

УДК 519.6

## РЕАЛИЗАЦИЯ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ НА РАЗНЕСЕННОЙ СЕТКЕ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

К. Н. Волков<sup>1</sup>

Рассматривается дискретизация уравнений, описывающих нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, на основе метода конечных разностей и схемы расщепления по физическим факторам на прямоугольной неравномерной сетке с шахматным расположением узлов. Обсуждаются особенности реализации граничных условий для искомых функций и конструирования разностной сетки, а также детали дискретизации производных по времени и пространству. Проводится сравнение различных итерационных методов решения уравнения Пуассона для давления. Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере решения задачи поперечного обтекания кругового цилиндра.

**Ключевые слова:** динамика вязкой жидкости, уравнения Навье–Стокса, метод конечных разностей, схема расщепления, метод проекции, разнесенная сетка.

**1. Введение.** Подходы к описанию течений вязкой несжимаемой жидкости основаны на использовании переменных скорость–давление (физические переменные), переменных функция тока–вихрь скорости или скорость–вихрь скорости (преобразованные переменные) [1, 2].

Постановка задачи в физических переменных позволяет сравнительно легко распространить методы расчета плоских течений на трехмерный случай. Однако уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости содержит лишь составляющие скорости, в связи с чем нет прямой связи с давлением, которая для сжимаемых течений осуществляется через плотность. Трудности реализации подхода связаны с определением давления на стенке.

Введение функции тока и уравнения переноса вихря позволяет избежать явного использования уравнения неразрывности. Обобщение такого подхода на трехмерный случай не столь очевидно: в пространственном случае функция тока не существует и для описания потока используются вихрь скорости и векторный потенциал [3].

При использовании переменных скорость–вихрь скорости решаются уравнение переноса вихря и уравнение неразрывности, которые замыкаются соотношениями, связывающими вихрь скорости с ее производными. Дифференцирование уравнения неразрывности и соотношений, определяющих вихрь скорости, приводит к уравнениям эллиптического типа относительно составляющих скорости [1].

Трудности расчета в преобразованных переменных связаны с необходимостью определения значений вихря скорости на стенке. Физическая постановка задачи дает ясную формулировку граничных значений для составляющих скорости, а вихрь, являясь кинематической характеристикой поля скорости, этими условиями не определяется. На практике обычно используется подход, связанный с локализацией и последовательным уточнением граничных значений. Вихрь скорости на стенке находится из разложения функции тока в ряд Тейлора [1, 2], а для обеспечения устойчивости итерационного процесса используется нижняя релаксация. Другой подход основан на привлечении теоремы Стокса о циркуляции. Для обеспечения сходимости требуется больше времени, чем при решении задачи в примитивных переменных [3]. Разностные схемы, не использующие граничные условия для вихря на стенке, при прочих равных условиях обладают большей эффективностью [4].

Для задач с достаточно гладким решением и мягкими граничными условиями для дискретизации уравнений Навье–Стокса, записанных в физических переменных, находят применение спектральные методы, которые позволяют определить значения искомых функций более точно, чем локальные методы [3]. Важная роль граничных условий при построении спектральных методов привела к использованию псевдоспектральных подходов. Использование полиномов Чебышева для определения точек коллокации приводит к мелкой сетке вблизи границ и сравнительно грубой сетке внутри расчетной области, что удобно для моделирования течений при больших числах Рейнольдса.

<sup>1</sup> Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, физико-механический факультет, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; e-mail: dsci@mail.ru

Основное преимущество спектральных методов состоит в том, что высокая пространственная точность получается при сравнительно небольшом числе точек коллокации. Их основной недостаток связан с сильными ограничениями на шаг по времени при расчете стационарных или слабо меняющихся со временем течений [3]. При моделировании нестационарных течений, в которых для достижения необходимой точности требуются малые шаги по времени, спектральные методы становятся конкурентоспособными с конечно-разностными методами (особенно для областей регулярной формы).

Конечно-разностные и конечно-объемные методы решения делятся на методы, использующие процедуру коррекции давления (pressure-based algorithm), и методы, основанные на принципе расщепления неизвестных (pressure-velocity coupling).

В полунейвном методе для связанных через давление уравнений (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations, SIMPLE) используется дискретизация уравнений Навье–Стокса по методу контрольного объема. На шаге предиктор, используя некоторое начальное поле давления, из уравнений движения вычисляется предварительное поле скорости. На шаге корректор рассчитывается поле поправок давления таким образом, чтобы удовлетворить уравнению неразрывности в каждом контрольном объеме. Затем корректируются поле давления и поле скорости. Поправки к полю скорости определяются поправками к давлению в соответствии с приближенными уравнениями движения, в которых продольные конвективные члены уравниваются членами с давлением. Поправки к давлению находятся из решения уравнения Пуассона. В результате, поля зависимых переменных оказываются согласованными. Характерная особенность метода SIMPLE состоит в построении разностной схемы относительно приращений зависимых переменных.

Имеются многочисленные модификации метода SIMPLE, например, методы SIMPLEC (SIMPLE Corrected), SIMPLER (SIMPLE Efficiently Revised), PISO (Pressure Implicit with Splitting Operators), позволяющие добиться лучшего согласования поля давления и поля скорости, уменьшить затраты машинного времени и увеличить скорость сходимости при расчете нестационарных течений и течений с вращением. В частности, применение метода SIMPLER уменьшает время счета на 30–50 % несмотря на увеличение числа операций на каждой итерации на 30 % по сравнению с методом SIMPLE [3]. Для обеспечения сходимости вводится нижняя релаксация для давления ( $\omega = 0.1 \div 0.3$ ) и скорости ( $\omega = 0.5 \div 0.8$ ). Применяется как совмещенная (collocated grid), так и разнесенная (staggered grid) сетка. Для монотонизации поля давления на разнесенной сетке используется интерполяция Рхи–Чоу (Rhie–Chow interpolation).

Несмотря на то, что многие из модификаций метода SIMPLE широко используются на практике и включаются во многие современные вычислительные пакеты (FLUENT, STAR-CD, CFX), ни один из них не является универсальным. Выбор подхода во многом зависит от условий задачи.

В методе маркеров и ячеек (Markers And Cells, MAC) используется разнесенная сетка и на каждом шаге по времени решается уравнение Пуассона для давления. При формулировании граничного условия для давления привлекается уравнение движения в проекции на нормаль к стенке. Поскольку указанное условие отсутствует в физической постановке задачи, это снижает эффективность подхода [4].

В упрощенном методе MAC (Simple MAC, SMAC) для выполнения уравнения неразрывности вводится дополнительное уравнение Пуассона относительно вспомогательного потенциала скорости. Благодаря использованию идеи расщепления и замене давления на потенциальную функцию, обеспечивающую согласованность поля скорости и удовлетворяющую однородным граничным условиям, удается избежать недостатков метода MAC. Реализация условия прилипания в методе SMAC не обеспечивает баланса сил на твердой поверхности, а погрешность увеличивается с ростом числа Рейнольдса [4].

Для областей произвольной геометрической конфигурации уравнения записываются в криволинейной системе координат, согласованной с границами области в вычислительном пространстве, после чего метод MAC применяется к регулярной области. Для расчета давления используются перекрывающиеся сетки (в уравнении изменения количества движения, записанном в криволинейной системе координат, присутствуют производные от давления по разным координатным направлениям).

С методом MAC связан метод проекции (projection method), который совпадает с ним во внутренних точках, но отличается реализацией граничных условий [4, 5].

В данной работе рассматриваются особенности дискретизации уравнений Навье–Стокса, записанных в физических переменных, на прямоугольной неравномерной сетке с шахматным расположением узлов при помощи схемы расщепления по физическим факторам (метод проекции). Для дискретизации производных по времени используется схема Адамса–Башфорта второго порядка точности, а для дискретизации диффузионных и конвективных потоков — центрированные конечно-разностные формулы второго порядка и конечно-разностные схемы повышенной разрешающей способности. Предлагаемая реализация схемы расщепления является достаточно универсальной, позволяет проводить расчеты в многосвязной

области на прямоугольной сетке и использовать различные граничные условия для давления на стенке. Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере решения задачи обтекания кругового цилиндра при небольших числах Рейнольдса.

