Внеш. среда	Неоднор.	Вкрапление
Сопротивление, Ом · м	10^3	50	2
Магн. проницаемость	0	0	0
Диэл. проницаемость	1	1	1

Увеличение же числа точек сетки приводит к повышению точности расчета, что подтверждается экспериментами (рис. 5).

Возможность увеличить количество узлов сетки, конечно же, не отменяет ухудшения точности расчета при приближении плоскости измерения к неоднородности, но заметно смягчает ее, делая возможным проведение измерений с требуемой точностью на расстояниях порядка 1 мм от неоднородности (рис. 6).

Число итераций, необходимых для обращения матрицы задачи, заметно увеличивается при приближении плоскости источников-приемников к неоднородности. Этот рост смягчается на больших размерах сетки, что отражено в табл. 3.

3.2. Улучшение разрешающей способности прибора. Рассмотрим теперь случай, когда неоднородность по существу является таковой, т.е. содержит области с различными электрическими свойствами. Для наглядности остановимся на следующем случае: неоднородность представляет собой параллелепипед $\mathcal{V}$ с небольшим «вкраплением» $\tilde{\mathcal{V}}$ (рис. 7).

Электрические параметры неоднородности и вкрапления представлены в табл. 4. Расстояние от идеального проводника до неоднородности во всех экспериментах является фиксированной величиной $H = 60$ мм.

Цель проводимых измерений состоит в том, чтобы с помощью величин магнитных полей, измеренных в удачно для этого выбранной плоскости наблюдения, “почувствовать” наличие вкрапления и максимально точно определить его месторасположение. Пример, рассматриваемый нами, является в определенном смысле модельным, но позволяет качественно понять проблему, для решения которой нам необходимо увеличивать точность дискретизации.

Итак, при фиксированной геометрии проведем измерения величин интересующих нас компонент магнитных полей в плоскости измерения $x_2 = h$ на отрезке $x = [-0.4, 0.4]$, $y = h$, $z = 0$. Уровень расположения измеряющей плоскости h является одним из важнейших параметров эксперимента, существенно влияющим на точность и чувствительность измеряемых данных. Определение “хороших” значений h является одной из основных задач проводимых предварительных экспериментов.

Характерный вид аномального поля представлен на рис. 8.

Измеряемая компонента поля весьма сильно изменяется на рассматриваемом отрезке, поэтому для обсуждения поведения полей вблизи вкрапления ниже мы приведем графики с подходящим выбором анализируемого диапазона значений поля. На рис. 9–11 изображено поведение исследуемой компоненты на этом отрезке, пунктиром отмечена область, которая соответствует вкраплению $\tilde{V}$.

По первой серии графиков, построенных при количестве узлов сетки $n = 64$ с использованием обычной однопроцессорной рабочей станции, можно сделать следующие наблюдения:

- на существенном расстоянии плоскости измерения от неоднородности ($h = 40$ мм, т.е. в 20 мм от неоднородности) обнаружить по измеренным полям наличие вкрапления практически невозможно;
- при приближении плоскости измерения к неоднородности график измеряемой компоненты от координаты x начинает претерпевать изменения в районе, соответствующем положению вкрапления; эти изменения слегка заметны при $h = 50$ мм (плоскость измерения в 10 мм от неоднородности) и становятся все более заметны при дальнейшем приближении к неоднородности;
- уже при $h = 52$ – 54 мм и особенно при $h = 56$ мм изменения в поведении графика в районе вкрапления становятся достаточно заметны, но измерения содержат уже достаточно сильные погрешности, что выражается в существенных их биениях, дискретизационных “шумах”, которые могут быть восприняты как наличие других вкраплений и могут тем или иным способом внести ошибки в процедуру локации неоднородности; возникающие биения делают невозможным построение хоть сколь-нибудь точных предположений относительно положения вкрапления $\tilde{V}$;
- дальнейшее приближение плоскости измерения к неоднородности ($h = 58, 59$ мм) приводит к тому, что результаты измерений вследствие возникающих погрешностей становятся неприемлемыми для анализа.

Сделанные наблюдения позволяют сделать вывод о необходимости увеличения точности измерений с целью подавить биения и добиться более аккуратных измерений полей вблизи неоднородности. Для достижения этой цели приходится увеличивать количество узлов сетки дискретизации, что возможно только на параллельной платформе. Вторую серию экспериментов проведем с количеством узлов $n = 128$ (рис. 10).

Видим, что определение местоположения включения $\tilde{V}$ по-прежнему затруднено ввиду наличия дискретизационных “шумов”, но с определенной точностью все же возможно при выборе положения плоскости измерения на уровне $h = 56, 57$ мм от неоднородности. Проблема, однако, состоит в том, что положение плоскости измерения необходимо указать до проведения реальных экспериментов, поэтому хотелось бы расширить диапазон возможных значений h , при которых полученные результаты измерений могут считаться достаточно точными и вместе с тем достаточно чувствительными для решения обратной задачи.

