

УДК 517.958

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Н. Л. Гольдман¹

Изучается класс обратных задач, связанных с нахождением неизвестной правой части в квазилинейном параболическом уравнении общего вида по дополнительной информации, заданной в фиксированной внутренней точке области. Исследована проблема единственности решения в пространствах Гельдера, рассмотрены вопросы построения устойчивых приближенных решений этого класса некорректных задач.

Ключевые слова: параболические уравнения, обратные задачи, устойчивость, краевые задачи, единственность решения.

Введение. Данная работа продолжает исследование обратных задач для квазилинейных параболических уравнений общего вида с неизвестной правой частью [1–4]. Теория таких задач, называемых иногда задачами об источнике для параболических уравнений, еще недостаточно развита, особенно в квазилинейном случае. Их изучение вызвано также и практическим интересом, который представляют обратные задачи об источнике в самых разных приложениях. В частности, рассматриваемый ниже класс обратных задач возникает при моделировании и управлении нелинейными процессами диффузии и фильтрации в пористой среде, в которых требуется найти распределение по времени мощности источников на основе информации о соответствующих измерениях во внутренней точке области.

Основное внимание в данной работе уделено вопросам постановок обратных задач с локальным условием переопределения и единственности их решения в классах Гельдера. Исследование проблемы единственности основано на изучении свойств обобщенных решений соответствующих сопряженных задач для линейных параболических уравнений, правая часть которых содержит δ -функцию. При доказательстве отсутствия ортогонального дополнения к множеству следов обобщенных решений они рассматриваются как пределы классических решений уравнений со сглаженной правой частью. Предлагаемый в работе подход позволяет получить достаточные условия единственности решения обратных задач с локальным условием переопределения, которые расширяют класс обратных задач, обладающих свойством единственности (ср., например, с [5]). В работе рассмотрен также вопрос устойчивости приближенного решения в пространствах Гельдера для этого класса некорректных задач на основе регуляризирующего метода квазирешений.

1. Постановка обратной задачи с граничными условиями первого рода. Пусть квазилинейная краевая задача с заданной правой частью уравнения (т.е. в прямой постановке) состоит в определении функции $u(x, t)$ в области $\bar{Q} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ из условий

$$c(x, t, u)u_t - Lu = p_0(x, t)f(t) + p_1(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = v_0(t), \quad u|_{x=l} = v_1(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где $Lu \equiv (a(x, t, u)u_x)_x - b(x, t, u)u_x - d(x, t, u)u$ — равномерно эллиптический оператор, $a \geq a_{\min} > 0$, $b, c \geq c_{\min} > 0$, d, f, p_i, v_i ($i = 0, 1$), φ — известные функции своих аргументов, $a_{\min}, c_{\min} = \text{const} > 0$.

Если функция $f(t)$ в правой части уравнения (1) неизвестна, но во внутренней точке $x = l_0$, $0 < l_0 < l$, задана дополнительная информация о решении прямой задачи (1)–(3):

$$u|_{x=l_0} = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $g(t)$ — известная при $0 \leq t \leq T$ функция, то возникает так называемая обратная задача с локальным условием переопределения: найти функции $u(x, t)$ в области Q и $f(t)$ при $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющие

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

условиям (1)–(3) и (4), в которых входные данные $a > 0$, $b, c > 0$, d, p_i, v_i ($i = 0, 1$), φ и g предполагаются заданными.

Сформулируем требования к входным данным обратной задачи (1)–(4), используя стандартные обозначения классов функций из [6].

1. При $(x, t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, функции a, a_x, a_u, b, c, d равномерно ограничены, $a \geq a_{\min} > 0$, $c \geq c_{\min} > 0$.
2. При $(x, t, u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ ($M_0 \geq \max_{(x,t) \in \overline{Q}} |u|$) функции a и c принадлежат $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$, функции b, d, a_x, a_u принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2,1}(\overline{D})$, $0 < \lambda < 1$.
3. Функции $p_0(x, t)$ и $p_1(x, t)$ принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$, $|p_0(x, t)| \geq p_0 > 0$ при $(x, t) \in \overline{Q}$, функции $\varphi(x)$ и $v_i(t)$ принадлежат, соответственно, $H^{2+\lambda}[0, l]$ и $H^{1+\lambda/2}[0, T]$, выполнены условия согласования при $t = 0$: $v_0|_{t=0} = \varphi|_{x=0}$, $v_1|_{t=0} = \varphi|_{x=l}$.
4. Функция $g(t)$ принадлежит $H^{1+\lambda/2}[0, T]$, $g|_{t=0} = \varphi|_{x=l_0}$.
5. Выполнены условия согласования входных данных:

$$\begin{aligned} c(x, 0, \varphi)v_{0t} - L\varphi|_{x=0,t=0} &= p_0(x, 0)g^* + p_1(x, 0)|_{x=0}, \\ c(x, 0, \varphi)v_{1t} - L\varphi|_{x=l,t=0} &= p_0(x, 0)g^* + p_1(x, 0)|_{x=l}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$g^* = \{(c(x, 0, \varphi)g_t - L\varphi)|_{x=l_0,t=0} - p_1(l_0, 0)\}/p_0(l_0, 0).$$

Требования 1–3 обеспечивают существование и единственность решения квазилинейной краевой задачи (1)–(3) в классе Гельдера $u(x, t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(t) \in H^{\lambda/2}[0, T]$ в правой части уравнения (1), удовлетворяющей условиям согласования при $t = 0$ (см. [6]):

$$\begin{aligned} c(x, 0, \varphi)v_{0t} - L\varphi|_{x=0,t=0} &= p_0(x, 0)f|_{t=0} + p_1(x, 0)|_{x=0}, \\ c(x, 0, \varphi)v_{1t} - L\varphi|_{x=l,t=0} &= p_0(x, 0)f|_{t=0} + p_1(x, 0)|_{x=l}. \end{aligned}$$

Требование 5 к входным данным является следствием этих условий и соответствующих условий согласования для функции $g(t)$:

$$c(x, 0, \varphi)g_t - L\varphi|_{x=l_0,t=0} = p_0(l_0, 0)f|_{t=0} + p_1(l_0, 0).$$

На основании требований 1–5 дадим следующее

Определение 1. Решением обратной задачи (1)–(4) в классах Гельдера назовем пару функций $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$:

$$u^0(x, t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0, T], \quad 0 < \lambda < 1,$$

удовлетворяющих соотношениям (1)–(4) в обычном смысле.

2. Единственность решения обратной задачи (1)–(4) в классах Гельдера. Рассматриваемая задача не может иметь двух различных решений в смысле определения 1.

2.1. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполнены требования 1–5 и, кроме того, производные b_x и c_t непрерывны при $(x, t, u) \in \overline{D}$. Тогда в случае существования решения $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ обратной задачи (1)–(4) в классах Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0, T]$ это решение определяется однозначно.

Доказательство. Допустим, что $\{u_1^0, f_1^0\}$ и $\{u_2^0, f_2^0\}$ — два решения обратной задачи (1)–(4). Функции u_1^0 и u_2^0 можно рассматривать как решения первой краевой задачи (1)–(3), соответствующие функциям f_1^0 и f_2^0 в правой части уравнения (1). Следовательно, для них справедливы оценки в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [6]:

$$|u_1^0, u_2^0|_{\overline{Q}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leq M, \quad M = \text{const} > 0. \quad (6)$$

Для разностей $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$ и $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$ в силу (1)–(4) имеют место соотношения

$$c(x, t, u_1^0)\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u = p_0(x, t)\Delta f(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (7)$$

$$\Delta u|_{x=0} = 0, \quad \Delta u|_{x=l} = 0, \quad \Delta u|_{x=l_0} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (8)$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (9)$$

в которых

$$\mathcal{L}\Delta u \equiv (a(x, t, u_1^0)\Delta u_x)_x - \mathcal{A}_1\Delta u_x - \mathcal{A}_2\Delta u, \quad \mathcal{A}_1 = b(x, t, u_1^0) - a_u(x, t, u_1^0)u_{2x}^0.$$

Вид коэффициента $\mathcal{A}_2$, зависящего соответствующим образом от производных $u_{2x}^0, u_{2xx}^0, u_{2t}^0$ и от значений функций $a_u, a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u, d_u$, см. в [1]. Требования гладкости к входным данным и оценки (6) для $u_1^0(x, t)$ и $u_2^0(x, t)$ позволяют заключить, что все коэффициенты линейного параболического уравнения (7) непрерывны как функции (x, t) .