**2. Схема расщепления по физическим факторам.** Уравнения, описывающие нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, имеют следующий вид:

$$\nabla \mathbf{v} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}. \tag{2}$$

Здесь  $\mathbf{f}$  — внешняя массовая сила, приходящаяся на единицу объема. Зависимость коэффициентов переноса от пространственных координат для простоты записи не учитывается.

Пусть в момент времени  $t^n$  известны поле скорости  $\mathbf{v}$  и поле давления  $p$ . Тогда для расчета неизвестных функций в момент времени  $t^{n+1}$  используется следующая схема расщепления [4, 5].

На этапе 1 предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии:

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + \nu \Delta \mathbf{v}^n + \mathbf{f}^n. \tag{3}$$

Несмотря на то, что промежуточное поле скорости  $\tilde{\mathbf{v}}$  не удовлетворяет уравнению неразрывности, оно имеет физический смысл. Применив оператор  $\text{rot}$  к уравнению (2) и уравнению (3) и учитывая, что  $\text{rot} \nabla p = 0$ , получим  $\text{rot} \tilde{\mathbf{v}} = \text{rot} \mathbf{v}^{n+1} = \boldsymbol{\omega}^{n+1}$ . Промежуточное поле скорости во внутренних точках сохраняет вихревые характеристики.

На этапе 2 по найденному промежуточному полю скорости  $\tilde{\mathbf{v}}$  с учетом соленоидальности вектора скорости  $\mathbf{v}^{n+1}$  рассчитывается поле давления:

$$\Delta p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \tilde{\mathbf{v}}. \tag{4}$$

Для решения уравнения Пуассона (4) на каждом шаге по времени используются либо итерационные, либо прямые методы.

На этапе 3 предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет градиента давления (конвекция и диффузия отсутствуют):

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}. \tag{5}$$

Уравнение Пуассона (4) получается путем взятия дивергенции от обеих частей равенства (5) с учетом уравнения неразрывности  $\nabla \mathbf{v}^{n+1} = 0$ .

**3. Начальные и граничные условия.** Уравнения (1) и (2) образуют смешанную эллиптически-параболическую систему относительно составляющих скорости и давления [2].

Задача решается на промежутке времени  $t \in [0, t_f]$  и всех  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Вычислительная область  $\Omega$  считается вложенной внутрь параллелепипеда  $\Omega_R = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z]$ , где  $X, Y, Z$  — максимальные размеры расчетной области  $\Omega$  в направлении осей  $x, y$  и  $z$ . В момент времени  $t = 0$  задается начальное распределение скорости, удовлетворяющее уравнению неразрывности.

Граница расчетной области  $\Gamma = \partial\Omega$  представляется в виде объединения нескольких непересекающихся участков  $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ),  $\Gamma_i \subset \Gamma$ , каждый из которых характеризуется своим типом граничных условий ( $\Gamma_1$  — входная граница,  $\Gamma_2$  — выходная граница,  $\Gamma_3$  — стенка,  $\Gamma_4$  — граница с условиями скольжения,  $\Gamma_5$  — удаленная граница,  $\Gamma_6$  — граница с периодическими граничными условиями).

1. На участке границы  $\Gamma_1$ , через которую жидкость поступает в расчетную область, для скорости выставляются граничные условия типа Дирихле  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ , что приводит к однородным граничным условиям Неймана для давления  $\partial p^{n+1}(\mathbf{x})/\partial n = 0$ .

2. На участке границы  $\Gamma_2$ , через которую жидкость покидает расчетную область, для скорости выставляются граничные условия свободного вытекания, представляющие собой однородные граничные условия типа Неймана  $\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})/\partial n = 0$ . Интегрируя (4) по  $\Omega$  и применяя к левой части теорему Гаусса–Остроградского, а к правой — теорему о дивергенции, для давления получим неоднородные граничные условия типа Неймана:

$$\frac{\partial p^{n+1}(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{1}{\Delta t |\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} \tilde{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{l}.$$

Другой способ постановки граничных условий для давления на выходной границе связан с использованием уравнений Стокса. Пренебрегая конвективным переносом, запишем

$$\nu \frac{\partial v^{n+1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = (p^{n+1} - p_{\Gamma_2}) \mathbf{n}(\mathbf{x}),$$

где  $p_{\Gamma_2}$  — среднее давление,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к границе  $\Gamma_2$ . В двумерном случае, когда  $\mathbf{v} = \{u, v\}$ , для границы  $\Gamma_2 = \{x\} \times \{y_0, y_1\}$ ,  $\mathbf{n} = \{0, 1\}$ , получим

$$\int_{\Gamma_2} p \, dy = \nu \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + p_{\Gamma_2} \right) dy = -\nu \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} + p_{\Gamma_2} \right) dy = \nu [v(y_1) - v(y_0)] + |\Gamma_2| p_{\Gamma_2}.$$

3. На стенке  $\Gamma_3$  ставятся условия непротекания и прилипания для нормальной и тангенциальной составляющих скорости  $v_n(\mathbf{x}) = v_\tau(\mathbf{x}) = 0$ . Для постановки граничных условий Неймана для давления на стенке используется дискретное уравнение переноса количества движения. При больших числах Рейнольдса используется приближение пограничного слоя  $\partial p / \partial n = 0$ .

4. Граничные условия скольжения на границе  $\Gamma_4$  представляют собой условие Дирихле для нормальной и условие Неймана для тангенциальной составляющих скорости:  $v_n(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\partial v_\tau(\mathbf{x}) / \partial n = 0$ . Такие же граничные условия имеют место и для промежуточного поля скорости  $\tilde{\mathbf{v}}$ , что приводит к однородным граничным условиям типа Неймана для давления:  $\partial p^{n+1}(\mathbf{x}) / \partial n = 0$ .

5. На удаленной границе  $\Gamma_5$  выставляются граничные условия  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  невозмущенного течения или условия скольжения.

6. Периодические граничные условия (условия повторения течения) выставляются для всех искомым функций на противоположных гранях параллелепипеда  $\Omega_R$ .

В том случае, когда составляющие скорости задаются на всей границе расчетной области (например, в задаче о течении в каверне с движущейся крышкой), необходимо обеспечить выполнение интегрального уравнения неразрывности

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0. \quad (6)$$

При выставлении граничных условий Неймана для давления на всех границах области (например при моделировании внутренних течений) необходимо, чтобы выполнялось интегральное граничное условие, которое следует из теоремы Гаусса–Остроградского:

$$\int_{\Omega} \Delta p \, d\omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} \, ds. \quad (7)$$

Левая часть соотношения (7) вычисляется через промежуточное поле скорости  $\tilde{\mathbf{v}}$  с использованием правой части уравнения Пуассона для давления.

Для внутренней ячейки соотношение (7) выполняется точно, если производная  $\partial p / \partial n$  вычисляется через уравнение изменения импульса. При записи (7) для всей области необходимо выполнение закона сохранения массы (6), а производная  $\partial p / \partial n$  на границе вычисляется из уравнения изменения импульса или там, где это возможно, полагается  $\partial p / \partial n = 0$ .

Невыполнение условия (7) приводит либо к медленной сходимости к решению, либо к расходимости. При выполнении (7) введение граничного условия Неймана для давления приводит к замедлению сходимости итераций, если на всех границах задаются граничные условия типа Дирихле [3].

**4. Разностная сетка.** Для дискретизации уравнений (1) и (2) используется метод конечных разностей на прямоугольной неравномерной сетке с шахматным расположением узлов (рис. 1). Давление определяется в центре ячейки, а составляющие скорости — на ее границах.

Применение разнесенной сетки позволяет связать значения скорости и давления в соседних узлах и избежать появления осцилляций в решении, которые возникают при использовании центральных разностей на неразнесенной сетке. На сетке с шахматным расположением узлов поле скорости и поле давления аппроксимируются со вторым порядком точности с использованием составляющих скорости и значений давления в двух смежных точках. При этом уравнение Пуассона для давления автоматически удовлетворяет дискретному представлению интегрального условия (6).

В случае разнесенной сетки труднее осуществляется постановка граничных условий, поскольку по крайней мере одна из зависимых переменных не определена на границе. При программировании необходимо связать полный набор независимых переменных с индексами массивов, в которых они хранятся.

