УДК 519.2:541.1

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В. А. Морозов[1]

Задача восстановления зашумленных сигналов трактуется как проблема вычисления значений неограниченного оператора. В связи с этим используется метод регуляризации А. Н. Тихонова. Рассмотрены несколько способов выбора параметра регуляризации, как полностью теоретически обоснованных, так и прагматических, основанных на некоторых интуитивных соображениях. Допускается задание и использование некоторых априорных сведений о структуре искомого "полезного" сигнала как во "временно́й", так и в "частотной" областях. Изложение ведется на языке функционального анализа, что позволяет строго обосновать все рассмотрения. Это же обеспечивает широту возможных приложений в различных областях знаний, связанных с обработкой экспериментальных данных. Рассмотренная постановка проблемы соответствует случаю "прямых" измерений. Изучено влияние "больших" помех.

Ключевые слова: восстановление зашумленных сигналов, численный анализ, численные методы, метод регуляризации, неограниченные операторы, некорректные задачи, сходимость.

Пусть L — линейный оператор, действующий из H в G: $H \xrightarrow{L} G$, где H и G суть вещественные гильбертовы пространства, и определенный на непустом выпуклом множестве $D \subseteq H$. Далее считаем, что оператор L замкнут на D, то есть для любой последовательности элементов $u_n \in D$: $u_n \overset{(H)}{\to} u_0$, $Lu_n \overset{(G)}{\to} g_0$, $n \to \infty$ (то есть сходящихся соответственно в H и G), имеем: $u_0 \in D$, $Lu_0 = g_0$. Предположим, что элемент $u^* \in D$ — искомый "полезный" сигнал, заданный своим приближением $\widetilde{u} \in H$: $u^* = \widetilde{u} + \xi$, где $\xi \in H$ — неизвестная "помеха", относительно величины которой сделаем в дальнейшем уточняющие предположения.

1. Задача R. Одна из основных математических проблем реконструкции зашумленных сигналов — задача R — формулируется следующим образом: построить элемент $\widehat{u} \in D$ такой, что уклонение

$$\left|u^* - \widehat{u}\right| \equiv \left(\left\|Lu^* - L\widehat{u}\right\|_G + \left\|u^* - \widehat{u}\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

когда "помеха" ξ также стремится к нулю (в определенном смысле).

Заметим, что известный элемент $\widetilde{u}$ не обязан принадлежать априорно задаваемому множеству D, которое определяется как сумма некоторых известных свойств искомого "полезного" сигнала, таких как, например, ограниченность амплитуды сигнала или его спектра, неотрицательность, монотонность, выпуклость, отсутствие сигнала или частот на некоторых промежутках, ограниченность полной вариации и т.д. Эти обстоятельства, а так же тот факт, что оператор L может быть неограниченным (это важно, например, если требуется вычислить некоторые характеристики "полезного" сигнала типа его производной), приводят нас к выводу, что поставленная задача некорректна, то есть может быть неразрешима в классическом смысле и (или) неустойчива. Конечно, можно взять, например, $\widehat{u} = P_D\widetilde{u}$, где P_D — проектор в H на множество D. Если множество D достаточно удачно определено, то может оказаться, что так определенный элемент $\widehat{u}$ нас вполне удовлетворяет. Однако, так как наши априорные знания о "полезном" сигнале u^*, как правило, весьма приблизительны, надежда на такой благоприятный исход является слишком оптимистической. Это тем более так, если учесть, что на окончательный результат еще влияет неизвестная ошибка в регистрируемом сигнале, да и в вычислительном плане нахождение проекции на множество D может оказаться достаточно трудоемким.

2. Задачи $\widetilde{R}_\alpha$ **и** R_α. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом регуляризации А. Н. Тихонова [1]. В связи с этим определим параметрический функционал

$$\Phi_\alpha[u] \equiv \left\|u - \widetilde{u}\right\|_H^2 + \alpha\left\|Lu - g\right\|_G^2, \quad u \in D,$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет, 119899, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, $g \in G$ — заданный элемент, и рассмотрим задачу $\widetilde{R}_\alpha$: найти элемент $\widetilde{u}_\alpha \in D$ такой, что

$$\inf_{n \in D} \Phi_\alpha[u] = \Phi_\alpha\big[\widetilde{u}_\alpha\big].$$

Согласно общей теории регуляризации [2, 3] справедлива

Теорема 1. *При любом $\alpha > 0$ задача $\widetilde{R}_\alpha$ однозначно разрешима и ее решение определяется вариационным неравенством Эйлера*

$$\big(\widetilde{u}_\alpha - \widetilde{u}, v - \widetilde{u}_\alpha\big)_H + \alpha\big(L\widetilde{u}_\alpha - g, L(v - \widetilde{u}_\alpha)\big)_G \geqslant 0 \qquad \forall\, v \in D.$$