2.1.1.1. Из (5) следует, что $\Delta f|_{t=0} = 0$. Для доказательства утверждения, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f = 0$ при $0 \leq t \leq T$, требуется изучить свойства краевой задачи, сопряженной с задачей (7)–(9). Она имеет следующий вид.

$$(c(x, t, u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = \eta(t)\delta_{l_0}(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T, \quad (10)$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (11)$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (12)$$

где $\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x, t, u_1^0)\psi_x)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$, $\eta(t)$ — произвольная функция из $C[0, T]$ и где $\delta_{l_0}(x)$ — δ -функция точки $x = l_0$:

$$\delta_{l_0}(x) = 0 \text{ при } x \neq l_0, \quad \delta_{l_0}(x) = \infty \text{ при } x = l_0, \quad \int_0^l \delta_{l_0}(x) dx = 1.$$

Заметим, что $\delta_{l_0}(x)$ — суммируемая в смысле Лебега функция, т.е. $\delta_{l_0}(x) \in L_1[0, l]$.

Следуя [6], назовем обобщенным решением задачи (10)–(12) в классе $V_2^{0,1,0}(Q)$ ($V_2^{0,1,1/2}(Q)$) функцию $\psi(x, t)$ из $V_2^{0,1,0}(Q)$ ($V_2^{0,1,1/2}(Q)$), удовлетворяющую тождеству

$$I(\psi, \zeta) \equiv - \int_0^T \int_0^l c\psi\zeta_t dx dt + \int_0^T \int_0^l \{(\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi\}\zeta dx dt - \int_0^T \int_0^l a\psi_x\zeta_x dx dt - \int_0^T \eta(t)\zeta(l_0, t) dt = 0 \quad (13)$$

при любой гладкой функции $\zeta(x, t)$, равной 0 при $x = 0, x = l, t = 0$.

Правая часть $F(x, t) = \eta(t)\delta_{l_0}(x)$ уравнения (10) принадлежит пространству $L_{1,\infty}(Q)$, так как $\eta(t) \in C[0, T]$, $\delta_{l_0}(x) \in L_1[0, l]$:

$$\|F\|_{L_{1,\infty}(Q)} = \max_{0 \leq t \leq T} |\eta(t)| \|\delta_{l_0}(x)\|_{L_1[0, l]} = \max_{0 \leq t \leq T} |\eta(t)| \int_0^l |\delta_{l_0}(x)| dx = \max_{0 \leq t \leq T} |\eta(t)| < \infty.$$

В силу достаточной гладкости коэффициентов уравнения (10) и принадлежности $F(x, t)$ пространству $L_{1,\infty}(Q)$ выполнены условия однозначной разрешимости задачи (10)–(12) в $V_2^{0,1,0}(Q)$ ($V_2^{0,1,1/2}(Q)$) и для ее обобщенного решения в смысле определения (13) справедлива оценка [6]

$$\|\psi\|_{V_2^{0,1,0}(Q)} \leq K_1 \|F\|_{L_{1,\infty}(Q)}, \quad K_1 = \text{const} > 0.$$

Известно также [6], что дифференциальные свойства обобщенных решений улучшаются по мере увеличения гладкости коэффициентов и правой части уравнения. Причем, как и для классических решений, это улучшение носит локальный характер, т.е. гладкость решения в некоторой подобласти $Q^* \subset Q$ определяется гладкостью входных данных лишь в некоторой окрестности подобласти Q^* . Применительно к задаче (10)–(12) это означает, что $\psi(x, t) \in C^{2,1}$ в любых областях $Q' \subset Q$, $Q'' \subset Q$ вида

$$Q' = \{0 \leq x \leq l_0 - \varepsilon, 0 \leq t \leq T\} \subset Q, \quad Q'' = \{l_0 + \varepsilon \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\} \subset Q, \quad \varepsilon > 0,$$

учитывая требования 1–5 к входным данным и свойство правой части $F(x, t)$ в силу определения δ -функции: $F(x, t) \equiv 0$ в Q' и Q'' . Соответственно, производная $\psi_x(x, t)$ принадлежит классу $H^{1,1/2}$ в областях Q' и Q'' .

Более того, как установлено в [6] для n -мерного случая, если коэффициенты и правая часть линейного параболического уравнения принадлежат $L_{q,r}(Q)$ с условием $r/2 + n/(2q) < 1$, то любое обобщенное решение из $V_2^{1,1/2}(Q)$ принадлежит классу Гельдера $H^{\alpha,\alpha/2}(Q)$ с показателем $\alpha = 1 - \{r/2 + n/(2q)\}$. Применительно к задаче (10)–(12) это означает, что ее обобщенное решение непрерывно в смысле Гельдера во всей области $\overline{Q}$: $\psi(x, t) \in H^{1/2,1/4}$ (в нашем случае $n = 1, q = 1, r = \infty$).

2.1.2. Рассмотрим последовательность краевых задач со сглаженной правой частью:

$$(c(x, t, u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = \eta(t)\delta_{l_0,n}(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T, \quad (14)$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (15)$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (16)$$

где $\delta_{l_0,n}(x)$ — соболевское усредняющее ядро, т.е. функция вида

$$\delta_{l_0,n}(x) = \frac{1}{\varepsilon_n} \omega\left(\frac{|x - l_0|}{\varepsilon_n}\right), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

$\omega(|y|)$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция, равная 0 при $|y| \geq 1$ и такая, что $\int_{|y| \leq 1} \omega(y) dy = 1$.

Усредняющее ядро $\delta_{l_0,n}(x)$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция, имеющая носитель на интервале $(l_0 - \varepsilon_n, l_0 + \varepsilon_n)$ (который принадлежит отрезку $[0, l]$ при $\varepsilon_n \leq \min(l_0, l - l_0)$) и удовлетворяющая условию (см., например, [6, 7]):

$$\int_{l_0 - \varepsilon_n}^{l_0 + \varepsilon_n} \delta_{l_0,n}(x) dx = 1, \quad \int_0^l \delta_{l_0,n}(x) dx = 1.$$

Последовательность $\delta_{l_0,n}(x)$ сходится слабо в $L_1[0, l]$ к δ -функции точки $x = l_0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l \delta_{l_0,n}(x) dx = \int_0^l \delta_{l_0}(x) dx = 1; \quad (17)$$

при этом для любой непрерывной функции $w(x)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{l_0 - \varepsilon_n}^{l_0 + \varepsilon_n} \delta_{l_0,n}(x) w(x) dx = w(l_0). \quad (18)$$

Все коэффициенты в уравнении (14), рассматриваемые как функции (x, t) , непрерывны в $\overline{Q}$ в силу предположений теоремы 1 относительно функций a, b, c, d и в силу оценок (6) для $u_1^0(x, t)$ и $u_2^0(x, t)$. Следовательно, при любом фиксированном n задача (14) – (16), являясь линейной краевой задачей относительно функции $\psi(x, t)$, имеет единственное решение $\psi_n(x, t)$ в $C^{2,1}(\overline{Q})$ [6]. Принадлежность $\psi_n(x, t)$ классу $C^{2,1}$ во всей замкнутой области $\overline{Q}$ имеет место в силу того, что при условии $\varepsilon_n \leq \min(l_0, l - l_0)$ функция $\delta_{l_0,n}(x)$ равна 0 при $x = 0$, $x = l$ и тем самым выполнены условия согласования первого порядка при $x = 0$, $x = l$ и $t = T$. Кроме того, очевидно, что производная $\psi_{nx}(x, t)$ принадлежит классу Гельдера $H^{1,1/2}(\overline{Q})$.