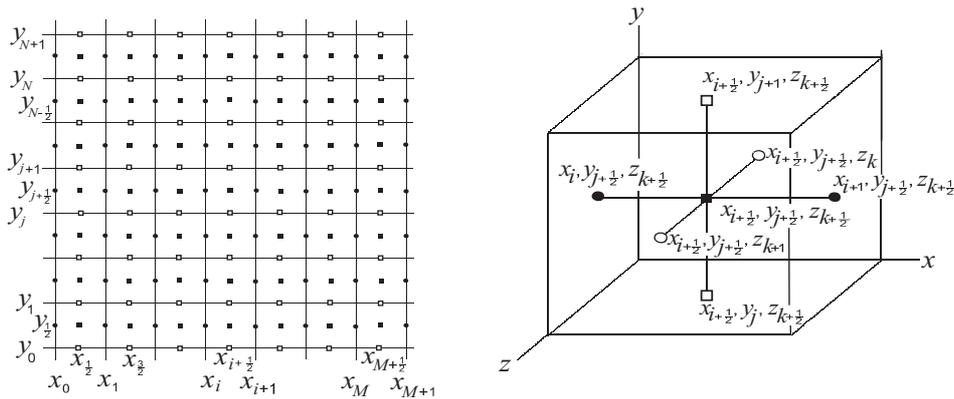


Рис. 1. Разностная сетка с шахматным расположением узлов

Например, элементам массивов с индексами  $i, j, k \in Z$ , в которых хранятся скорость и давление, могут соответствовать значения  $u_{i,j+1/2,k+1/2}$ ,  $v_{i+1/2,j,k+1/2}$ ,  $w_{i+1/2,j+1/2,k}$  и  $p_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$ . Переменные обозначаются одним набором индексов несмотря на то, что различные переменные вычисляются в разных узлах. В результате индексы  $i, j, k$  относятся к набору из четырех несовпадающих точек. Соответствие неизвестных функций и узлов расчетной сетки приведено в табл. 1.

Таблица 1  
Соответствие неизвестных функций и узлов сетки

Функция	Узел	Обозначение
$u_{i,j,k}$	$x_i, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}$	●
$v_{i,j,k}$	$x_{i+1/2}, y_j, z_{k+1/2}$	□
$w_{i,j,k}$	$x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_k$	○
$p_{i,j,k}$	$x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}$	■

Расчетная область представляет собой набор непересекающихся ячеек, каждая из которых имеет вид параллелепипеда  $\Omega = \bigcup_{i,j,k \in Z} c_{i,j,k}$ , где  $c_{i,j,k} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$ .

Шаги сетки находятся из соотношений  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta x_{i+1/2} = (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})/2$ . В пристеночной области расчеты проводятся с использованием неравномерной сетки, шаги которой при удалении от стенки возрастают по закону геометрической прогрессии  $\Delta x_{i+1}/\Delta x_i = K \forall i$ . Для схемы с постоянным отношением шагов выполнено  $\Delta x_i = K^{i-1} \Delta x_1$ , так что  $x_i = \Delta x_1 (K^{i-1} - 1)/(K - 1)$ .

Учет нерегулярной геометрии расчетной области производится при помощи блокировки или выключения некоторых ячеек регулярной сетки таким образом, чтобы оставшиеся действующие ячейки описывали нерегулярную геометрию. При этом граница области аппроксимируется набором ступенек (чем меньше шаг сетки, тем меньше ошибка такого приближения). Операция блокировки включает в себя установление известных значений соответствующих величин в выключенных ячейках.

Для постановки граничных условий на криволинейной поверхности вблизи границы используется также мелкая равномерная сетка, а граничное условие переносится в узел сетки, ближайший к границе. Для расчета значений искомой функции в узле сетки, отстоящем от границы на расстояние, меньшее шага сетки, используется линейная интерполяция. Интерполяция проводится по заданному значению функции на границе и ее значениям в узлах сетки, соседних с узлом, прилежащим к границе.

**5. Численная реализация.** Схема расщепления реализуется в виде следующей последовательности шагов.

1. По известному в момент времени  $t = 0$  распределению скорости из уравнения (3) находится промежуточное поле скорости, которое определяет правую часть уравнения (4). Полагая коэффициент вязкости постоянным, получим схему Эйлера

$$\tilde{v} = v^n + \Delta t [-(v \cdot \nabla_h)v + \nu \Delta_h v + f]^n$$

и схему Адамса–Башфорта

$$\tilde{v} = v^n + \frac{3}{2} \Delta t [-(v \cdot \nabla_h)v + \nu \Delta_h v + f]^n - \frac{1}{2} \Delta t [-(v \cdot \nabla_h)v + \nu \Delta_h v + f]^{n-1}.$$

Здесь

$$\nabla_h \mathbf{v}^n = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j,k}^n + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{i,j,k}^n + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{i,j,k}^n, \quad \Delta_h \mathbf{v}^n = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2}\right)_{i,j,k}^n + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2}\right)_{i,j,k}^n + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}\right)_{i,j,k}^n.$$

Для дискретизации первых производных от скорости используется схема UDS-1:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j,k} = \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{\Delta x_i}.$$

Для дискретизации вторых производных от скорости используется схема CDS-2:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j,k} &= \left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{\Delta x_i} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-1}}\right) \frac{1}{\Delta x_{i+1/2}}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j,k} &= \left(\frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k}}{\Delta y_{j+1/2}} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}}{\Delta y_{j-1/2}}\right) \frac{1}{\Delta y_j}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{i,j,k} &= \left(\frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}}{\Delta z_{k+1/2}} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k-1/2}}\right) \frac{1}{\Delta z_k}. \end{aligned}$$

2. Решается уравнение Пуассона (4), которое записывается в виде  $\Delta_h p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla_h \tilde{\mathbf{v}}$ . Здесь  $\Delta_h p = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_{i,j,k} + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)_{i,j,k} + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)_{i,j,k}$ ,  $\nabla_h \tilde{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_{i,j,k} + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right)_{i,j,k} + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\right)_{i,j,k}$ . Для дискретизации вторых производных от давления используется схема CDS-2:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta x_i} \left(\frac{p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}}{\Delta x_{i+1/2}} - \frac{p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-1/2}}\right).$$

Итерационный цикл завершается при выполнении условия  $\left\{ \frac{1}{N_{\mathcal{F}}} \sum_{c \in \mathcal{F}} \left[ (\Delta_h p)_c - \frac{1}{\Delta t} (\nabla_h \tilde{\mathbf{v}})_c \right]^2 \right\}^{1/2} \leq \varepsilon$ , где  $\mathcal{F} \subset \Omega$  — множество ячеек сетки, заполненных жидкостью,  $N_{\mathcal{F}}$  — количество элементов множества  $\mathcal{F}$ ,  $\varepsilon$  — погрешность ( $\varepsilon \sim 10^{-6}$ ). Индекс  $c$  относится к центру ячейки, имеющей вид параллелепипеда  $[x, x + \Delta x_c] \times [y, y + \Delta y_c] \times [z, z + \Delta z_c]$ . Для контроля сходимости на каждом шаге по времени вычисляется значение невязки, которую дает уравнение неразрывности для промежуточного поля скорости ( $V$  — объем расчетной области):

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{v}} \, d\omega = \frac{1}{V} \sum_{c \in \mathcal{F}} (\nabla_h \tilde{\mathbf{v}})_c \Delta x_c \Delta y_c \Delta z_c.$$

3. При помощи уравнения (5) находится поле скорости на шаге  $n + 1$  по времени:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}} - \Delta t \nabla_h p^{n+1}.$$

Здесь  $\nabla_h p^{n+1} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j,k}^{n+1} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j,k}^{n+1} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{i,j,k}^{n+1} \mathbf{k}$ . Дискретизация уравнения изменения количества движения производится с помощью конечно-разностных соотношений, центрированных относительно точки  $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ . Это позволяет представить производные от давления в следующем виде:  $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j,k} = \frac{p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}}{\Delta x_{i+1/2}}$ . Погрешность дискретизации имеет порядок  $O(h^2)$ , где  $h = \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ .

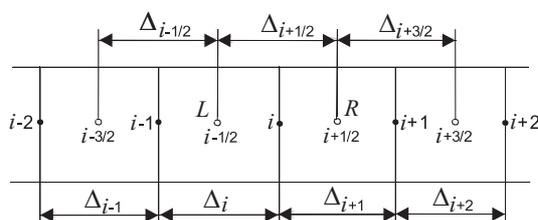


Рис. 2. Разностный шаблон для дискретизации конвективных потоков

Рассмотрим дискретизацию конвективных потоков в уравнении изменения количества движения в проекции на ось  $x$ :  $\left(\frac{\partial uu}{\partial x}\right)_{i,j,k} + \left(\frac{\partial vu}{\partial y}\right)_{i,j,k} + \left(\frac{\partial wu}{\partial z}\right)_{i,j,k}$  (разностный шаблон показан на рис. 2). Для дискретизации отдельных слагаемых используются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial uu}{\partial x}\right)_{i,j,k} &= \frac{\tilde{u}_R u_R - \tilde{u}_L u_L}{\Delta x_{i+1/2}}, & u_L &= u_{i-1/2,j,k}, & u_R &= u_{i+1/2,j,k}, & \tilde{u}_L &= u_{i-1/2,j,k}, & \tilde{u}_R &= u_{i+1/2,j,k}; \\ \left(\frac{\partial vu}{\partial y}\right)_{i,j,k} &= \frac{\tilde{v}_R u_R - \tilde{v}_L u_L}{\Delta y_j}, & u_L &= u_{i,j-1/2,k}, & u_R &= u_{i,j+1/2,k}, & \tilde{v}_L &= v_{i-1/2,j,k}, & \tilde{v}_R &= v_{i+1/2,j,k}; \\ \left(\frac{\partial wu}{\partial z}\right)_{i,j,k} &= \frac{\tilde{w}_R u_R - \tilde{w}_L u_L}{\Delta z_k}, & u_L &= u_{i,j,k-1/2}, & u_R &= u_{i,j,k+1/2}, & \tilde{w}_L &= w_{i-1/2,j,k}, & \tilde{w}_R &= w_{i+1/2,j,k}. \end{aligned}$$

Для расчета величин  $\tilde{u}_L, \tilde{u}_R, \tilde{v}_L, \tilde{v}_R, \tilde{w}_L, \tilde{w}_R$  на гранях ячейки применяется линейная интерполяция узловых значений:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_L &= \frac{u_{i-1,j,k} + u_{i,j,k}}{2}; & \tilde{u}_R &= \frac{u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}}{2}; \\ \tilde{v}_L &= \frac{\Delta x_i v_{i-1,j,k} + \Delta x_{i-1} v_{i,j,k}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}; & \tilde{v}_R &= \frac{\Delta x_{i+1} v_{i,j,k} + \Delta x_i v_{i+1,j,k}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}; \\ \tilde{w}_L &= \frac{\Delta x_i w_{i-1,j,k} + \Delta x_{i-1} w_{i,j,k}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}; & \tilde{w}_R &= \frac{\Delta x_{i+1} w_{i,j,k} + \Delta x_i w_{i+1,j,k}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}. \end{aligned}$$

Такой же подход применяется для расчета скорости в узлах с полуцелыми индексами:

$$\begin{aligned} u_{i-1/2,j,k} &= \frac{u_{i-1,j,k} + u_{i,j,k}}{2}; & u_{i+1/2,j,k} &= \frac{u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}}{2}; \\ u_{i,j-1/2,k} &= \frac{\Delta y_j u_{i,j-1,k} + \Delta y_{j-1} u_{i,j,k}}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j}; & u_{i,j+1/2,k} &= \frac{\Delta y_{j+1} u_{i,j,k} + \Delta y_j u_{i,j+1,k}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}}; \\ u_{i,j,k-1/2} &= \frac{\Delta z_k u_{i,j,k-1} + \Delta z_{k-1} u_{i,j,k}}{\Delta z_{k-1} + \Delta z_k}; & u_{i,j,k+1/2} &= \frac{\Delta z_{k+1} u_{i,j,k} + \Delta z_k u_{i,j,k+1}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}}. \end{aligned}$$

Введем величины, определяющие направление потока на грани ячейки:

$$\hat{s}_{i-1/2,j,k} = \begin{cases} 0, & \text{если } s_{i-1/2,j,k} \geq 0, \\ 1, & \text{если } s_{i-1/2,j,k} < 0, \end{cases} \quad \hat{s}_{i+1/2,j,k} = \begin{cases} 0, & \text{если } s_{i+1/2,j,k} \geq 0, \\ 1, & \text{если } s_{i+1/2,j,k} < 0. \end{cases}$$

Здесь  $s = u, v, w$ . Скорость на левой грани ячейки находится из следующих соотношений:

— для схемы UDS-1:

$$u_L = (1 - \hat{s}_{q-1/2})s_{q-1} + \hat{s}_{q-1/2}s_q;$$

— для схемы QUICK:

$$u_L = (1 - \hat{s}_{q-1/2})\left(\frac{3}{8}s_q + \frac{3}{4}s_{q-1} - s_{q-2}\right) + \hat{s}_{q-1/2}\left(\frac{3}{8}s_{q-1} + \frac{3}{4}s_q - s_{q+1}\right);$$

— для схемы SMART:

$$u_L = (1 - \hat{s}_{q-1/2}) \begin{cases} s_{q-1}, & \varphi_{q-1/2} \notin [0, 1] \\ 3s_{q-1} - 2s_{q-2}, & \varphi_{q-1/2} \in \left[0, \frac{1}{6}\right) \\ \frac{3}{8}s_q + \frac{3}{4}s_{q-1} - \frac{1}{8}s_{q-2}, & \varphi_{q-1/2} \in \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \\ s_q, & \varphi_{q-1/2} \in \left[\frac{5}{6}, 1\right] \end{cases} + \hat{s}_{q-1/2} \begin{cases} s_q, & \varphi_{q-1/2} \notin [0, 1] \\ 3s_q - 2s_{q+1}, & \varphi_{q-1/2} \in \left[0, \frac{1}{6}\right) \\ \frac{3}{8}s_{q-1} + \frac{3}{4}s_q - \frac{1}{8}s_{q+1}, & \varphi_{q-1/2} \in \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \\ s_{q-1}, & \varphi_{q-1/2} \in \left[\frac{5}{6}, 1\right] \end{cases};$$

— для схемы VONOS:

$$u_L = (1 - \widehat{s}_{q-1/2}) \begin{cases} s_{q-1}, & \varphi_{q-1/2} \notin [0, 1] \\ 3s_{q-1} - 2s_{q-2}, & \varphi_{q-1/2} \in \left[0, \frac{1}{6}\right) \\ \frac{3}{8}s_q + \frac{3}{4}s_{q-1} - \frac{1}{8}s_{q-2}, & \varphi_{q-1/2} \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{3}{2}s_{q-1} - \frac{1}{2}s_{q-2}, & \varphi_{q-1/2} \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \\ s_q, & \varphi_{q-1/2} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases} + \widehat{s}_{q-1/2} \begin{cases} s_q, & \varphi_{q-1/2} \ni [0, 1] \\ 3s_q - 2s_{q+1}, & \varphi_{q-1/2} \in \left[0, \frac{1}{6}\right) \\ \frac{3}{8}s_{q-1} + \frac{3}{4}s_q - \frac{1}{8}s_{q+1}, & \varphi_{q-1/2} \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{3}{2}s_q - \frac{1}{2}s_{q+1}, & \varphi_{q-1/2} \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \\ s_{q-1}, & \varphi_{q-1/2} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \end{cases}.$$

Здесь  $\varphi_{q-1/2} = (1 - \widehat{s}_{q-1/2}) \left( \frac{s_{q-1} - s_{q-2}}{s_q - s_{q-2}} \right) + \widehat{s}_{q-1/2} \left( \frac{s_q - s_{q+1}}{s_{q-1} - s_{q+1}} \right)$ . Тройка индексов  $i, j, k$  заменяется индексом  $q$ , который варьируется при помощи надлежащего изменения индекса в соответствующем координатном направлении. Соотношения для расчета скорости на правой грани ячейки получаются путем замены  $L$  на  $R$ , а  $q$  на  $q+1$ .