Рассматривая результаты третьей серии экспериментов ($n = 265$, рис. 11), можно заметить, что

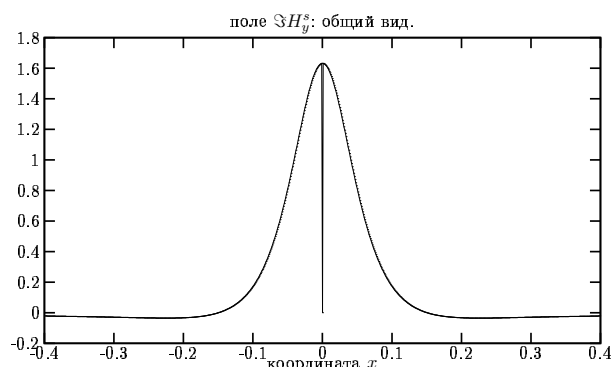
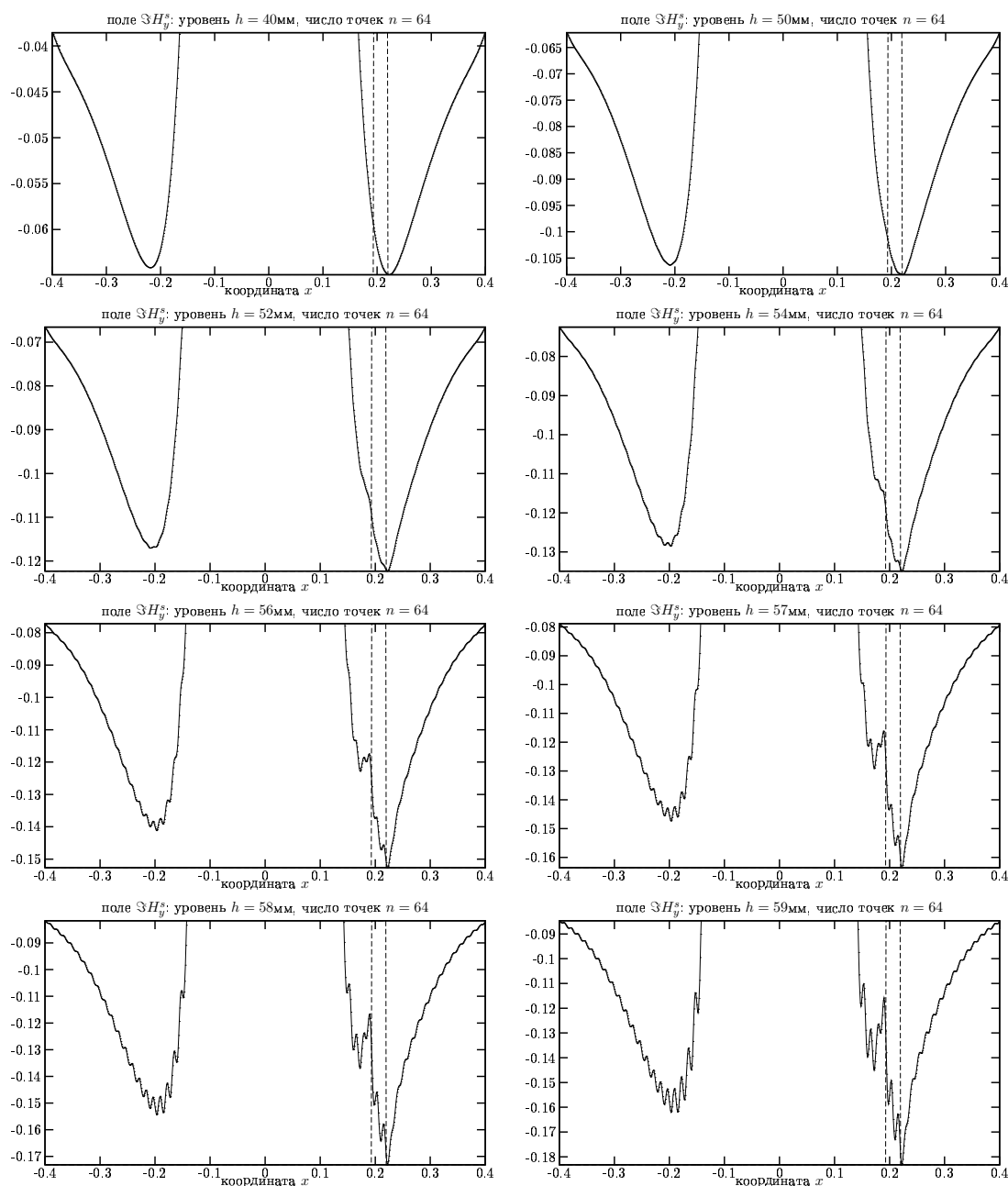