Как всякое классическое решение функция $\psi_n(x, t)$ является также и обобщенным решением первой краевой задачи (14) – (16) в $V_2^{0,1,0}(Q)$ ($V_2^{0,1,1/2}(Q)$), так как очевидно, что $\psi_n(x, t)$ принадлежит этим пространствам и для нее справедливо интегральное тождество вида (13). Покажем, что при $n \rightarrow \infty$ функции $\psi_n(x, t)$ как обобщенные решения из $V_2^{1,0}(Q)$ последовательности краевых задач (14) – (16) с правой частью $F_n(x, t) = \eta(t)\delta_{l_0,n}(x)$ сходятся сильно в $V_2^{1,0}(Q)$ к обобщенному решению $\psi(x, t)$ предельной задачи (10) – (12) с правой частью $F(x, t) = \eta(t)\delta_{l_0}(x)$.

Действительно, в нашем случае имеет место оценка [6]

$$\|\psi_n - \psi\|_{V_2^{1,0}(Q)} \leq K_2 \|F_n - F\|_{L_{1,\infty}(Q)}, \quad K_2 = \text{const} > 0.$$

Но при $n \rightarrow \infty$

$$\|F_n - F\|_{L_{1,\infty}(Q)} = \text{vraimax}_{0 \leq t \leq T} \|F_n - F\|_{L_1[0,l]} = \max_{0 \leq t \leq T} |\eta(t)| \int_0^l |\delta_{l_0,n}(x) - \delta_{l_0}(x)| dx \rightarrow 0$$

в силу слабой сходимости $\delta_{l_0,n}(x)$ в $L_1[0, l]$ к δ (см. (17)).

Из определения нормы в $V_2^{1,0}(Q)$ сходимость $\psi_n(x, t)$ к $\psi(x, t)$ означает, что при $n \rightarrow \infty$

$$\|\psi_n - \psi\|_{V_2^{1,0}(Q)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|\psi_n - \psi\|_{L_2[0, l]} + \|\psi_{nx} - \psi_x\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0. \quad (19)$$

Но в силу оценки (см. [6])

$$\|\psi_n - \psi\|_{L_2(Q)} \leq K_3 \|\psi_n - \psi\|_{V_2^{1,0}(Q)}, \quad K_3 = \text{const} > 0,$$

отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$ $\psi_n(x, t)$ сходятся к $\psi(x, t)$ сильно и в $L_2(Q)$. Из (19) также вытекает, что производные $\psi_{nx}(x, t)$ сходятся сильно в $L_2(Q)$ к $\psi_x(x, t)$.

Заметим далее, что из сильной сходимости $\psi_n(x, t)$ в $L_2(Q)$ следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^l J_n(x) dx \rightarrow 0, \quad \text{где } J_n(x) = \int_0^T \{\psi_n(x, t) - \psi(x, t)\}^2 dt, \quad J_n(x) \geq 0.$$

Это означает, что $J_n(x) \Rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ по мере [8], т.е. на основании теоремы Рисса можно выделить подпоследовательность $J_{n_k}(x)$, которая сходится к 0 при $k \rightarrow \infty$ при почти всех $x \in [0, l]$. Без ограничения общности будем считать, что вся последовательность $J_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ при почти всех $x \in [0, l]$. Тогда из определения $J_n(x)$ следует, что при почти всех $\bar{x} \in [0, l]$ следы функций $\psi_n(x, t)|_{x=\bar{x}}$ сходятся сильно в $L_2[0, T]$ к следу функции $\psi(x, t)$ при $x = \bar{x}$. В силу непрерывности $\psi_n(x, t)$ и $\psi(x, t)$ заключаем, что такая сходимость имеет место при любом $\bar{x} \in [0, l]$.

Аналогичным образом, используя свойства производных $\psi_{nx}(x, t)$ и $\psi_x(x, t)$ ($\psi_{nx} \in H^{1,1/2}(\bar{Q})$, $\psi_x \in H^{1,1/2}$ в Q' и Q''), можно установить, что для их следов имеет место сильная сходимость в $L_2[0, T]$:

$$\int_0^T \{\psi_{nx}(x, t)|_{x=\bar{x}} - \psi_x(x, t)|_{x=\bar{x}}\}^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

при всех $\bar{x}$ из интервалов $[0, l_0 - \varepsilon]$, $[l_0 + \varepsilon, l]$ и при почти всех $\bar{x} \in (l_0 - \varepsilon, l_0 + \varepsilon)$. При этом мера множества E_n точек $\bar{x} \in (l_0 - \varepsilon, l_0 + \varepsilon)$, в которых

$$\int_0^T \{\psi_{nx}(x, t)|_{x=\bar{x}} - \psi_x(x, t)|_{x=\bar{x}}\}^2 dt > \sigma,$$

при любом $\sigma > 0$ удовлетворяет условию $\lim \text{mes } E_n = 0$ при $n \rightarrow \infty$ [8].

2.1.3. В дальнейшем для доказательства единственности решения исходной задачи (1)–(4) потребуются следующие свойства решений сопряженной задачи (10)–(12) и последовательности краевых задач (14)–(16).

Лемма 1. Для любой функции $\eta(t)$ из $C[0, T]$ соответствующие решения $\psi(x, t)$ задачи (10)–(12) с правой частью $F(x, t) = \eta(t)\delta_{l_0}(x)$ и $\psi_n(x, t)$ задач (14)–(16) с правой частью $F_n(x, t) = \eta(t)\delta_{l_0,n}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^l \psi_n(x, t) p_0(x, t) \Delta f(t) dx dt = 0, \quad (20)$$

$$\int_0^T \int_0^l \psi(x, t) p_0(x, t) \Delta f(t) dx dt = 0. \quad (21)$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим выражение

$$I_n = \int_0^T \int_0^l \psi_n \{c \Delta u_t - \mathcal{L} \Delta u\} dx dt + \int_0^T \int_0^l \Delta u \{c \psi_n\}_t + \mathcal{L}^* \psi_n\} dx dt. \quad (22)$$

С одной стороны, в силу (7) и (14) имеем

$$I_n = \int_0^T \int_0^l \psi_n(x, t) p_0(x, t) \Delta f(t) dx dt + \int_0^T \int_0^l \Delta u(x, t) \eta(t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt. \quad (23)$$

С другой стороны, проводя в (22) интегрирование по частям с учетом соотношений (7)–(9) и (14)–(16), получим

$$\begin{aligned} I_n = & \int_0^l [c\psi_n \Delta u]_{t=0}^{t=T} dx \mp \int_0^T \int_0^l \Delta u (c\psi_n)_t dx dt - \int_0^T [\psi_n a \Delta u_x]_{x=0}^{x=l} dt + \\ & + \int_0^T \int_0^l a \psi_{nx} \Delta u_x dx dt + \int_0^T [\psi_n \mathcal{A}_1 \Delta u]_{x=0}^{x=l} dt \mp \int_0^T \int_0^l \Delta u (\mathcal{A}_1 \psi_n)_x dx dt \mp \\ & \mp \int_0^T \int_0^l \Delta u \mathcal{A}_2 \psi_n dx dt + \int_0^T [\Delta u a \psi_{nx}]_{x=0}^{x=l} dt - \int_0^T \int_0^l a \psi_{nx} \Delta u_x dx dt = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (23) заключаем, что

$$\int_0^T \int_0^l \psi_n(x, t) p_0(x, t) \Delta f(t) dx dt + \int_0^T \int_0^l \Delta u(x, t) \eta(t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим второй интеграл в (24), обозначив его I_{n2} . Так как функция $\delta_{l_0, n}(x)$ имеет носитель на интервале $(l_0 - \varepsilon, l_0 + \varepsilon)$, то

$$I_{n2} = \int_0^T \int_0^l \Delta u(x, t) \eta(t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt = \int_0^T \eta(t) \int_{l_0 - \varepsilon}^{l_0 + \varepsilon} \Delta u(x, t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt = \int_0^T \eta(t) \Delta u_{\varepsilon_n}(l_0, t) dt,$$

где функция

$$\Delta u_{\varepsilon_n}(l_0, t) = \int_{l_0 - \varepsilon}^{l_0 + \varepsilon} \Delta u(x, t) \delta_{l_0, n}(x) dx$$

является соболевским ε -усреднением (по переменной x) функции $\Delta u(x, t)$, определенным при $x = l_0$, $0 \leq t \leq T$ (см. [6, 7]).