Шаг интегрирования по времени выбирается на основе оценки конвективных и диффузионных потоков:  $\Delta t = \min \{\Delta t_1, \Delta t_2\}$ , где  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$  удовлетворяют условиям

$$\Delta t_1 \leq K_1 \min_{c \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{\Delta x_c}{|u_c|}, \frac{\Delta y_c}{|v_c|}, \frac{\Delta z_c}{|w_c|} \right\}, \quad \Delta t_2 \leq K_2 \min_{c \in \mathcal{F}} \left[ \nu \left( \frac{1}{\Delta x_c^2} + \frac{1}{\Delta y_c^2} + \frac{1}{\Delta z_c^2} \right) \right]^{-1}.$$

При использовании явной схемы имеется ограничение на максимальный шаг по времени [1, 4]. Для равномерной сетки критерий устойчивости схемы Эйлера, используемой на первом этапе, имеет вид

$$\Delta t \leq \frac{4\nu}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq 0.25.$$

С помощью метода Фурье показывается безусловная устойчивость других этапов схемы расщепления.

Вычислительный цикл повторяется до выполнения некоторого критерия установления, если стационарное решение существует, или до заданного момента времени.

**6. Дискретизация граничных условий.** Разностная сетка строится таким образом, что граница проходит через точки, в которых вычисляется нормальная составляющая скорости, а не давление.

В качестве примера рассмотрим рис. 3а, на котором изображена часть расчетной области, для которой  $AB$  — входная граница,  $BC$  — стенка,  $CD$  — выходная граница,  $DA$  — удаленная граница.

Граничные условия на стенке выставляются при помощи задания узловых значений для нормальной составляющей скорости и линейной интерполяции узловых значений касательной составляющей скорости. Условия прилипания и непротекания на границе  $BC$  (для  $i = 0, \dots, M$ ) имеют вид  $u_{i+1/2,1/2} = 0$ ,  $v_{i,1/2} = 0$ .

При помощи линейной интерполяции узловых значений получим  $u_{i+1/2,1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+1/2,1} + u_{i+1/2,0}) = 0$ . Условие прилипания примет вид  $u_{i+1/2,0} = -u_{i+1/2,1}$ . Другой способ реализации условия прилипания состоит в специальной дискретизации уравнений сохранения для граничной ячейки или накладывании ограничений на решение вблизи границы так, чтобы его экстраполяция на границу удовлетворяла условию прилипания [3].

На входной границе  $AB$  (для  $j = 0, \dots, N$ ) задаются значения продольной и поперечной составляющих скорости. Продольная составляющая скорости используется непосредственно, а величина  $v_{1/2,j}$  находится из дискретного уравнения неразрывности  $u_{1/2,j} = U$ ,  $v_{0,j+1/2} = 2v_{1/2,j+1/2} - u_{1,j+1/2}$ , где  $U$  — скорость невозмущенного потока.

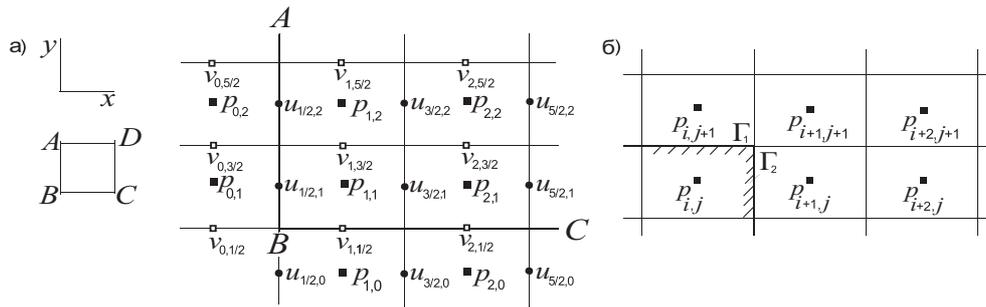


Рис. 3. Постановка граничных условий для давления на стенке (фрагмент а) и их реализация в двухсвязной области (фрагмент б)

На удаленной границе  $DA$  выставляются следующие граничные условия:  $u_{i+1/2,N} = U$ ,  $v_{i,N+1/2} = 0$  для  $i = 0, \dots, M$ .

При решении уравнения Пуассона требуется задать граничные условия для давления на всех границах области. Приведем способ реализации этих условий для границ  $BC$  и  $DA$ . Полагая  $v_{i,1/2}^{n+1} = 0$  на стенке (граница  $BC$ ) и  $v_{i,N+1/2}^{n+1} = 0$  в случае удаленной границы (граница  $DA$ ), получим следующие соотношения для расчета промежуточных значений нормальной составляющей скорости:

$$\tilde{v}_{i,1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta y_{1/2}} (p_{i,1} - p_{i,0}), \quad \tilde{v}_{i,N+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta y_{N+1/2}} (p_{i,N+1} - p_{i,N}). \quad (8)$$

Записывая разностное представление уравнения Пуассона (4) в приграничной ячейке и исключая из него значения давления  $p_{i,0}$  и  $p_{i,N+1}$  за пределами области расчета при помощи (8), получим

$$p_{i,1} = \left[ \frac{1}{\Delta x_i} \left( \frac{p_{i+1,1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{p_{i-1,1}}{\Delta x_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{\Delta y_1} \left( \frac{p_{i,2}}{\Delta y_{3/2}} + \frac{p_{i,1}}{\Delta y_{1/2}} \right) - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\tilde{u}_{i+1/2,1} - \tilde{u}_{i-1/2,1}}{\Delta x_i} + \frac{\tilde{v}_{i,3/2}}{\Delta y_1} \right) \right] \times \\ \times \left[ \frac{1}{\Delta x_i \Delta x_{i+1/2}} + \frac{1}{\Delta x_i \Delta x_{i-1/2}} + \frac{1}{\Delta y_1 \Delta y_{1/2}} + \frac{1}{\Delta y_1 \Delta y_{3/2}} \right]^{-1}.$$

Таким же способом выписывается соотношение для  $p_{i,N}$ .

Граничные условия свободного вытекания на границе  $CD$  имеют вид  $u_{M,j} = -u_{M+1,j}$ ,  $p_{M,j} = -p_{M+1,j}$  для  $j = 0, \dots, N$ . В двухсвязной области требуется специальная трактовка граничных условий этого типа (рис. 3б). Обозначим через  $\Gamma_1$  общую грань ячеек  $i, j$  и  $i, j + 1$ , а через  $\Gamma_2$  — общую грань ячеек  $i, j$  и  $i + 1, j$ . Под  $|\Gamma_i|$  понимается длина  $i$ -й грани; давление в граничной ячейке находится из соотношения

$$p_{i,j} = - \frac{|\Gamma_1| p_{i,j+1} + |\Gamma_2| p_{i+1,j}}{|\Gamma_1| + |\Gamma_2|}.$$

**7. Решение системы разностных уравнений.** Решение системы разностных уравнений, полученной в результате дискретизации уравнения Пуассона, представляет собой один из наиболее важных и доминирующих моментов вычислительной процедуры с точки зрения затрат машинных ресурсов.

**7.1. Общая структура итерационных методов.** Система разностных уравнений записывается в виде

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (9)$$

где  $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$ . Матрица  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$  содержит коэффициенты, связанные с дискретизацией. Вектор  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  состоит из неизвестных узловых значений искомой функции. Вектор  $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_n\}$  составлен из коэффициентов, обусловленных дискретизацией, а также из известных значений  $\mathbf{x}$ , задаваемых граничными условиями. Матрица  $A$  является симметричной и положительно определенной:  $A = A'$ ,  $\mathbf{x}' A \mathbf{x} > 0 \forall \mathbf{x} \neq 0$ .

Прямые методы (метод исключения Гаусса) предъявляют жесткие требования к быстродействию и памяти. Время вычислений оценивается как  $O(n^3)$ , а память, необходимая для хранения данных, как  $O(n^2)$ . Для итерационных методов время решения зависит от качества начального приближения, а требования к памяти значительно мягче и оцениваются как  $O(n)$ . Например, для методов Якоби и Гаусса–Зейделя время счета оценивается как  $O(k^2)$ , где  $k$  — количество итераций.