Далее задачу $\widetilde{R}_\alpha$ при $\xi \equiv 0$ назовем задачей R_α. Пусть u_α — решение задачи R_α. Для него, очевидно, справедливо вариационное неравенство Эйлера

$$\big(u_\alpha - u^*, w - u_\alpha\big)_H + \alpha\big(Lu_\alpha - g, L(w - u_\alpha)\big)_G \geqslant 0 \qquad \forall\, w \in D,$$

которое аналогично предыдущему.

Полагая $v = u_\alpha$, $w = \widetilde{u}_\alpha$ и складывая оба неравенства, после незначительных преобразований получаем соотношение

$$\big\|\widetilde{z}_\alpha\big\|_H^2 + \alpha\big\|L\widetilde{z}_\alpha\big\|_G^2 \leqslant -\big(\widetilde{z}_\alpha, \xi\big)_H, \tag{1}$$

где $\widetilde{z}_\alpha \equiv \widetilde{u}_\alpha - u_\alpha$. Аналогично при $w = u^*$ из второго вариационного неравенства следует оценка

$$\big\|z_\alpha\big\|_H^2 + \alpha\big\|Lz_\alpha\big\|_G^2 \leqslant -\alpha\big(Lu^* - g, Lz_\alpha\big)_G, \tag{2}$$

где $z_\alpha \equiv u_\alpha - u^*$.

Теорема 2. *Пусть ξ: $\|\xi\|_H < \delta$. Если параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ выбран так, что $\delta/\sqrt{\alpha} \to 0$, δ, $\alpha \to 0$, то имеет место предельное соотношение: $\big|\widetilde{u}_\alpha - u^*\big| \to 0$, δ, $\alpha \to 0$, то есть алгоритм $\widetilde{R}_\alpha$ решает проблему R.*

Доказательство. Действительно, в соответствии с (1) имеем:

$$\big\|\widetilde{z}_\alpha\big\|_H^2 + \alpha\big\|L\widetilde{z}_\alpha\big\|_G^2 \leqslant \delta\big\|\widetilde{z}_\alpha\big\|_H$$

и, следовательно,

$$\big\|\widetilde{z}_\alpha\big\|_H \leqslant \delta, \qquad \big\|L\widetilde{z}_\alpha\big\|_G \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}.$$

Тогда получаем:

$$\big|\widetilde{u}_\alpha - u^*\big| \leqslant \big|z_\alpha\big| + \big|\widetilde{z}_\alpha\big| \leqslant \big|z_\alpha\big| + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \tag{3}$$

В силу экстремального свойства регуляризованных решений u_α имеем:

$$\big\|u_\alpha - u^*\big\|_H^2 + \alpha\big\|Lu_\alpha - g\big\|_G^2 \leqslant \big\|u^* - u^*\big\|_H^2 + \alpha\big\|Lu^* - g\big\|_G^2,$$

то есть выполнены условия регулярности [2]:

$$\big\|Lu_\alpha - g\big\|_G \leqslant \big\|Lu^* - g\big\|_G, \qquad \big\|u_\alpha - u^*\big\|_H \to 0, \qquad \alpha \to 0+.$$

В соответствии с общей теорией регуляризации условия регулярности влекут предельное соотношение

$$\lim_{\alpha \to 0+}\big|u_\alpha - u^*\big| = \lim_{\alpha \to 0+}\big|z_\alpha\big| = 0.$$

Отсюда и из (3) следует наша теорема.

Замечание 1. Утверждение теоремы 2 также имеет место, если параметр регуляризации α выбрать конструктивно в соответствии с принципом невязки [2], а именно,

$$\alpha: \quad \big\|\widetilde{u}_\alpha - \widetilde{u}\big\|_H = \delta. \tag{4}$$

Известно [2], что это скалярное уравнение разрешимо. Имеются эффективные численные алгоритмы для отыскания значения параметра регуляризации в соответствии с принципом невязки [3]. Смысл принципа невязки достаточно очевиден: если $\alpha \to 0$, то $\widetilde{u}_\alpha \to P_D\widetilde{u}$, и мы можем не получить ничего нового по сравнению с известной информацией; если $\alpha \to \infty$, то можно доказать, что $\widetilde{u}_\alpha$ стремится к элементу из ядра оператора L, аппроксимирующему $\widetilde{u}$ в среднеквадратичном смысле; реализация принципа невязки приводит к выбору регуляризованного решения, согласованного с точностью измерений.