Как уже отмечалось, $u_1^0(x, t)$ и $u_2^0(x, t)$ принадлежат $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q})$. Следовательно, $\Delta u(x, t)$ тоже принадлежит $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q})$, а ее след $\Delta u|_{x=l_0}$ является функцией из класса Гельдера $H^{1+\lambda/2}[0, T]$. Очевидно, что усреднение $\Delta u_{\varepsilon_n}(l_0, t)$ обладает той же гладкостью как функция t , что и $\Delta u|_{x=l_0}$. В силу свойств ε -усреднений по Соболеву [6, 7] следует, что если $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta u_{\varepsilon_n}(l_0, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{l_0 - \varepsilon}^{l_0 + \varepsilon} \Delta u(x, t) \delta_{l_0, n}(x) dx = \Delta u(l_0, t),$$

причем в силу принадлежности $\Delta u_{\varepsilon_n}(l_0, t)$ классу $H^{1+\lambda/2}[0, T]$ последовательность $\{\Delta u_{\varepsilon_n}(l_0, t)\}$ сходится к $\Delta u(l_0, t)$ равномерно на отрезке $[0, T]$. Это позволяет заключить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \eta(t) \Delta u_{\varepsilon_n}(l_0, t) dt = \int_0^T \eta(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta u_{\varepsilon_n}(l_0, t) dt = \int_0^T \eta(t) \Delta u(l_0, t) dt.$$

Но по условию $\Delta u(l_0, t) = 0$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n2} = 0$. Отсюда и из (24) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^l \psi_n(x, t) p_0(x, t) \Delta f(t) dx dt = 0,$$

т.е. соотношение (20) доказано. Соотношение (21) является следствием (20) и сильной сходимости в $L_2(Q)$ при $n \rightarrow \infty$ функций $\psi_n(x, t)$ к обобщенному решению $\psi(x, t)$ сопряженной задачи (10)–(12). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Предположим, что при любой функции $\eta(t) \in C^1[0, T]$ соответствующие решения $\psi_n(x, t)$ последовательности задач (14)–(16) удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \psi_n(x, t)|_{x=\bar{x}} w(t) dt = 0, \quad 0 < \bar{x} < l, \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \psi_{nx}(x, t)|_{x=\bar{x}} \theta(t) dt = 0, \quad 0 \leq \bar{x} \leq l, \quad (26)$$

для некоторых непрерывных функций $w(t)$ и $\theta(t)$. Тогда при любом $\bar{x}$ $w(t) = 0$, $\theta(t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Доказательство леммы 2. Покажем справедливость этих утверждений для внутренних точек $\bar{x}$, $0 < \bar{x} < l$.

Допустим сначала, что $0 < \bar{x} < l_0$. Рассмотрим краевую задачу, сопряженную с (14)–(16) в области $\bar{Q}_{\bar{x}} = \{\bar{x} \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$:

$$c(x, t, u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x, t) \in Q_{\bar{x}}, \quad (27)$$

$$a(x, t, u_1^0)z_x - \mathcal{A}_1 z|_{x=\bar{x}} = w(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (28)$$

$$z|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (29)$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad \bar{x} \leq x \leq l, \quad (30)$$

где $\mathcal{L}z \equiv (a(x, t, u_1^0)z_x)_x - \mathcal{A}_1 z_x - \mathcal{A}_2 z$, коэффициенты $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ имеют тот же вид, что и в задаче (7)–(9).

Рассматривая коэффициенты уравнения (27) как функции переменных (x, t) , нетрудно установить их непрерывность в $\bar{Q}_{\bar{x}}$ как следствие гладкости входных данных и оценок (6) для $u_1^0(x, t)$ и $u_2^0(x, t)$. Это позволяет заключить, что краевая задача (27)–(30), являясь линейной относительно $z(x, t)$, имеет решение $z(x, t) \in C(\bar{Q}_{\bar{x}}) \cap C^{2,1}(Q_{\bar{x}})$.

Возьмем в качестве функции $\theta(t)$ функцию $\theta(t; w) = a(x, t, u_1^0)|_{x=\bar{x}} z(x, t)|_{x=\bar{x}}$. Ее непрерывность очевидным образом следует из свойств коэффициента a и принадлежности $z(x, t) \in C(\bar{Q}_{\bar{x}})$.

Покажем, что при $x = l_0$ решение краевой задачи (27)–(30) удовлетворяет дополнительному условию $z|_{x=l_0} = 0$. Для этого рассмотрим выражение

$$II_n = \int_0^T \int_{\bar{x}}^l z \{ (c\psi_n)_t + \mathcal{L}^* \psi_n \} dx dt + \int_0^T \int_{\bar{x}}^l \psi_n \{ cz_t - \mathcal{L}z \} dx dt. \quad (31)$$

С одной стороны, из уравнений (14) и (27) следует, что

$$II_n = \int_0^T \int_{\bar{x}}^l z(x, t) \eta(t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt. \quad (32)$$

С другой стороны, интегрируя (31) по частям с учетом соотношений (14)–(16) и (27)–(30), установ-

ливаем, что

$$\begin{aligned}
 II_n &= \int_{\bar{x}}^l [c\psi_n z]_{t=0}^{t=T} dx \mp \int_0^T \int_{\bar{x}}^l \psi_n c z_t dx dt + \int_0^T [za\psi_{nx}]_{x=\bar{x}}^{x=l} dt - \\
 &\quad - \int_0^T \int_{\bar{x}}^l a\psi_{nx} z_x dx dt + \int_0^T [\psi_n \mathcal{A}_1 z]_{x=\bar{x}}^{x=l} dt \mp \int_0^T \int_{\bar{x}}^l \mathcal{A}_1 \psi_n z_x dx dt \mp \\
 &\quad \mp \int_0^T \int_{\bar{x}}^l \mathcal{A}_2 \psi_n z dx dt - \int_0^T [\psi_n a z_x]_{x=\bar{x}}^{x=l} dt + \int_0^T \int_{\bar{x}}^l a\psi_{nx} z_x dx dt = \\
 &= \int_0^T \psi_n|_{x=\bar{x}} \{az_x - \mathcal{A}_1 z\}|_{x=\bar{x}} dt - \int_0^T \psi_{nx}|_{x=\bar{x}} \{az\}|_{x=\bar{x}} dt,
 \end{aligned}$$

т.е.

$$II_n = \int_0^T \psi_n(x, t)|_{x=\bar{x}} w(t) dt - \int_0^T \psi_{nx}(x, t)|_{x=\bar{x}} \theta(t) dt. \quad (33)$$

Переходя в (32) к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая свойства ε -усреднений (см. рассуждения в лемме 1), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} II_n = \int_0^T \eta(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{l_0 - \varepsilon}^{l_0 + \varepsilon} z(x, t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt = \int_0^T \eta(t) z(x, t)|_{x=l_0} dt.$$

В то же время в силу предположений (25), (26) из (33) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} II_n = 0$. Таким образом, приходим к соотношению

$$\int_0^T z|_{x=l_0} \eta(t) dt = 0,$$

откуда в силу произвольности функции $\eta(t) \in C^1[0, T]$ и вытекает, что $z|_{x=l_0} = 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Это условие вместе с условиями (29), (30) позволяет заключить, что решение однородного уравнения (27) в области $\{l_0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ есть $z(x, t) \equiv 0$. Это означает, что при $x = l_0$ заданы нулевые данные Коши: $z|_{x=l_0} = 0$, $z_x|_{x=l_0} = 0$. Показывая, как и в [3], возможность применить результаты [9] о единственности решения нехарактеристической задачи Коши для линейных параболических уравнений, устанавливаем, что $z(x, t) \equiv 0$ при $\{\bar{x} \leq x \leq l_0, 0 \leq t \leq T\}$. Но тогда из (28) и из вида функции $\theta(t)$ сразу вытекает, что $w(t) = 0$, $\theta(t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$, что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что $l_0 < \bar{x} < l$. Рассмотрим снова уравнение (27), но уже в области $\bar{Q}_{\bar{x}}$ вида $\bar{Q}_{\bar{x}} = \{0 \leq x \leq \bar{x}, 0 \leq t \leq T\}$ и со следующими краевыми условиями:

$$c(x, t, u_1^0) z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x, t) \in Q_{\bar{x}}, \quad (34)$$

$$z|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (35)$$

$$a(x, t, u_1^0) z_x - \mathcal{A}_1 z|_{x=\bar{x}} = w(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (36)$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}. \quad (37)$$

Повторяя предыдущие рассуждения относительно коэффициентов этого уравнения, можно показать, что линейная краевая задача (34)–(37) имеет решение $z(x, t) \in C(\bar{Q}_{\bar{x}}) \cap C^{2,1}(Q_{\bar{x}})$. Покажем, что при $x = l_0$ $z(x, t)$ удовлетворяет дополнительному условию $z|_{x=l_0} = 0$.