Общая структура итерационных методов связана с представлением матрицы в виде  $A = N - S$  и с видоизмененной формой исходного уравнения:  $(N - S)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Матрица  $N$  в некотором смысле близка к матрице  $A$  (имеет место  $\|N\| \simeq \|A\|$ ) и легко поддается численной факторизации, например в случае трехдиагональной структуры матрицы  $N$ . Различные итерационные методы отличаются друг от друга способом выбора матрицы  $N$  [3].

Итерационный метод общего вида основан на последовательном улучшении начального приближения решения. Решение на итерации  $k + 1$  находится по формуле  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - N^{-1}\mathbf{r}^k$ , где  $\mathbf{r}^k = A\mathbf{x}^k - \mathbf{b}$  представляет собой вектор невязки на  $k$ -й итерации. Итерации заканчиваются, когда расхождение решений, полученных на итерациях  $k$  и  $k + 1$ , становится достаточно малым:  $\max_{i=1,\dots,n} |x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon_1$  или когда невязка на  $k$ -й итерации уменьшается до заданного значения:  $\|\mathbf{r}^k\|_2 / \|\mathbf{r}^0\|_2 < \varepsilon_2$ .

**7.2. Метод последовательной верхней релаксации.** В методе последовательной верхней релаксации (Successive Over Relaxation, SOR) решение на итерации  $n + 1$  находится из соотношения  $p_{i,j,k}^{n+1} = \omega p_{i,j,k}^* + (1 - \omega)p_{i,j,k}^n$ . Значение  $p_{i,j,k}^*$  вычисляется по формуле

$$p_{i,j,k}^* = \left[ \frac{1}{\Delta x_i} \left( \frac{p_{i+1,j,k}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{p_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{\Delta y_j} \left( \frac{p_{i,j+1,k}}{\Delta y_{j+1/2}} + \frac{p_{i,j-1,k}}{\Delta y_{j-1/2}} \right) + \frac{1}{\Delta z_k} \left( \frac{p_{i,j,k+1}}{\Delta z_{k+1/2}} + \frac{p_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k-1/2}} \right) \right] \times \\ \times \left[ \frac{1}{\Delta x_i \Delta x_{i+1/2}} + \frac{1}{\Delta x_i \Delta x_{i-1/2}} + \frac{1}{\Delta y_j \Delta y_{j+1/2}} + \frac{1}{\Delta y_j \Delta y_{j-1/2}} + \frac{1}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}} + \frac{1}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}} \right]^{-1}.$$

Коэффициент релаксации подбирается, как правило, опытным путем ( $1 < \omega < 2$ ).

**7.3. Метод симметричной последовательной верхней релаксации.** Для ускорения сходимости используется метод симметричной последовательной релаксации (Symmetric SOR, SSOR), который состоит из двух этапов. На первом этапе применяется метод SOR. На втором этапе итерация неизвестных проводится в обратном порядке при том же значении коэффициента релаксации. Однако без применения методов ускорения сходимости метод SSOR оказывается менее эффективным, чем метод SOR [6].

**7.4. Метод последовательной линейной верхней релаксации.** Методы SOR и SSOR имеют явную форму. В методе последовательной линейной верхней релаксации (Successive Linear Over Relaxation, SLOR) отдельные группы неизвестных рассматриваются в неявной форме для формирования системы уравнений с трехдиагональной матрицей, связанной с линиями, параллельными осям координат. Для решения системы с трехдиагональной матрицей применяется метод прогонки.

**7.5. Итерационные методы Крылова.** Наиболее эффективными и устойчивыми среди итерационных методов являются проекционные методы, связанные с проектированием на подпространства Крылова. По сравнению с классическими итерационными методами проекционные методы на подпространства Крылова (итерационные методы Крылова, в англоязычной литературе называемые Krylov subspace methods) не содержат эмпирически подбираемых параметров и позволяют получить более высокую скорость сходимости, несмотря на увеличение числа операций на каждой итерации. Решение (9) сводится к минимизации квадратичной формы  $Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}' A \mathbf{x} - \mathbf{b}' \mathbf{x}$  [6]. Приближение  $\mathbf{x}_n$  решения на  $n$ -й итерации строится так, чтобы  $\mathbf{x}_n \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_n(A, \mathbf{r}_0)$ , где  $\mathcal{K}_n(A, \mathbf{r}_0) = \text{span} \{ \mathbf{r}_0, A\mathbf{r}_0, \dots, A^{n-1}\mathbf{r}_0 \}$  представляет собой подпространство Крылова размерности  $n$ , порожденное матрицей  $A$  и вектором  $\mathbf{r}_0$ . Итерационные методы Крылова различаются способом вычисления  $\mathbf{x}_n$ .

В семейство итерационных методов Крылова входят, в частности, обобщенный метод минимальных невязок (Generalized Minimum Residual, GMRES), метод сопряженных градиентов (Conjugate Gradients, CG), квадратичный метод сопряженных градиентов (Conjugate Gradients Squared, CGS), метод бисопряженных градиентов (Bi-Conjugate Gradients, BiCG), метод бисопряженных градиентов со стабилизацией (BiCG Stabilized, BiCGStab) [6].

**7.6. Сходимость итерационных методов.** Скорость сходимости зависит от спектра собственных значений матрицы коэффициентов [3]. Сходимость обеспечивается, если спектральный радиус матрицы  $N^{-1}S$  удовлетворяет условию  $\rho(N^{-1}S) < 1$ . В данном случае это условие соответствует более ограниченному условию  $\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ , означающему, что матрица  $A$  обладает свойством диагонального преобладания [6].

**8. Предобусловливание.** Предварительное умножение (предобусловливание) уравнения (9) на некоторую матрицу  $P$  позволяет уменьшить разброс собственных значений. Реализация операции предобусловливания занимает примерно 50% от времени счета.

Наилучший выбор матрицы предобусловливания состоит в умножении (9) на матрицу  $P = A^{-1}$ ,

поскольку после этого решение уравнения (9) становится тривиальным (однако такой подход требует много памяти и вычислительного времени). Хорошим выбором также оказывается множитель  $P = N^{-1}$ .

Приведем примеры матриц предобуславливания для некоторых методов:

– метод Якоби:  $P = D$ ;

– метод Гаусса–Зейделя:  $P = D - L$ ;

– метод SOR:  $P = \frac{1}{\omega} D - L$ ;

– метод SSOR:  $P = \frac{1}{2 - \omega} \left( \frac{1}{\omega} D - L \right)^{-1} \left( \frac{1}{\omega} D \right)^{-1} \left( \frac{1}{\omega} D - U \right)^{-1}$ .

Другой вариант матрицы предобуславливания строится при помощи приближенной факторизации матрицы  $A$  и ее расщепления на нижне- и верхне-треугольные матрицы  $P = U$  (Lower-Upper factorization). На практике используется метод неполной LU-факторизации (Incomplete LU, ILU). Частным случаем метода ILU является метод ILU(0), который не нарушает исходного расположения ненулевых коэффициентов матрицы  $A$ . Для симметричной положительно-определенной матрицы выполняется равенство  $U = L'$  и метод ILU(0) представляет собой метод Холецкого без заполнения IC(0).

**9. Тестирование вычислительной процедуры.** Рассмотрим поперечное обтекание кругового цилиндра радиуса  $R = 1$  м, расположенного в жидкости, находящейся при  $t \leq 0$  в состоянии покоя. При  $t > 0$  жидкость приводится в движение с постоянной скоростью  $U$ . Характерным параметром задачи является число Рейнольдса  $Re = RU/\nu$ . Уравнения решаются в области, внешней по отношению к границе цилиндра, при отсутствии скольжения жидкости на этой границе и условии постоянства потока на бесконечности. В направлении оси  $z$  выставляются периодические граничные условия. Размер расчетной области составляет  $30R$  в направлении оси  $x$ ,  $16R$  в направлении оси  $y$  и  $4R$  в направлении оси  $z$ . Для дискретизации невязких потоков используется схема SMART. В направлении оси  $z$  размещается четыре расчетных ячейки.