3. Обобщенное условие гладкости. Теорема 2 не дает гарантированной точности восстановления сигнала u^*. Более того, сходимость $\widetilde{u}_\alpha$ к u^* по норме $|\cdot|$ может быть как угодно медленной.

Пусть элемент u^* таков, что выполняется вариационное условие "гладкости", а именно:

$$\big(Lu^* - g, L(u - u^*)\big)_G \geqslant \big(h^*, u - u^*\big)_H \qquad \forall\, u \in D. \tag{5}$$

Тогда справедлива

Теорема 3. Пусть ξ: $\|\xi\|_H < \delta$. Если выполнено обобщенное условие "гладкости" (5), то справедливы оценки

$$\big\|z_\alpha\big\|_H \leqslant \alpha\big\|h^*\big\|_H, \qquad \big\|Lz_\alpha\big\|_G \leqslant \sqrt{\alpha}\big\|h^*\big\|_H$$

и, следовательно,

$$\min_{\alpha>0}\big|\widetilde{u}_\alpha - u^*\big| \leqslant \mathrm{const}\cdot\delta^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Действительно, полагая $u = u_\alpha$ в (5) и используя (2), имеем:

$$\big\|z_\alpha\big\|_H^2 + \alpha\big\|Lz_\alpha\big\|_G^2 \leqslant -\alpha\big(h^*, z_\alpha\big)_H \leqslant \alpha\big\|h^*\big\|_H\big\|z_\alpha\big\|_H$$

и поэтому

$$\big\|z_\alpha\big\|_H \leqslant \alpha\big\|h^*\big\|_H, \qquad \big\|Lz_\alpha\big\|_G \leqslant \sqrt{\alpha}\big\|h^*\big\|_H.$$

Таким образом, согласно (3),

$$\big|\widetilde{u}_\alpha - u^*\big| \leqslant \mathrm{const}\cdot\left(\sqrt{\alpha} + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Отсюда получаем требуемую оценку. Теорема доказана.

Замечание 2. Если множество D линейное, то (5) переходит в тождество

$$\big(Lu^* - g, Lv\big)_G = \big(h^*, v\big)_H \qquad \forall\, v \in D.$$

Если существует сопряженный оператор L^* (например, D — плотное в H множество) и элемент $\big(Lu^* - g\big) \in D_{L^*}$ — области определения L^*, то упомянутое тождество дает: $h^* = L^*\big(Lu^* - g\big)$.

Отметим, что в случае $g \approx Lu^*$ точность восстановления исходного сигнала повышается. Это видно из ранее приведенных оценок ($\big\|h^*\big\|_H$ в этом случае будет малой).

Вообще, если $g = Lu^*$, u^* — искомый сигнал, то из вариационного неравенства для u_α следует: $u_\alpha \equiv u^*$ $\forall\,\alpha > 0$, то есть регуляризованные решения стационарны. В случае $g \approx Lu^*$ можно ожидать, что диапазон «подходящих» значений параметра регуляризации будет достаточно широк. Это существенно облегчает решение проблемы реконструкции полезного сигнала методом регуляризации.

4. Случай линейного плотного множества. Предположим теперь, что D — линейное множество, плотное в H. Тогда вместо вариационного неравенства Эйлера для u_α имеем тождество Эйлера:

$$\big(u_\alpha - u^*, w\big)_H + \alpha\big(Lu_\alpha - g, Lw\big)_G = 0 \qquad \forall\, w \in D.$$

Если $Lu^* - g \in D_{L^*}$, то положив $h^* = L^*\big(Lu^* - g\big)$ из предыдущего тождества получаем:

$$\big(z_\alpha + \alpha h^*, w\big)_H + \alpha\big(Lz_\alpha, Lw\big)_G = 0 \qquad \forall\, w \in D,$$