Пусть снова функция $\theta(t)$ имеет вид $\theta(t; w) = a(x, t, u_1^0)|_{x=\bar{x}} z(x, t)|_{x=\bar{x}}$. Рассмотрим вспомогательное выражение, аналогичное выражению II_n :

$$III_n = \int_0^T \int_0^{\bar{x}} z \{ (c\psi_n)_t + \mathcal{L}^* \psi_n \} dx dt + \int_0^T \int_0^{\bar{x}} \psi_n \{ cz_t - \mathcal{L}z \} dx dt. \quad (38)$$

Для него в силу уравнений (14) и (34) следует, что

$$III_n = \int_0^T \int_0^{\bar{x}} z(x, t) \eta(t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt. \quad (39)$$

С другой стороны, интегрирование по частям в (38) с учетом соотношений (15), (16) и (35)–(37) дает

$$\begin{aligned} III_n = & - \int_0^T \psi_n|_{x=\bar{x}} \{az_x - \mathcal{A}_1 z\}|_{x=\bar{x}} dt + \int_0^T \psi_n|_{x=0} \{az_x - \mathcal{A}_1 z\}|_{x=0} dt + \\ & + \int_0^T \psi_{nx}|_{x=\bar{x}} \{az\}|_{x=\bar{x}} dt - \int_0^T \psi_{nx}|_{x=0} \{az\}|_{x=0} dt, \end{aligned}$$

т.е.

$$III_n = - \int_0^T \psi_n(x, t)|_{x=\bar{x}} w(t) dt + \int_0^T \psi_{nx}(x, t)|_{x=\bar{x}} \theta(t) dt.$$

Отсюда и из (25), (26) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} III_n = 0$. Но из (39) в силу свойств ε -усреднений вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} III_n = \int_0^T \eta(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{l_0 - \varepsilon}^{l_0 + \varepsilon} z(x, t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt = \int_0^T \eta(t) z(x, t)|_{x=l_0} dt.$$

Это означает в силу произвольности функции $\eta(t) \in C^1[0, T]$, что $z|_{x=l_0} = 0$ при $0 \leq t \leq T$. Но тогда решением однородного уравнения (34) в области $\{0 \leq x \leq l_0, 0 \leq t \leq T\}$ является $z(x, t) \equiv 0$. Таким образом, при $x = l_0$ имеем $z|_{x=l_0} = 0$, $z_x|_{x=l_0} = 0$. Это позволяет заключить, опираясь на теорему единственности в классе гладких функций для нехарактеристической задачи Коши [9], что $z(x, t) \equiv 0$ при $l_0 \leq x \leq \bar{x}$, $0 \leq t \leq T$. Но тогда из (36) и из вида функции $\theta(t)$ сразу вытекает, что $w(t) = 0$, $\theta(t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$ и в случае $l_0 < \bar{x} < l$.

Рассмотрим теперь случай $\bar{x} = l_0$. Исследуя линейную краевую задачу (27)–(30) в области $\bar{Q}_{\bar{x}} = \{\bar{x} \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ при $\bar{x} = l_0$, устанавливаем для ее решения $z(x, t)$ из $C(\bar{Q}_{\bar{x}}) \cap C^{2,1}(Q_{\bar{x}})$ справедливость условия $z|_{x=l_0} = 0$. Это утверждение доказывается как и выше с помощью интегрального выражения II_n (см. (31)) при $\bar{x} = l_0$. Единственное отличие состоит в том, что исходя из свойств ε -усреднений имеем в данном случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} II_n = \int_0^T \eta(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{l_0}^{l_0 + \varepsilon} z(x, t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T \eta(t) z(x, t)|_{x=l_0} dt.$$

Полученное условие $z|_{x=l_0} = 0$ позволяет установить, что решением первой краевой задачи для уравнения (27) в области $\bar{Q}_{\bar{x}}$ является $z(x, t) \equiv 0$, т.е. из вида функции $\theta(t)$ следует, что $\theta(t) = 0$. Кроме того, это означает, что $z_x|_{x=l_0} = 0$, т.е. из краевого условия (28) вытекает, что $w(t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$, что и требовалось доказать.

Заметим, что для случая $\bar{x} = l_0$ можно провести аналогичные рассуждения и для линейной краевой задачи (34)–(37) в области $\bar{Q}_{\bar{x}} = \{0 \leq x \leq \bar{x}, 0 \leq t \leq T\}$ при $\bar{x} = l_0$, рассматривая выражение III_n из (38) при $\bar{x} = l_0$. При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} III_n = \int_0^T \eta(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{l_0 - \varepsilon}^{l_0} z(x, t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T \eta(t) z(x, t)|_{x=l_0} dt.$$

Для завершения доказательства леммы 2 осталось рассмотреть случаи совпадения $\bar{x}$ с граничными точками $x = 0$ и $x = l$. Пусть, например, $x = 0$. Рассмотрим первую краевую задачу, сопряженную с (14)–(16) в области $\bar{Q} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$:

$$c(x, t, u_1^0) z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (40)$$

$$z|_{x=0} = w(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (41)$$

$$z|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (42)$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (43)$$

Ее решение $z(x, t)$ принадлежит $C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$. Для доказательства дополнительного условия $z|_{x=l_0} = 0$ рассмотрим снова интегральное выражение II_n (см. (31)) при $\bar{x} = 0$. С одной стороны, для II_n справедливо соотношение (32) при $\bar{x} = 0$. С другой стороны, интегрирование по частям с учетом соотношений (14) – (16) и (40) – (43) дает

$$II_n = \int_0^T z|_{x=l} \{a\psi_{nx} + \mathcal{A}_1\psi_n\}|_{x=l} dt + \int_0^T \psi_n|_{x=0} \{az_x - \mathcal{A}_1z\}|_{x=0} dt - \int_0^T \psi_{nx}|_{x=0} \{az\}|_{x=0} dt,$$

где по предположению $a(x, t, u_1^0)|_{x=0} z(x, t)|_{x=0} = \theta(t)$ (т.е. $\theta(t) = a|_{x=0} w(t)$). Таким образом,

$$II_n = - \int_0^T \psi_{nx}(x, t)|_{x=0} \theta(t) dt,$$

что позволяет установить, учитывая предположение (26) и свойства ε -усреднений, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} II_n = \int_0^T \eta(t) z(x, t)|_{x=l_0} dt = 0.$$

Но это означает в силу произвольности функции $\eta(t) \in C^1[0, T]$, что $z|_{x=l_0} = 0$ при $0 \leq t \leq T$. Следовательно, решением однородного уравнения (40) в области $\{l_0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ является $z(x, t) \equiv 0$, т.е. при $x = l_0$ заданы нулевые данные Коши: $z|_{x=l_0} = 0, z_x|_{x=l_0} = 0$. Опираясь на результаты [9] для нехарактеристической задачи Коши, можем заключить, что $z(x, t) \equiv 0$ также и при $0 \leq x \leq l_0, 0 \leq t \leq T$. Но тогда $w(t) = 0$ (см. (41)) и $\theta(t) = 0$ (см. вид функции $\theta(t)$).