Рис. 8. Типичная зависимость измеряемой компоненты поля от координаты x

Рис. 9. Точность и чувствительность полей, сетка $n = 64$

положение неоднородности $\tilde{Y}$ хорошо просматривается по графикам измеренных компонент полей при положении плоскости источников на уровне $h = 56 - 59$ мм. Это означает, что точность решения прямой задачи, т.е. определения величин полей при заданной геометрии неоднородности, при таком значении параметров уже достаточно высока для того, чтобы на основе алгоритма, реализующего прямую задачу, строить алгоритм для решения обратной задачи, т.е. определения геометрии и электрических параметров среды внутри неоднородности.

4. Обратная задача. Рассмотрим обратную задачу (задачу зондирования): по известным измерениям величин аномальных магнитных полей (показаниям измеряющего прибора, или зонда) восстановить электрические параметры среды. Для простоты будем считать, что магнитная проницаемость среды равна 0, диэлектрическая равна 1, и вопрос сводится только к определению профиля сопротивления в неоднородности.

4.1. Приближение Борна. Методы решения задачи зондирования часто основываются на инте-

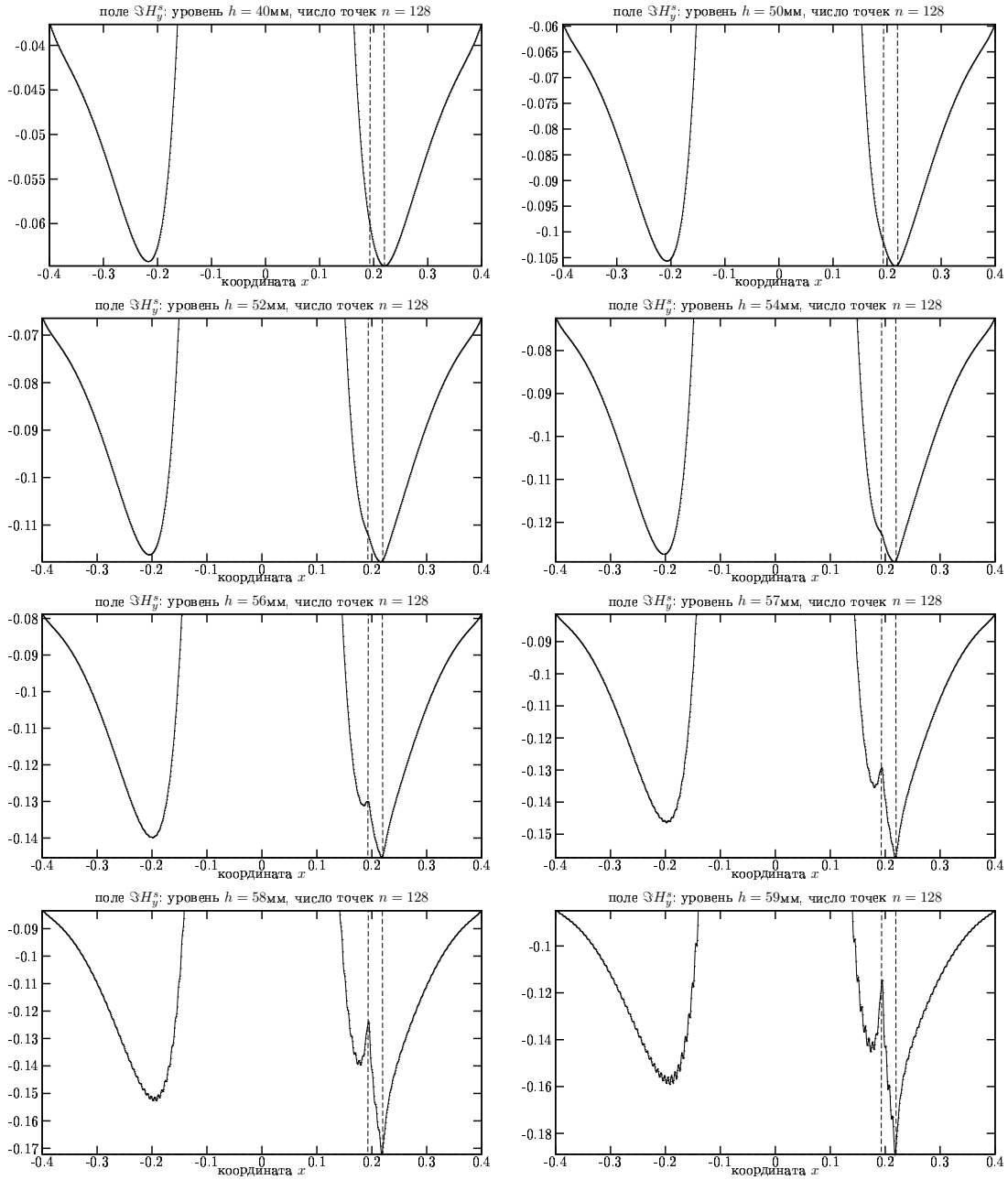


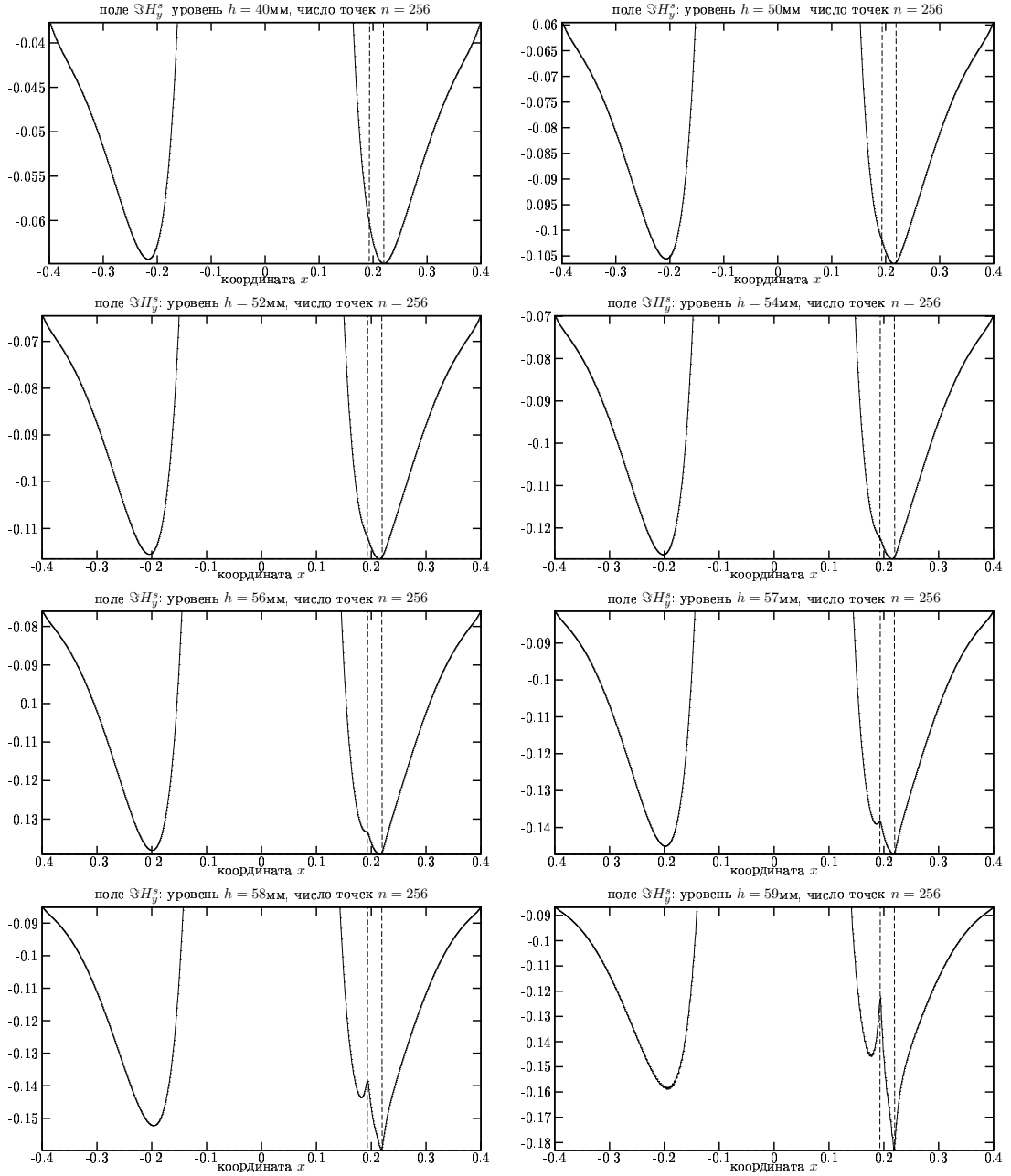
Рис. 10. Точность и чувствительность полей, сетка $n = 128$