Для течений с отрывом потока одним из критериев качества решения служит детальная картина зоны отрыва, в частности, положение точек отрыва и присоединения потока, размер отрывной зоны, форма сдвиговых слоев, а также локальные параметры потока в выбранных сечениях и распределения коэффициентов трения и давления на обтекаемой поверхности.

Для сопоставления результатов расчетов с данными физического эксперимента используются минимальная величина функции тока  $\psi_{\min}$ , минимальное значение продольной составляющей скорости  $u_{\min}$ , давление в передней  $p_A$  и задней  $p_F$  критических точках, размер области с замкнутыми линиями тока  $l_s$  и угловая координата точки отрыва пограничного слоя  $\theta_s$ . Полученные результаты приведены в табл. 2, 3 при  $Re = 40$  (здесь  $C_D$  — полное сопротивление,  $C_D^T$  — сопротивление трения,  $C_D^p$  — сопротивление давления). В [7] для расчета в переменных  $\psi-\omega$  используется схема Аракавы четвертого порядка. Для расчета в физических переменных в [4] используется метод MAC, а в [8] расчеты проводятся в ковариантных составляющих скорости на моно- и многоблочной сетке. Разброс данных объясняется тем, что решение уравнений Навье–Стокса в переменных функция тока–вихрь лучше отображает трение на стенке и дает более точную оценку сопротивления трения, в то время как подход в физических переменных более корректно предсказывает сопротивление давления.

Таблица 2

Влияние количества узлов сетки на характеристики обтекания цилиндра

Сетка	$C_D$	$C_D^T$	$C_D^p$	$\psi_{\min}$	$u_{\min}$	$p_A$	$p_F$
60 × 30	1.5134	0.6834	0.8301	−0.0277	−0.1185	0.3865	−0.2259
80 × 40	1.4953	0.6670	0.8283	−0.0263	−0.1124	0.4527	−0.2113
100 × 50	1.4815	0.6626	0.8189	−0.0264	−0.1121	0.5107	−0.1861

Линии тока в установившемся течении жидкости около кругового цилиндра, показанные на рис. 4 для половины расчетной области, позволяют отметить несколько характерных фаз в развитии картины течения.

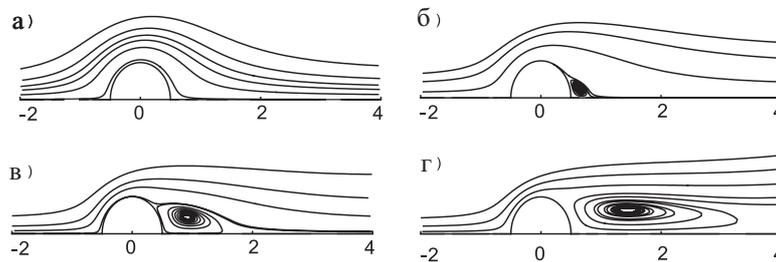
При низких числах Рейнольдса вязкие эффекты являются преобладающими и их влияние распространяется практически на всю область течения. При  $Re < 1$  продольная несимметрия течения почти неразличима; она становится хорошо заметной лишь при  $Re \sim 3$ .

Рост числа Рейнольдса приводит к уменьшению влияния вязких эффектов и увеличению роли конвективного переноса. При  $Re \sim 5$  происходит отрыв потока на задней стороне цилиндра, в результате чего образуются два рециркуляционных вихря (область медленно циркулирующей жидкости с замкнуты-

Таблица 3

Сопоставление результатов по поперечному обтеканию кругового цилиндра

Источник	Расчет	[4]	[7]	[8]	[8]	[9]
Сетка	Сетка 80 × 40	—	О-сетка 62 × 100	О-сетка 60 × 220	О-сетка 80 × 200	—
$C_D$	1.4953	1.6218	1.4970	1.4980	1.5123	1.5136
$C_D^T$	0.6670	—	0.5136	0.5170	0.5204	—
$C_D^P$	0.8283	—	0.9810	0.9810	0.9919	—
$\psi_{\min}$	-0.0263	—	—	-0.0180	-0.0190	-0.0280
$u_{\min}$	-0.1124	—	—	-0.0945	-0.0962	—
$p_A$	0.4527	0.4600	0.5650	0.5730	0.5800	0.5375
$p_F$	-0.2113	-0.2810	-0.2420	-0.2365	-0.2530	-0.2625
$l_s$	2.25	—	2.33	2.23	2.10	2.20
$\theta_s$	122°	126°	—	—	—	—

Рис. 4. Линии тока течения жидкости около кругового цилиндра при  $Re = 1$  (а); 10 (б); 20 (в); 40 (г)

ми линиями тока). Направление циркуляции жидкости согласуется с линиями тока обтекания цилиндра. Увеличение числа Рейнольдса до  $Re \sim 100$  сопровождается плавным ростом протяженности застойной зоны и увеличением интенсивности циркуляционного движения.

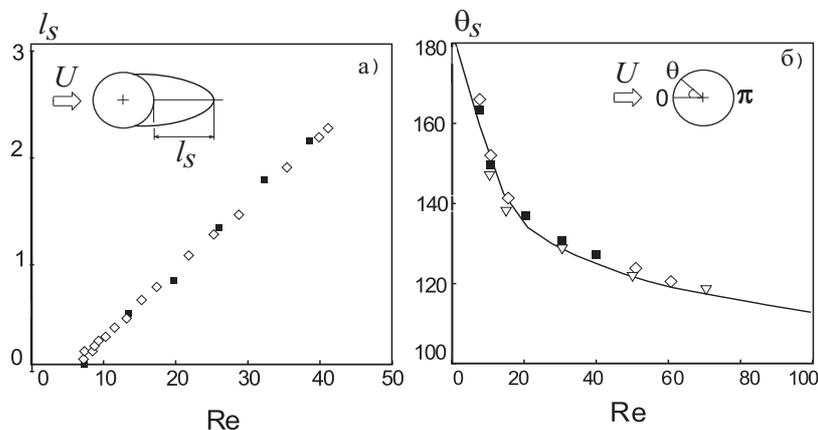


Рис. 5. Зависимости размера области с замкнутыми линиями тока (фрагмент а) и угла отрыва потока (фрагмент б) от числа Рейнольдса

По мере увеличения числа Рейнольдса конвективный перенос завихренности становится преобладающим по сравнению с ее диффузией и все большее количество завихренностей переносится в направлении к кормовой части цилиндра. Завихренность имеет отрицательный знак (направление вращения по часовой стрелке) вблизи верхней части цилиндра и положительный знак вблизи его нижней части. На кормовой части цилиндра завихренностей каждого знака скапливается больше, чем это нужно для удовлетворения условия прилипания, и вблизи поверхности индуцируется обратное течение. Обратное течение направлено навстречу движению основного потока и отклоняет его от кормовой части цилиндра, что приводит к усилению вращательного движения жидкости в стационарном вихре.

Расчетные картины обтекания кругового цилиндра хорошо согласуются с картинами течения, наблюдаемыми в численном [4, 8] и физическом [9] экспериментах. Структурные изменения картины обтекания цилиндра и интенсификация циркуляционного течения с увеличением числа Рейнольдса находят подтвер-

ждение в размере застойной зоны (рис. 5а, ■ — расчет, ◇ — данные [9]) и координате точки отрыва потока (рис. 5б, сплошная линия — расчет, ■, ◇, ▽ — данные [4]).

Результаты расчетов, относящиеся к распределениям давления и вихря по поверхности кругового цилиндра, показаны на рис. 6 (значки ■ и ◇ соответствуют данным [4]).