то есть элемент z_α доставляет минимальное значение функционалу

$$\alpha\big\|Lz\big\|_G^2 + \big\|z + \alpha h^*\big\|_H^2, \qquad z \in D.$$

Теорема 4. *Пусть D — линейное, плотное в H множество и ξ: $\|\xi\|_H < \delta$. Если $h^* = L^*\big(Lu^* - g\big) \in D_L$, то справедлива оценка*

$$\min_{\alpha>0}\big|\widetilde{u}_\alpha - u^*\big| \leqslant \mathrm{const}\cdot\delta^{\frac{2}{3}}.$$

Доказательство. Действительно, согласно сделанному выше замечанию возьмем в качестве элемента сравнения $z = -\alpha h^*$. Получаем:

$$\alpha\big\|Lz_\alpha\big\|_G^2 + \big\|z_\alpha + \alpha h^*\big\|_H^2 \leqslant \alpha^3\big\|Lh^*\big\|_G^2.$$

Таким образом, имеем:

$$\big\|Lz_\alpha\big\|_G \leqslant \alpha\big\|Lh^*\big\|_G, \qquad \big\|z_\alpha\big\| \leqslant \alpha\big\|h^*\big\|_H + \alpha^{\frac{3}{2}}\big\|Lh^*\big\|_G.$$

Так как $\big|\widetilde{z}_\alpha\big| \leqslant \dfrac{\delta}{\sqrt{\alpha}}$, $\alpha > 0$, то взяв $\alpha = \delta^{\frac{2}{3}}$, получаем утверждение теоремы.

Замечание 3. Теорема 4 требует достаточно большой "гладкости" от элемента u^*. К сожалению, если мы желаем получить регуляризованные решения с гарантированной точностью $\delta^{\frac{1}{2}}$ или $\delta^{\frac{2}{3}}$, то на классе задач, как нам представляется, ослабить условия теорем 3 и 4 нельзя [4]. Было бы желательно также отказаться от линейности D, сохранив его выпуклость, и сформулировать, как и ранее, условия гладкости в менее обременительной вариационной форме. Важной проблемой является также получение аналогичных оценок для регуляризованных решений, определяемых в соответствии с принципом невязки. Отметим также, что сигнал u^* сам по себе восстанавливается гораздо более точно, чем его L-характеристика.

5. Случай выпуклого множества. В этой части снова будем считать, что D — выпуклое множество в H, а "шум" $\xi \rightharpoonup 0$, то есть стремится к нулю в смысле слабой сходимости в H. Рассмотрим на D линейный обратимый оператор $\widehat{L}\colon D \to G$, такой, что

$$c\big\|\widehat{L}(u-v)\big\|_G \leqslant |u-v| \leqslant C\big\|\widehat{L}(u-v)\big\|_G \qquad \forall\, u, v \in D, \tag{6}$$

где c, C такие, что $0 < c \leqslant C < +\infty$ и не зависят от выбора u, v. Тогда из (1) следует, что

$$\big\|\widetilde{z}_\alpha\big\|_H^2 + \alpha\big\|L\widetilde{z}_\alpha\big\|_G^2 \leqslant -\big(\widehat{L}^{-1}\widehat{L}\widetilde{z}_\alpha, \xi\big)_H = -\big(\widehat{L}\widetilde{z}_\alpha, (\widehat{L}^{-1})^*\xi\big)_G \leqslant \frac{\big|\widetilde{z}_\alpha\big|}{c}\Delta, \qquad \Delta \equiv \big\|\big(\widehat{L}^{-1}\big)^*\xi\big\|_G. \tag{7}$$

Поэтому, очевидно, справедлива следующая

Теорема 5. *Если $\Delta \to 0$, когда $\xi \rightharpoonup 0$, то можно указать зависимость $\alpha = \alpha(\Delta)$ такую, что*

$$\big|\widetilde{u}_\alpha - u^*\big| \to 0, \qquad \xi \rightharpoonup 0.$$

Замечание 4. Если оператор $\big(\widehat{L}^{-1}\big)^*$ вполне непрерывен, то есть любую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся, то, очевидно, величина $\Delta \to 0$ при $\xi \rightharpoonup 0$. Последнее, например, выполнено, если всякое множество элементов u из области определения D_L оператора L, ограниченное как в H, так и по оператору L (то есть множества вида: $u \in D_L$, $\|u\|_H \leqslant \mathrm{const}$, $\|Lu\|_G \leqslant \mathrm{const}$) компактно в H.