гральных уравнениях (6), (7), в которых значения полей $\mathbf{E}^s$ и $\mathbf{H}^s$ рассматриваются как известные данные, а неизвестная функция $\gamma(y) = \varepsilon(y)/\varepsilon_0 - 1$ содержит информацию о распределении сопротивления в неоднородности. Перепишем уравнения (6),(7) в более простом виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^s(x) &= G_H(\gamma(\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^s)), \\ \mathbf{E}^s(x) &= G_E(\gamma(\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^s)). \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку для непосредственного решения этой задачи требуются значительные вычислительные ресурсы, обычно используются какие-либо упрощенные аналоги этих же интегральных уравнений, позволяющие находить γ без решения дополнительных прямых задач. Аппроксимация Борна [10] основывается на предположении, что

$$|\mathbf{E}^s(y)| \ll |\mathbf{E}^0(y)|, \quad y \in \mathcal{V},$$

Рис. 11. Точность и чувствительность полей, сетка $n = 256$

т.е. на пренебрежимой малости рассеянного поля по сравнению с первичным, что достаточно хорошо выполняется в нашей задаче. Таким образом, значениями $\mathbf{E}^s$ в правой части равенств (16) можно пренебречь, вследствие чего мы получаем формулы

$$\mathbf{H}^s(x) = G_H(\gamma \mathbf{E}^0), \quad \mathbf{E}^s(x) = G_E(\gamma \mathbf{E}^0), \quad (17)$$

непосредственно определяющие $\mathbf{E}^s$ и $\mathbf{H}^s$ как линейные функции от γ .

Теперь неизвестную γ можно определить, решив всего одну задачу наименьших квадратов:

$$\min_{\gamma} \|G_H(\text{obs}_i) \mathbf{E}^0(\text{src}_j) \gamma - (\mathbf{H}^s)(\text{obs}_i, \text{src}_j)\|_2, \quad (18)$$

где src_j определяет всевозможные положения источника, obs_i определяет положения всех точек измерения поля, а норма $\|\circ_{ij}\|_2$ является обычной нормой вектора данных, заданного двойным индексом i, j . Общее число данных, определяющее число строк матрицы задачи наименьших квадратов, равняется числу

различных положений источника (зонда), умноженному на число измерений значений магнитных полей, выполненных зондом в различных точках. Общее число неизвестных, определяющее число столбцов матрицы задачи наименьших квадратов, равняется числу ячеек, на которые разбита неоднородность и внутри которых среда полагается однородной.

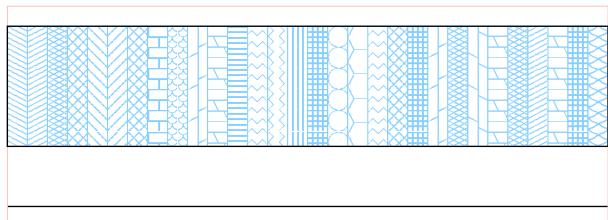


Рис. 12. Область зондирования

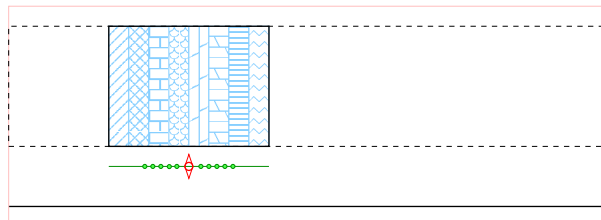


Рис. 13. Расчетная область для прямой задачи

4.2. Горизонтальное зондирование. *Горизонтальным зондированием* мы будем называть решение обратной задачи, т.е. определение сопротивления среды в случае, когда оно меняется только вдоль одной (например горизонтальной) оси (рис. 12). Рассматриваемый участок среды в реальных задачах может оказаться достаточно протяженным. Решив большое количество прямых задач, отвечающих разным положениям источника и измеряющей плоскости, мы можем смоделировать измерения, проведенные прибором, движущимся вдоль среды. При решении каждой прямой задачи мы пользуемся описанным выше методом, основанном на модели локальной неоднородности, полагая, таким образом, что удаленные участки среды не влияют на значение измеряемых полей (рис. 13).

Таблица 5
Параметры задачи горизонтального зондирования

полная длина рассеивателя	$x_{\text{len}} = 10 \text{ m}$
шаг изменения сопротивления	0.1 m
шаг измеряющего зонда	0.1 m
число точек наблюдения	40
шаг между точками наблюдения	0.01

Таблица 6
Параметры задачи двумерного зондирования

полная длина	$x_{\text{len}} = 10 \text{ m}$
шаг изменения сопротивления по x	0.1 m
шаг изменения сопротивления по y	0.1 m
шаг зонда	0.1 m
число точек измерения	40
шаг между точками измерения	0.01
всего данных:	4000
всего параметров:	2000

Как и прежде, при решении прямой и обратной задачи мы считаем, что плоскость $y = 0$ содержит идеальный проводник, а источником является y -диполь. Заданный точный профиль сопротивления среды показан на рис. 14.