Случай $\bar{x} = l$ исследуется аналогично. Лемма 2 доказана.

Из этой леммы в силу сильной сходимости в $L_2[0, T]$ при $n \rightarrow \infty$ следов решений $\psi_n(x, t)|_{x=\bar{x}}$ и их производных $\psi_{nx}(x, t)|_{x=\bar{x}}$ (см. 2.1.2) вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Предположим, что при любой функции $\eta(t) \in C^1[0, T]$ соответствующее решение $\psi(x, t)$ сопряженной задачи (10) – (12) удовлетворяет при некотором $\bar{x}, 0 \leq \bar{x} \leq l$, соотношениям*

$$\int_0^T \psi(x, t)|_{x=\bar{x}} w(t) dt = 0, \quad \int_0^T \psi_x(x, t)|_{x=\bar{x}} \theta(t) dt = 0$$

для некоторых непрерывных функций $w(t)$ и $\theta(t)$. Тогда $w(t) = 0, \theta(t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Замечание 1. Условие (26) для следов $\psi_{nx}(x, t)|_{x=\bar{x}}$ и соответствующее условие для следов $\psi_x(x, t)|_{x=\bar{x}}$ в лемме 3 могут быть сформулированы следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \{a(x, t, u_1^0) \psi_{nx}(x, t)\}|_{x=\bar{x}} \theta(t) dt = 0,$$

$$\int_0^T \{a(x, t, u_1^0) \psi_x(x, t)\}|_{x=\bar{x}} \theta(t) dt = 0$$

для некоторой непрерывной функции $\theta(t)$ (тогда $\theta(t) = z(x, t)|_{x=\bar{x}}$, где $z(x, t)$ — решение краевой задачи соответствующего вида, см., например, (27) – (30)). Возможность таких формулировок очевидным образом следует из неравенства $a \geq a_{\min} > 0$ (см. требование 1 к входным данным).

Лемма 3 означает в частности, что множество следов $\{\psi(x, t)|_{x=\bar{x}}\}$, получаемое при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $C^1[0, T]$, является всюду плотным.

2.1.4. Леммы 1, 3 уже позволяют завершить доказательство теоремы 1 о единственности решения $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ в смысле определения 1. Действительно, применяя в интегральном соотношении (21) леммы 1 теорему о среднем по переменной x , получим равенство

$$\int_0^T l\psi(x, t)|_{x=\bar{x}} p_0(x, t)|_{x=\bar{x}} \Delta f(t) dx = 0, \quad 0 \leq \bar{x} \leq l,$$

справедливое при любой функции $\eta(t) \in C^1[0, T]$ в правой части уравнения (10). Но так как множество следов $\{\psi(x, t)|_{x=\bar{x}}\}$ обладает свойством плотности в $L_2[0, T]$, то отсюда следует, что

$$p_0(x, t)|_{x=\bar{x}} \Delta f(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

По предположению (см. требование 3 к входным данным) $|p_0(x, t)| \geq p_0 > 0$ при $(x, t) \in \bar{Q}$. Таким образом, $\Delta f(t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$. Тогда из соотношений (7)–(9) для Δu , которые представляют собой линейную краевую задачу первого рода с гладкими коэффициентами, вытекает в силу единственности решения такой краевой задачи [6], что $\Delta u \equiv 0$ в $\bar{Q}$. Теорема 1 доказана.

2.2. Если функция f в правой части уравнения (1) ищется в виде $f(x, t)$, а не $f(t)$, то такая обратная задача с локальным переопределением не обладает, вообще говоря, свойством единственности. Это подтверждает следующий пример.

Пример 1. Функции

$$\begin{cases} u_1(x, t) = x^2 t, \\ f_1(x, t) = x^2 - 2t, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2(x, t) = x^4 t, \\ f_2(x, t) = x^4 - 12x^2 t \end{cases}$$

являются решениями в области $\bar{Q} = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратной задачи:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ u|_{x=-1} &= t, \quad u|_{x=1} = t, \quad 0 < t \leq T, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

с локальным условием переопределения при $x = 0$: $u|_{x=0} = 0$. Таким образом, для этой задачи единственность решения не имеет места.

2.3. Остановимся кратко на достаточных условиях единственности, которые вытекают из проведенного исследования в том случае, когда обратная задача состоит в нахождении функций $u(x, t)$ в $\bar{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющих линейному параболическому уравнению

$$c(x, t)u_t - Lu = p_0(x, t)f(t) + p_1(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (44)$$

$$Lu \equiv (a(x, t)u_x)_x - b(x, t)u_x - d(x, t)u,$$

с начальными и граничными условиями (2), (3) и с локальным условием переопределения (4).

Соответствующая этой обратной задаче теорема единственности решения $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ в классах Гельдера принимает следующий вид.

Теорема 2. *Предположим, что входные данные линейной краевой задачи (44), (2), (3) удовлетворяют требованиям гладкости и согласования*

$$a, a_x, b, c, d \in H^{\lambda, \lambda/2}(\bar{Q}), \quad p_i \in H^{\lambda, \lambda/2}(\bar{Q}), \quad 0 < \lambda < 1,$$

$$v_i \in H^{1+\lambda/2}[0, T], \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0, l], \quad i = 0, 1,$$

$$v_0|_{t=0} = \varphi|_{x=0}, \quad v_1|_{t=0} = \varphi|_{x=l},$$

обеспечивающим существование и единственность ее решения $u(x, t)$ в $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q})$ при любой функции

$f(t) \in H^{\lambda/2}[0, T]$ в правой части уравнения (44), такой, что

$$c(x, t)v_{0t} - L\varphi|_{x=0, t=0} = p_0(x, 0)f(0) + p_1(x, 0)|_{x=0},$$

$$c(x, t)v_{1t} - L\varphi|_{x=l, t=0} = p_0(x, 0)f(0) + p_1(x, 0)|_{x=l}.$$

Пусть, кроме того, производные b_x и c_t непрерывны в $\overline{Q}$, $|p_0(x, t)| \geq p_0 > 0$ при $(x, t) \in \overline{Q}$, функция $g(t)$ принадлежит $H^{1+\lambda/2}[0, T]$ и удовлетворяет условиям согласования

$$c(x, t)v_{0t} - L\varphi|_{x=0, t=0} = p_0(x, 0)g^* + p_1(x, 0)|_{x=0},$$

$$c(x, t)v_{1t} - L\varphi|_{x=l, t=0} = p_0(x, 0)g^* + p_1(x, 0)|_{x=l},$$

где

$$g^* = \{(c(x, t)g_t - L\varphi)|_{x=l_0, t=0} - p_1(l_0, 0)\}/p_0(l_0, 0).$$

Тогда в случае существования решения $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ обратной задачи, удовлетворяющего соотношениям (44), (2), (3) и локальному условию переопределения (4), это решение определяется однозначно в классе функций $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0, T]$.

Вывод теоремы 2 повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теоремы 1.

3. Единственность решения обратной задачи для уравнения (1) с граничными условиями третьего рода. Рассматриваемый класс обратных задач для квазилинейного параболического уравнения (1) включает в себя также случай задания граничных условий третьего рода при $x = 0$ и $x = l$.

3.1. Соответствующая обратная задача состоит в нахождении функций $u(x, t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющих уравнению (1), краевым условиям

$$a(x, t, u)u_x - e_0(t, u)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (45)$$

$$a(x, t, u)u_x + e_1(t, u)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (46)$$

начальному условию (3) и наблюдению (4), в которых входные данные $a \geq a_{\min} > 0$, $b, c \geq c_{\min} > 0$, d, p_i, e_i, q_i ($i = 0, 1$), φ и g являются заданными. Будем предполагать, что они удовлетворяют следующим требованиям.

6. При $(x, t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, функции a, a_x, a_u, b, c, d равномерно ограничены, $a \geq a_{\min} > 0$, $c \geq c_{\min} > 0$, $e_i \geq 0$ ($i = 0, 1$).