Итак, если $\xi \rightharpoonup 0$, то можно говорить о восстановлении сигнала u^* на фоне "больших" шумов. В самом деле, если H — сепарабельное пространство, а e_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — его ортонормированный базис, то $\xi_n = A_n e_n \rightharpoonup 0$, $n \to \infty$, если $|A_n| \leqslant \mathrm{const}$, то есть речь идет о шумах с большой "амплитудой" и высокой "частотой".

Замечание 5. При наличии дополнительной информации о "гладкости" полезного сигнала u^* (теоремы 3 и 4) можно получить априорные оценки погрешности регуляризации в терминах величины Δ. Это делается аналогично предыдущему. Для краткости вывод соответствующих оценок мы оставляем читателю.

Отметим также, что неравенства (6) выполняются при любом L. В частности, если L ограниченно обратим на D, то можно положить $\widehat{L} \equiv L$.

6. Задача $\widehat{R}$. Рассмотрим задачу $\widehat{R}$: найти элемент $\widehat{u} \in D$, $\big\|\widehat{u}-\widetilde{u}\big\|_H \leqslant \delta$, и доставляющий минимальное значение функционалу $\Omega(u) \equiv \|Lu - g\|_G^2$, $u \in D$, то есть

$$\inf_u \Omega(u) = \Omega\big(\widehat{u}\big),$$

где $u \in D$ такое, что $\big\|u - \widetilde{u}\big\|_H \leqslant \delta$.

Теорема 6. *Если $\|\xi\|_H < \delta$, то решение $\widehat{u}$ задачи $\widehat{R}$ существует и может быть получено методом регуляризации.*

Доказательство. Действительно, пусть параметр регуляризации α выбран в соответствии с принципом невязки (4).

Тогда для любого элемента $u \in D$, $\|u - \widetilde{u}\|_H \leqslant \delta$, будем иметь (в силу экстремального свойства регуляризованных решений)

$$\Phi_\alpha[\widetilde{u}_\alpha] = \|\widetilde{u}_\alpha - \widetilde{u}\|_H^2 + \alpha\|L\widetilde{u}_\alpha - g\|_G^2 = \delta^2 + \alpha\|L\widetilde{u}_\alpha - g\|_G^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|u - \widetilde{u}\|_H^2 + \alpha\|Lu - g\|_G^2 \leqslant \delta^2 + \alpha\|Lu - g\|_G^2,$$

то есть

$$\alpha\|L\widetilde{u}_\alpha - g\|_G^2 \leqslant \alpha\|Lu - g\|_G^2 \qquad \forall\, u \in D\colon\ \|u - \widetilde{u}\|_H \leqslant \delta.$$

Заметим, однако, что при $u = u^*$ в предыдущей цепочке неравенств на последнем этапе имеем строгое неравенство (так как $\|\xi\|_H < \delta$ по условию) и поэтому параметр $\alpha > 0$. Таким образом, элемент $\widetilde{u}_\alpha$ обладает экстремальным свойством:

$$\|L\widetilde{u}_\alpha - g\|_G^2 \leqslant \|Lu - g\|_G^2 \qquad \forall u \in D\colon\ \|u - \widetilde{u}\|_H \leqslant \delta,$$

то есть является решением задачи $\widehat{R}$. Теорема доказана.

Замечание 6. Задача $\widehat{R}$ имеет достаточно прозрачный прагматический смысл: если мы желаем по заданному сигналу $\widetilde{u}$ определить некоторые его характеристики (вычислить оператор L), то естественно это сделать с минимальной “ценой” $\Omega(u)$. Функционал $\Omega(u)$ можно также трактовать как “сложность” реализации восстановленного сигнала. Так, при $L = \dfrac{d^2}{dx^2}$ мы находим сигнал с “минимальной” кривизной.

В случае, если необходимо сохранить “тонкую” структуру полезного сигнала, в качестве $\Omega(u)$ берется полная его вариация [5, 12, 13]. Применяются и другие полезные приемы, например, путем задания специальным образом множества D [3, 6]. Правда, при этом алгоритм восстановления полезного сигнала может существенно усложниться. Как правило, успех соответствует ситуации, когда операцию P_D, то есть операцию проектирования на множество D, можно реализовать эффективно [6, 7].