При рассмотрении среды, сопротивление которой изменяется только вдоль горизонтальной оси, число неизвестных есть просто число вертикальных “слоев”, в которых среда полагается однородной. Количество этих “слоев” и другие параметры эксперимента представлены в табл. 5. Число шагов измеряющего зонда согласовано с числом слоев с неизвестными сопротивлениями.

Результаты численного решения задачи горизонтального зондирования представлены на рис. 15. Мы можем с удовлетворением констатировать, что как и при положении измеряющей плоскости $h = 55 \text{ мм}$, так и при положении $h = 59 \text{ мм}$ решение обратной задачи, основанное на предположении Борна, приводит к хорошему совпадению с точным ответом. Результаты зондирования для других положений измеряющей плоскости и график точности зондирования для всех проведенных экспериментов приведен на рис. 16. Следует отметить, что в областях с высоким сопротивлением точность определения сопротивления среды достаточно хорошая при различных значениях h , в то же время для качественного (с точностью порядка 10 %) определения сопротивления в областях, где оно мало, требуется максимально приблизить измеряющую плоскость к неоднородности вплоть до уровня $h = 59 \text{ мм}$.

4.3. Двумерное зондирование. *Двумерным зондированием* мы назовем определение сопротивления среды в предположении, что оно меняется по вертикали и горизонтали.

Для моделирования измерений, т.е. для решения прямых задач, мы можем рассмотреть тот же самый пример, что и в задаче горизонтального зондирования. Однако при решении обратной задачи теперь мы должны представить среду и как набор вертикальных “слоев”, и как набор горизонтальных “уровней”, значительно увеличив таким образом количество подобластей с различными значениями сопротивления и, стало быть, количество неизвестных параметров в задаче наименьших квадратов. Выбирая шаг горизонтального уровня равным шагу вертикального слоя, мы увеличиваем количество неизвестных до 2000 (см. табл. 6), т.е. фактически до числа измеренных данных.

Результаты экспериментов по двумерному зондированию представлены на рис. 17. Из приведенных графиков видно, что точность определения сопротивления на удаленных от источника горизонтальных уровнях начинает стремительно падать, что связано, конечно, с высоким затуханием рассеянного поля при продвижении вглубь неоднородности. Фактически, с приемлемой точностью поддаются зондированию лишь ближайшие 50 мм неоднородности. Возможно, зондирование более глубоких областей может быть проведено с применением более сложных методов решения обратной задачи. Это, конечно же, оставляет нам интересные темы для будущей работы.

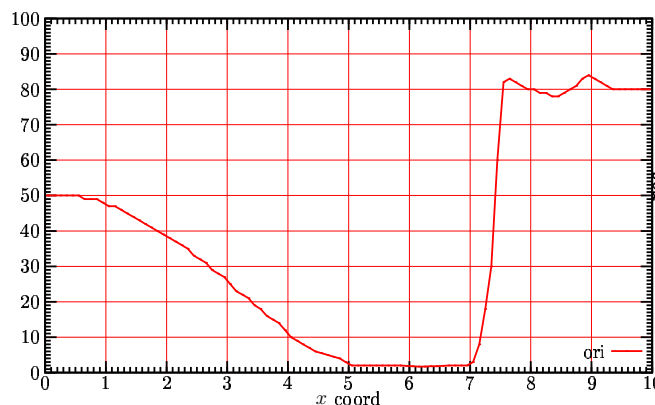


Рис. 14. Реальный профиль сопротивления

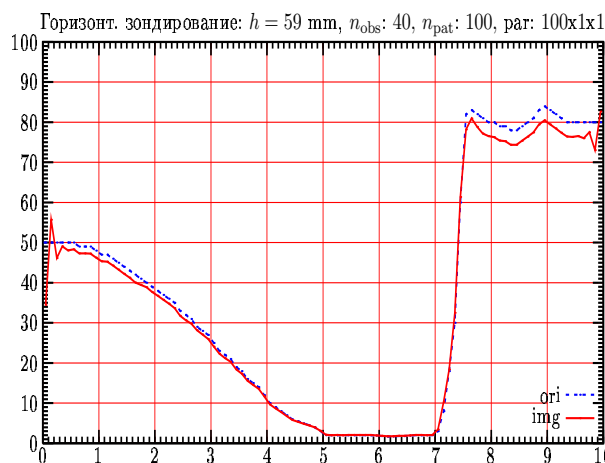
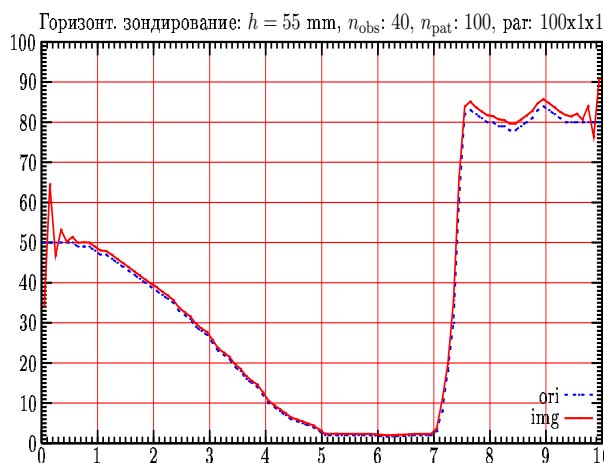