7. При $(x, t, u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ ($M_0 \geq \max_{(x, t) \in \overline{Q}} |u|$) производные a_{xx}, a_{xu}, a_{uu} и a_t равномерно ограничены, b, c, d, a_x, a_u принадлежат $H^{1, \lambda/2, 1}(\overline{D})$, $0 < \lambda < 1$, функции e_i имеют равномерно ограниченные производные e_{it}, e_{iu}, e_{iuu} ($i = 0, 1$).

8. Функции $p_0(x, t)$ и $p_1(x, t)$ принадлежат $H^{1, \lambda/2}(\overline{Q})$, $|p_0(x, t)| \geq p_0 > 0$ при $(x, t) \in \overline{Q}$, функция $\varphi(x)$ принадлежит $H^{2+\lambda}[0, l]$, производные q_{it} ($i = 0, 1$) равномерно ограничены при $0 \leq t \leq T$. Выполнены условия согласования при $t = 0$:

$$a(x, 0, \varphi)\varphi_x - e_0(0, \varphi)\varphi|_{x=0} = q_0(0),$$

$$a(x, 0, \varphi)\varphi_x + e_1(0, \varphi)\varphi|_{x=l} = q_1(0).$$

9. Функция $g(t)$ принадлежит $H^{1+\lambda/2}[0, T]$, $g|_{t=0} = \varphi|_{x=l_0}$.

Требования 6–8 обеспечивают существование и единственность решения квазилинейной краевой задачи (1), (45), (46), (3) в классе Гельдера $u(x, t) \in H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(t) \in H^{\lambda/2}[0, T]$ в правой части уравнения (1) [6].

В соответствии с этим дадим следующее

Определение 2. Решением обратной задачи для уравнения (1) с граничными условиями третьего рода назовем пару функций $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$:

$$u^0(x, t) \in H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0, T], \quad 0 < \lambda < 1,$$

удовлетворяющих в обычном смысле соотношениям (1), (45), (46), (3), локальному условию переопределения (4) и условию согласования при $t = 0$:

$$c(x, 0, \varphi)g_t - L\varphi|_{x=l_0, t=0} = p_0(x, 0)f(0) + p_1(x, 0)|_{x=l_0}. \quad (47)$$

3.2. Сформулируем соответствующую теорему единственности.

Теорема 3. Пусть входные данные обратной задачи с граничными условиями третьего рода удовлетворяют требованиям 6–9 и пусть, кроме того, функция $c(x, t, u)$ имеет непрерывную производную по t при $(x, t, u) \in \overline{D}$. Тогда в случае существования решения $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ такой обратной задачи в смысле определения 2 это решение определяется однозначно.

Доказательство. Ограничимся изложением основных моментов доказательства, так как оно повторяет с соответствующими модификациями доказательство теоремы 1.

Предположим, что $\{u_1^0, f_1^0\}$ и $\{u_2^0, f_2^0\}$ — два решения обратной задачи. Для u_1^0 и u_2^0 как для решений третьей краевой задачи для уравнения (1), соответствующих функциям f_1^0 и f_2^0 правой части уравнения (1), справедливы оценки вида (6) в классе Гельдера $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [6].

Пусть $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$, $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$. В силу (47) $\Delta f|_{t=0} = 0$, кроме того, из (1), (45), (46), (3) и (4) следует, что Δu и Δf удовлетворяют соотношениям (7), (9) и условиям

$$a(x, t, u_1^0)\Delta u_x - \mathcal{E}_0\Delta u|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (48)$$

$$a(x, t, u_1^0)\Delta u_x + \mathcal{E}_1\Delta u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (49)$$

$$\Delta u|_{x=l_0} = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (50)$$

Вид коэффициентов $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$, зависящих соответствующим образом от производных u_2^0 , u_{2x}^0 и от значений функций a_u , e_{0u} и e_{1u} , приведен в [1].

Свойства 6–8 входных данных и оценки (6) для $u_1^0(x, t)$ и $u_2^0(x, t)$ позволяют заключить, что все коэффициенты в линейном параболическом уравнении (7) и в граничных условиях (48), (49) непрерывны как функции (x, t) и соответственно t .

Утверждение, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f = 0$ при $0 \leq t \leq T$, основано на свойствах обобщенного решения краевой задачи, сопряженной с задачей (7), (9), (48)–(50). В данном случае она имеет вид

$$(c(x, t, u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = \eta(t)\delta_{l_0}(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T, \quad (51)$$

$$a(x, t, u_1^0)\psi_x - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (52)$$

$$a(x, t, u_1^0)\psi_x + (\mathcal{E}_1 + \mathcal{A}_1)\psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (53)$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (54)$$

где $\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x, t, u_1^0)\psi_x)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$, $\eta(t)$ — произвольная функция из $C[0, T]$ и где $\delta_{l_0}(x)$ — δ -функция точки $x = l_0$.

Следуя [6], назовем обобщенным решением задачи (51)–(54) в классе $V_2^{1,0}(Q)$ ($V_2^{1,1/2}(Q)$) функцию $\psi(x, t)$ из $V_2^{1,0}(Q)$ ($V_2^{1,1/2}(Q)$), удовлетворяющую тождеству

$$\begin{aligned} J(\psi, \zeta) \equiv & - \int_0^T \int_0^l c\psi\zeta_t dx dt + \int_0^T \int_0^l \{(\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi\}\zeta dx dt - \int_0^T \int_0^l a\psi_x\zeta_x dx dt - \\ & - \int_0^T (\mathcal{E}_1 + \mathcal{A}_1)\psi|_{x=l}\zeta|_{x=l} dt - \int_0^T (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\psi|_{x=0}\zeta|_{x=0} dt = \int_0^T \eta(t)\zeta|_{x=l_0} dt \end{aligned}$$

при любой гладкой функции $\zeta(x, t)$, равной 0 при $t = 0$.

Достаточная гладкость коэффициентов уравнения (51) и граничных условий (52), (53), а также принадлежность правой части $F(x, t) = \eta(t)\delta_{l_0}(x)$ уравнения (51) пространству $L_{1,\infty}(Q)$ обеспечивают выполнение требований однозначной разрешимости краевой задачи (51)–(54) в $V_2^{1,0}(Q)$ ($V_2^{1,1/2}(Q)$) (см. [6]). Для ее обобщенного решения $\psi(x, t)$ справедливы утверждения, приведенные в 2.1.1.

Как и выше в 2.1.2, можно показать, что обобщенное решение $\psi(x, t)$ сопряженной задачи (51)–(54) есть предел в норме $V_2^{1,0}(Q)$ решений $\psi_n(x, t)$ последовательности краевых задач для уравнения со сглаженной правой частью $F_n(x, t) = \eta(t)\delta_{l_0,n}(x)$ и с теми же условиями (52)–(54).

Для $\psi(x, t)$ и его гладких приближений $\psi_n(x, t)$ справедливы соответствующие аналоги лемм 1–3. В частности, аналогом леммы 2 является

Лемма 4. *Предположим, что при любой функции $\eta(t) \in C^1[0, T]$ соответствующие решения $\psi_n(x, t)$ последовательности краевых задач для уравнения*

$$(c(x, t, u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = \eta(t)\delta_{l_0,n}(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T, \quad (55)$$

с начальным условием (54) и с граничными условиями (52), (53) удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \psi_n(x, t)|_{x=\bar{x}} w(t) dt = 0, \quad 0 \leq \bar{x} \leq l,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \psi_{nx}(x, t)|_{x=\bar{x}} \theta(t) dt = 0, \quad 0 < \bar{x} < l,$$

для некоторых непрерывных функций $w(t)$ и $\theta(t)$. Тогда при любом $\bar{x}$ $w(t) = 0$, $\theta(t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Приведем для примера обоснование этих утверждений для случая $0 < \bar{x} < l_0$. Для этого рассмотрим краевую задачу, сопряженную с (55), (52)–(54) в области $\bar{Q}_{\bar{x}} = \{\bar{x} \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$:

$$c(x, t, u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x, t) \in Q_{\bar{x}}, \quad (56)$$

$$a(x, t, u_1^0)z_x - \mathcal{A}_1 z|_{x=\bar{x}} = w(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (57)$$

$$a(x, t, u_1^0)z_x + \mathcal{E}_1 z|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (58)$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad \bar{x} \leq x \leq l, \quad (59)$$

где $\mathcal{L}z \equiv (a(x, t, u_1^0)z_x)_x - \mathcal{A}_1 z_x - \mathcal{A}_2 z$. Эта краевая задача, являясь линейной относительно $z(x, t)$, имеет решение $z(x, t) \in C(\bar{Q}_{\bar{x}}) \cap C^{2,1}(Q_{\bar{x}})$ в силу непрерывности коэффициентов в уравнении (56) и в граничных условиях (57), (58). Пусть функция $\theta(t)$ имеет вид $\theta(t; w) = a(x, t, u_1^0)|_{x=\bar{x}} z(x, t)|_{x=\bar{x}}$.