7. Выбор параметра регуляризации. Существуют [2, 3] достаточно эффективные численные методы выбора параметра регуляризации согласно принципу невязки (4). Однако для этого необходимо достаточно точно знать величину δ, характеризующую погрешность в задании данных $\widetilde{u}$. К сожалению, это знание на практике не всегда присутствует. Поэтому для выбора параметра регуляризации используют некоторые эвристические (или прагматические) подходы [10]. Так, если имеются два измерения $\widetilde{u}_1$ и $\widetilde{u}_2$ сигнала u^*, то можно поступить следующим образом. Находим регуляризованные решения $\widetilde{u}_\alpha^1$, соответствующие $\widetilde{u} = \widetilde{u}_1$ и определяем параметр регуляризации в соответствии с модернизированным принципом невязки, а именно, из условия

$$\|\widetilde{u}_\alpha^1 - \widetilde{u}_2\|_H - \min_{\alpha>0}.$$

Если измерения $\widetilde{u}_1$ и $\widetilde{u}_2$ независимы, то модифицированный принцип невязки дает достаточно удовлетворительные результаты. По идее этот принцип близок к cross-validation методу [8].

Еще одна идея выбора параметра регуляризации состоит в следующем. Пусть $u_\alpha^{(1)}$ — решение задачи $\widetilde{R}_\alpha$. Назовем семейство $u_\alpha^{(1)}$ первичным регуляризованным семейством. Затем положим $g \equiv Lu_\alpha^{(1)}$ и снова решим задачу $\widetilde{R}_\alpha$. Ее решения $u_\alpha^{(2)}$ назовем вторичным регуляризованным семейством. Если D — линейное множество, то, очевидно, справедливы следующие тождества Эйлера:

$$\big(u_\alpha^{(1)} - \widetilde{u}, v\big)_H + \alpha\big(Lu_\alpha^{(1)} - g, Lv\big)_G = 0,$$
$$\big(u_\alpha^{(2)} - \widetilde{u}, v\big)_H + \alpha\big(Lu_\alpha^{(2)} - Lu_\alpha^{(1)}, Lv\big)_G = 0 \qquad \forall\, v \in D.$$

Отсюда имеем:

$$\big(u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}, v\big)_H + \alpha\Big(L\big(u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}\big) - \big(Lu_\alpha^{(1)} - g\big), Lv\Big)_G = 0 \qquad \forall\, v \in D.$$

С другой стороны, для производной $\dfrac{du_\alpha^{(1)}}{d\alpha}$ легко получить тождество

$$\Big(\frac{du_\alpha^{(1)}}{d\alpha}, v\Big)_H + \alpha\Big(L\,\frac{du_\alpha^{(1)}}{d\alpha}, Lv\Big)_G + \big(Lu_\alpha^{(1)} - g, Lv\big)_G = 0 \qquad \forall\, v \in D.$$

Умножив последнее тождество на α и сложив его с предыдущим, получим

$$\Big(u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)} + \alpha\frac{du_\alpha^{(1)}}{d\alpha}, v\Big)_H + \alpha\left(L\big(u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}\big) + \alpha L\,\frac{du_\alpha^{(1)}}{d\alpha}, Lv\right)_G = 0 \quad \forall\, v \in D.$$

Полагая здесь $v = u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)} + \alpha\,\dfrac{du_\alpha^{(1)}}{d\alpha}$, будем иметь:

$$u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)} + \alpha\,\frac{du_\alpha^{(1)}}{d\alpha} = 0, \qquad L\Big(u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)} + \alpha\,\frac{du_\alpha^{(1)}}{d\alpha}\Big) = 0. \tag{8}$$

Итак, справедлива

Теорема 7. *Если D — линейное множество, то вторичное $u_\alpha^{(2)}$ и первичное $u_\alpha^{(1)}$ регуляризованные семейства решений связаны соотношениями* (8).

Отметим, что соотношения, аналогичные (8), были получены автором более 30 лет назад. На этих соотношениях основан метод выбора так называемых квазиоптимальных значений параметра регуляризации, предложенный в 60-х годах А. Н. Тихоновым и В. Б. Гласко [1]. Мы дадим наше истолкование этого метода в терминах соотношений (8).