Рис. 15. Результаты горизонтального зондирования

5. Благодарности. Тестирование метода и массовые вычисления произведены на следующих системах.

- inm** Кластер ИВМ РАН. Узлы HP rx2600 на Intel Itanium2, 1.3 GHz, сеть Myrinet 2000, 2x250 Mb/s.
- nсs** Кластер факультета математики Университета земли Саар, Германия. Узлы на Intel Xeon, 2.2 GHz, сеть на основе двух параллельных Fast Ethernet коммутаторов, 2x100 Mb/s.
- mvs** МВС-1000М в Межведомственном суперкомпьютерном центре. Узлы на Alpha21264A, 667 MHz, сеть Myrinet 2 Gbit/s.

Выражаем благодарность Межведомственному суперкомпьютерному центру РАН, предоставившему нам вычислительную технику, а также нашим зарубежным коллегам С. Рязанову и И. Ибрагимову за предоставленную вычислительную платформу для отладки и проведения вычислительных эксперимен-

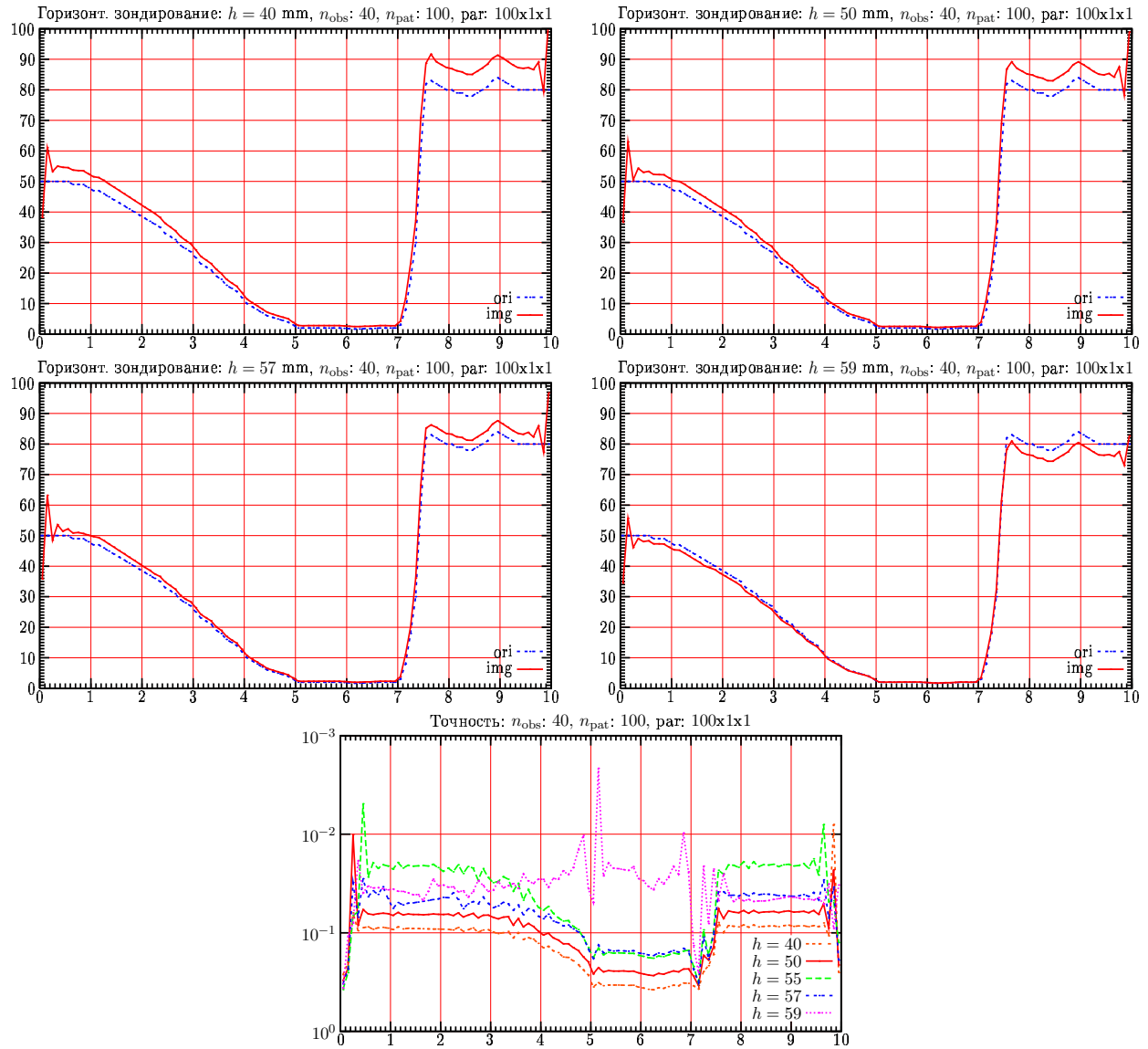


Рис. 16. Численные результаты и точность горизонтального зондирования

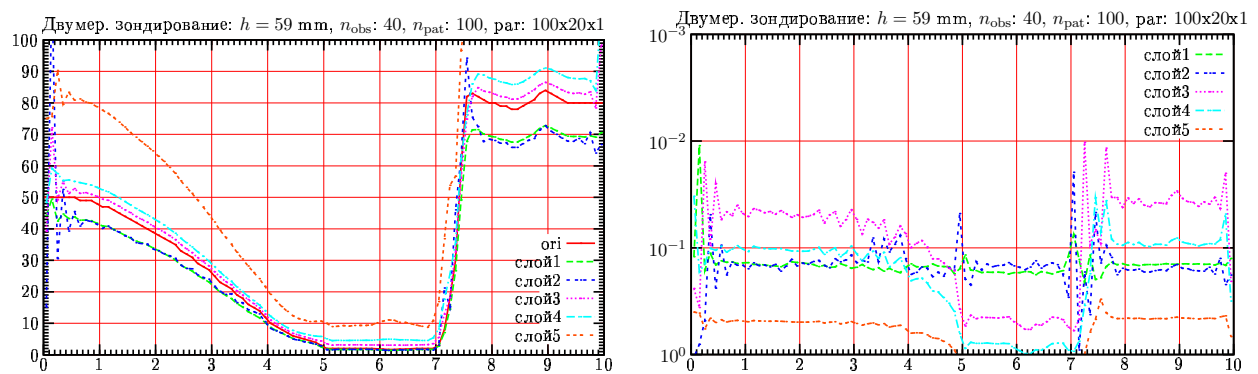


Рис. 17. Численные результаты и точность двумерного зондирования

тов. Доступ к этим вычислительным ресурсам позволил начать разработку параллельного программного обеспечения до ввода в строй собственного вычислительного кластера ИВМ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин А.Б.* Исследование задач дифракции электромагнитных волн в локально-неоднородных средах // ЖВМ и МФ. 1990. **30**, № 1. 107–121.
2. *Самохин А.Б.* Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998.