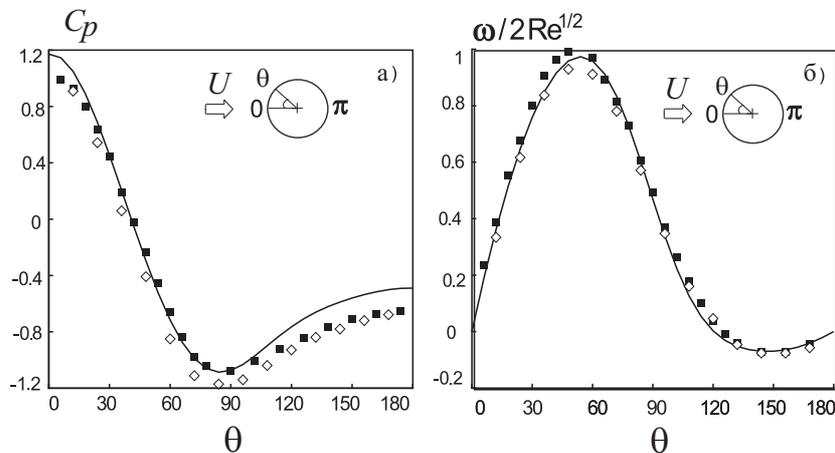


Рис. 6. Распределения давления (фрагмент а) и вихря скорости (фрагмент б) по поверхности кругового цилиндра при  $Re = 50$

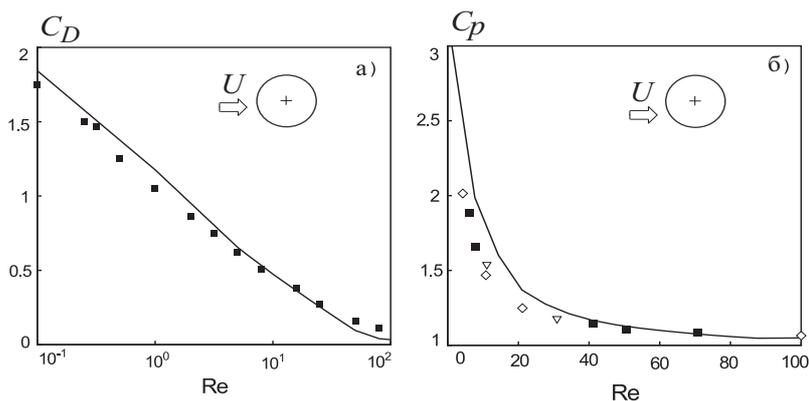


Рис. 7. Зависимости коэффициента сопротивления (фрагмент а) и коэффициента давления в передней критической точке (фрагмент б) от числа Рейнольдса

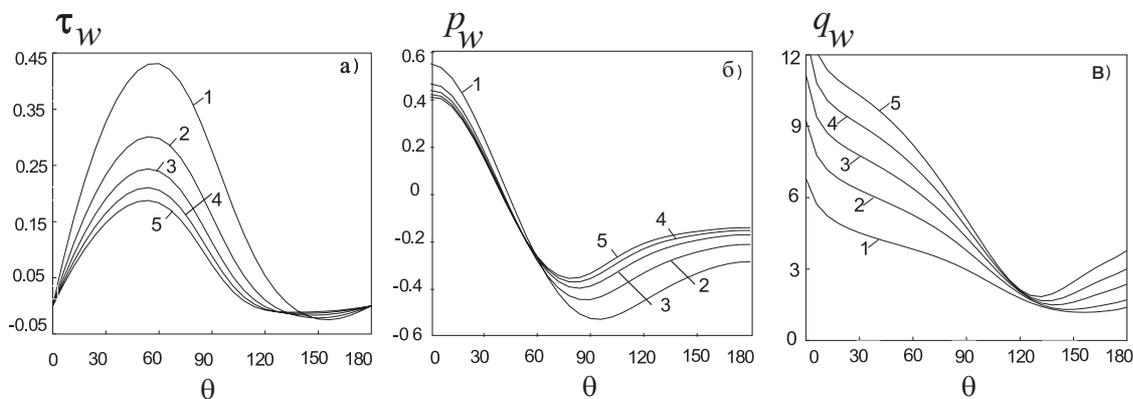


Рис. 8. Распределения напряжения трения (фрагмент а), давления (фрагмент б) и теплового потока (фрагмент в) по поверхности цилиндра при  $Re = 20$  (1);  $40$  (2);  $60$  (3);  $80$  (4);  $100$  (5)

Изменение числа Рейнольдса приводит к изменению силы сопротивления, действующей на цилиндр (рис. 7а). В области малых значений чисел Рейнольдса ( $Re < 1$ ) картина течения формируется вязкими силами. Влияние сил инерции имеет вид малых поправок к сопротивлению, определяемому из задачи

типа Озеена [9]. Сопротивление трения составляет приблизительно половину от полного сопротивления. После отрыва потока сопротивление обусловлено не трением в пограничном слое, а разностью статических давлений в лобовой и кормовой частях цилиндра. Максимальное давление цилиндр испытывает в передней критической точке, после чего давление убывает, так как поток, обтекающий лобовую часть цилиндра, разгоняется. Зависимость давления в передней критической точке цилиндра от числа Рейнольдса показана на рис. 76. На расчетные кривые (сплошные линии) нанесены результаты расчетов [4] (значки ■ и ▽) и данные измерений [9] (значки ◇).

Распределения локальных характеристик потока по поверхности цилиндра показаны на рис. 8 для различных чисел Рейнольдса. Местный коэффициент теплоотдачи сильно изменяется вдоль поверхности, уменьшаясь при удалении от критической точки и достигая минимума недалеко от точки отрыва. Средний по окружности цилиндра коэффициент теплоотдачи (число Нуссельта) изменяется пропорционально  $Re^{1/2}$ , что совпадает с теоретической зависимостью между числами Нуссельта и Рейнольдса при ламинарном обтекании плоской пластины и ламинарном обтекании любого тела вблизи критической точки [9, 10].

Сравнение вычислительной эффективности (скорости сходимости, устойчивости, количества операций на каждой итерации) различных итерационных методов показывает, что наилучшими характеристиками обладает метод BiCG. Использование методов стабилизации решения улучшает его свойства и уменьшает количество матрично-векторных умножений с двух в методе BiCG до одного в методе BiCGStab. Метод BiCGStab оказывается на 33% экономичнее и требует на 40% меньше памяти по сравнению с методом BiCG.

Зависимость числа итераций, необходимых для решения уравнения Пуассона для давления, от времени показана на рис. 9. Метод BiCGStab оказывается более эффективным по сравнению с релаксационными методами SOR, SSOR, SLOR ( $\omega = 1.8$ ). При этом метод SSOR оказывается лишь незначительно эффективнее метода SOR.

**10. Заключение.** Разработан многовариантный численный метод решения уравнений Навье–Стокса, основанный на методе конечных разностей и схеме расщепления по физическим факторам на прямоугольной неравномерной сетке с шахматным расположением узлов. Многовариантность реализуется за счет использования различных разностных схем дискретизации конвективных потоков и методов решения уравнения Пуассона для давления. Приведены детали численной реализации различных этапов схемы расщепления, а также особенности постановки начальных и граничных условий для скорости и давления. Подход демонстрирует удовлетворительную точность при моделировании нестационарных отрывных течений вязкой несжимаемой жидкости в области нерегулярной формы (поперечное обтекание кругового цилиндра).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пейре Р., Тейлор Т.Д.* Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеиздат, 1986.
2. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990.
3. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
4. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994.
5. *Chorin A.J.* Numerical solution of Navier–Stokes equations // *Mathematics of Computations*. 1968. **22**. 745–762.
6. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods / R. Barrett, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. Van der Vorst.* Philadelphia: SIAM, 1994.
7. *Белов И.А., Кудрявцев Н.А.* Теплопередача и сопротивление пакетов труб. Л.: Энергоатомиздат, 1986.
8. *Баранов П.А., Жданов В.Л., Судаков А.Г.* Численный анализ нестационарного обтекания цилиндра с внесением в ближний след наведенной завихренности // *Препринт АНК № 5 “ИТМО им. А.В. Лыкова” НАНБ*, 1998.
9. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.

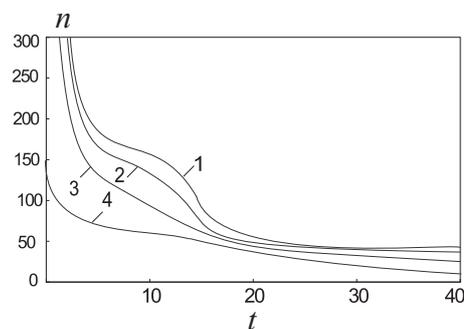


Рис. 9. Скорость сходимости методов SOR (кривая 1), SSOR (кривая 2), SLOR (кривая 3) и BiCGStab (кривая 4)

Поступила в редакцию  
12.10.2005