Именно, будем называть модифицированным методом выбора квазиоптимальных значений параметра регуляризации метод, основанный на следующих критериях:

$$\big\|u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}\big\|_H - \min_\alpha, \qquad \big\|L\big(u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}\big)\big\|_G - \min_{\alpha>0},$$

либо, более общо:

$$\rho\,\big\|u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}\big\|_H + (1-\rho)\big\|L\big(u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}\big)\big\|_G - \min_{\alpha>0},$$

где ρ такое, что $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ — весовой множитель. Согласно (8) последнее означает:

$$\rho\alpha\Big\|\frac{du_\alpha^{(1)}}{d\alpha}\Big\|_H + (1-\rho)\alpha\Big\|L\frac{du_\alpha^{(1)}}{d\alpha}\Big\|_G - \min_{\alpha>0}. \tag{9}$$

К сожалению, метод (9) может дать несколько локальных экстремумов. Тогда выбранное значение параметра регуляризации необходимо проверить на соответствие критерию невязки. Заметим также, что метод (9) не требует для своей реализации знания вторичного регуляризованного семейства решений.

Более того, если взять так называемую "геометрическую" сетку значений параметра регуляризации, а именно:

$$\alpha_j = \tau\alpha_{j-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, M,$$

где $\alpha_0 > 0$ — достаточно большое начальное значение, $\tau \approx 1$, $\tau < 1$, то дискретный вариант выглядит так:

$$\rho\,\big\|u_{\alpha_j}^{(1)} - u_{\alpha_{j-1}}^{(1)}\big\|_H + (1-\rho)\big\|Lu_{\alpha_j}^{(1)} - Lu_{\alpha_{j-1}}^{(1)}\big\|_G - \min_j. \tag{10}$$

Таким образом, модифицированный метод выбора квазиоптимальных значений параметра регуляризации можно истолковать как выбор регуляризованного решения из "жгута" (или "спайки") семейства регуляризованных решений, где они наиболее "тесно" прилегают друг к другу. Отметим, что алгоритмически рассмотренный метод, очевидно, применим и в случае, когда D — выпуклое множество.

Заключение. Изложенная схема регуляризации для решения задачи восстановления (фильтрации) зашумленных сигналов является достаточно общей. Так, например, если множество $D = N_L = \{u \in D_L\colon Lu = 0\}$, то метод регуляризации сводится к классическому методу наименьших квадратов.

Если информация $\widetilde{u}$ о "полезном" сигнале u^* задана в дискретной форме (например, как набор значений некоторых функционалов), то мы приходим к регуляризованным сплайнам, полиномиальным или тригонометрическим, в зависимости от выбора оператора [9]. В эту же схему можно вложить экспоненциальные и гауссовские аппроксимации, "вейвлеты" и другие способы приближений. Особенно эффективным может оказаться применение Фурье-преобразований. При этом множество D может задаваться как некоторые ограничения на спектральный состав искомых сигнала.

Численные результаты, иллюстрирующие изложенные подходы обработки цифровых сигналов, можно найти в [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01–01–00398).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
2. *Morozov V.A.* Methods for solving incorrectly posed problems. New York: Springer-Verlag, 1984.
3. *Morozov V.A.* Regularization methods for ill-posed problems. London: CRC Press, 1993.
4. *Groetsch C.W.* The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind. Boston: Pitman, 1984.
5. *Vogel C.R.* Total variation regularizations for ill-posed problems. Report. Dept. of Mathem. Sci., Montana State Univ., USA, 1993.
6. *Malyshev V.A., Morozov V.A.* Linear semigroups and differential inequalities. Moscow: Moscow University Press, 1995.
7. *Youla D.C., Webb H.* Image reconstruction by the method of convex projections // IEEE Trans. on Medical Imaging. 1982, **MI-1**, N 2. 81–94.
8. *Wahba G.* Practical approximate solutions of linear operator equations when the data are noisy // SIAM Journal of Numerical Analysis. 1977. **14**, N 4. 651–667.
9. *Morozov V.A.* Theory of splines and problems of stable calculation of values of unbounded operators // J. Comp. Math. and Math. Phys. 1971. **11**, N 3. 545–558.
10. *Hansen P.Ch.* Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // SIAM Review. 1992. **34**. 561–580.
11. *Морозов В.А., Поспелов В.В.* Цифровая обработка сигналов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
12. *Fitzpabrick B.G., Keeling S.L.* On approximation in total variation penalization for image reconstruction and inverse problems // J. Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1997. **18**, N 9. 941–950.
13. *Nashed M.Z., Scherzer O.* Least squares and bounded variation regularization with nondifferentiable functions // J. Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1998. **19**, N 7. 873–901.
14. *Морозов В.А.* Об устойчивых численных методах решения совместных систем линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1984. **24**, № 2. 179–186.

Поступила в редакцию
22.03.2001