3. *Smirnov Yu.G., Tsupack A.A.* Volume singular integral equations for solving diffraction problem of electromagnetic waves in microwave oven // Proc. of European Symp. on Numer. Meth. in Electromagnetics. 2002. 172–176.
4. *Ivakhnenko V.I., Tyrtysnikov E.E.* Block-Toeplitz-Structure-based solution strategies for CEM problems // 11th Annual Review of Progress in Applied Comp. Electromagnetics. Conf. Proceedings. Monterey, CA, 1995. 181–188.
5. *Еремин Ю.А., Ивахненко В.И.* Строгие и приближенные модели царапины на основе метода интегральных уравнений // Дифф. уравнения. 2001. **37**, № 10. 1386–1394.
6. *Воеводин В.В., Тиртышников Е.Е.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.
7. *Zwamborn A.P.M., Van der Berg.* The three-dimensional weak form of the conjugate gradient FFT method for solving scattering problems // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1992. MTT-40, 9. 1757–1765.
8. *Tyrtysnikov E.E.* Fast computation of Toeplitz forms and some multidimensional integrals // Rus. J. Numer. Anal. 2005. **20**, № 4. 383–380.
9. *Saad Y., Schultz M.H.* GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM F. Scientific and Stat. Comp. 1986. **7**. 856–869.
10. *Gao G., Fang S., Torres-Verdin C.* A new approximation for 3D electromagnetic scattering in the presence of anisotropic conductive media // 3DEMIII Workshop. Adelaide, 2003.

Поступила в редакцию
23.11.2005