Покажем, что при $x = l_0$ решение $z(x, t)$ удовлетворяет дополнительному условию $z|_{x=l_0} = 0$. Для этого, как и при доказательстве леммы 2, воспользуемся вспомогательным выражением II_n из (31).

С одной стороны, из уравнений (55) и (56) и из свойств ε -усреднений следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} II_n = \int_0^T \eta(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{l_0-\varepsilon}^{l_0+\varepsilon} z(x, t) \delta_{l_0, n}(x) dx dt = \int_0^T \eta(t) z(x, t)|_{x=l_0} dt.$$

С другой стороны, интегрирование по частям с учетом соотношений (52)–(55) и (56)–(59) дает

$$\begin{aligned} II_n &= \int_{\bar{x}}^l [c\psi_n z]_{t=0}^{t=T} dx + \int_0^T [za\psi_{nx}]_{x=\bar{x}}^{x=l} dt + \int_0^T [\psi_n \mathcal{A}_1 z]_{x=\bar{x}}^{x=l} dt - \int_0^T [\psi_n az_x]_{x=\bar{x}}^{x=l} dt = \\ &= \int_0^T z|_{x=l} \{a\psi_{nx} + \mathcal{A}_1 \psi_n\}|_{x=l} dt - \int_0^T \psi_n|_{x=\bar{x}} \{az\}|_{x=\bar{x}} dt + \\ &+ \int_0^T \psi_n|_{x=\bar{x}} \{az_x - \mathcal{A}_1 z\}|_{x=\bar{x}} dt - \int_0^T \psi_n|_{x=l} \{az_x\}|_{x=l} dt, \end{aligned}$$

т.е. для II_n имеет место соотношение

$$\begin{aligned} II_n &= \int_0^T z|_{x=l} \{a\psi_{nx} + (\mathcal{A}_1 + \mathcal{E}_1)\psi_n\}|_{x=l} dt + \int_0^T \psi_n(x, t)|_{x=\bar{x}} w(t) dt - \int_0^T \psi_{nx}(x, t)|_{x=\bar{x}} \theta(t) dt = \\ &= \int_0^T \psi_n(x, t)|_{x=\bar{x}} w(t) dt - \int_0^T \psi_{nx}(x, t)|_{x=\bar{x}} \theta(t) dt, \end{aligned}$$

что в силу предположений леммы 4 приводит к равенству $\lim_{n \rightarrow \infty} II_n = 0$. Таким образом, справедливо утверждение

$$\int_0^T \eta(t) z(x, t)|_{x=l_0} dt = 0,$$

из которого вследствие произвольности функции $\eta(t)$ заключаем, что $z|_{x=l_0} = 0$.

Но тогда решением краевой задачи со смешанными граничными условиями для однородного уравнения (56) в области $\{l_0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ является $z(x, t) \equiv 0$. Это в свою очередь означает, что при $x = l_0$ заданы нулевые данные Коши: $z|_{x=l_0} = 0$, $z_x|_{x=l_0} = 0$. Следовательно, на основе результатов [9] для

нехарактеристической задачи Коши заключаем, что $z(x, t) \equiv 0$ также и при $\bar{x} \leq x \leq l_0$, $0 \leq t \leq T$. Тогда из (57) и из вида $\theta(t)$ сразу вытекает, что $w(t) = 0$ и $\theta(t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$, что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства теоремы 3 о единственности решения обратной задачи с граничными условиями третьего рода осталось применить теорему о среднем по переменной x в интегральном соотношении вида (21) (аналог леммы 1) и получить равенство

$$\int_0^T l \psi(x, t)|_{x=\bar{x}} p_0(x, t)|_{x=\bar{x}} \Delta f(t) dx = 0, \quad 0 \leq \bar{x} \leq l,$$

справедливое при любой функции $\eta(t) \in C^1[0, T]$ в правой части уравнения (51). Отсюда в силу плотности в $L_2[0, T]$ множества следов $\{\psi(x, t)|_{x=\bar{x}}\}$ и из неравенства $|p_0(x, t)| \geq p_0 > 0$ в $\bar{Q}$ заключаем, что $\Delta f(t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$. Тогда из уравнения (7), начального условия (9) и граничных условий (48), (49) следует, что решением этой линейной краевой задачи третьего рода с гладкими коэффициентами является $\Delta u \equiv 0$. Теорема 3 доказана.

3.3. Как и в случае граничных условий первого рода, справедливо утверждение: рассматриваемая обратная задача с локальным переопределением не обладает, вообще говоря, свойством единственности, если функция f в правой части уравнения (1) ищется в виде $f(x, t)$, а не $f(t)$. Это показывает следующий пример.

Пример 2. Две пары функций

$$\begin{cases} u_1(x, t) = x(x^2 - 1)t, \\ f_1(x, t) = x(x^2 - 1) - 6xt, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2(x, t) = x^3(x^2 - 1)t, \\ f_2(x, t) = x^3(x^2 - 1) - 2xt(10x^2 - 3) \end{cases}$$

являются решениями в области $\bar{Q} = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратной задачи:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ u_x - u|_{x=-1} &= 2t, \quad u_x + u|_{x=1} = 2t, \quad 0 < t \leq T, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

с локальным условием переопределения при $x = 0$: $u|_{x=0} = 0$. Таким образом, эта обратная задача имеет более одного решения.

3.4. Допустим теперь, что обратная задача с локальным условием переопределения состоит в нахождении функций $u(x, t)$ в $\bar{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющих линейному параболическому уравнению (44), линейным граничным условиям

$$a(x, t)u_x - e_0(t)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (60)$$

$$a(x, t)u_x + e_1(t)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (61)$$

начальному условию (3) и дополнительному условию (4).

Соответствующая этой обратной задаче теорема единственности решения $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ в классах Гельдера принимает следующий вид.

Теорема 4. *Предположим, что входные данные линейной краевой задачи (44), (60), (61), (3) удовлетворяют требованиям гладкости и согласования, обеспечивающим существование и единственность $u(x, t)$ в $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q})$ при любой функции $f(t) \in H^{\lambda/2}[0, T]$ в правой части уравнения (44):*

$$a, a_x, b, c, d \in H^{\lambda, \lambda/2}(\bar{Q}), \quad p_i \in H^{\lambda, \lambda/2}(\bar{Q}), \quad 0 < \lambda < 1,$$

$$e_i, q_i \in H^{\frac{1+\lambda}{2}}[0, T], \quad e_i \geq 0, \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0, l], \quad i = 0, 1,$$

$$a(x, 0)\varphi_x - e_0(0)\varphi|_{x=0} = q_0(0),$$

$$a(x, 0)\varphi_x + e_1(0)\varphi|_{x=l} = q_1(0).$$

Пусть, кроме того, производные b_x и c_t непрерывны в $\bar{Q}$, функция $g(t) \in H^{1+\lambda/2}[0, T]$, $|p_0(x, t)| \geq p_0 > 0$ при $(x, t) \in \bar{Q}$. Тогда решение $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ такой обратной задачи в случае его существования единственно в классе функций

$$u^0(x, t) \in H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0, T],$$

$$(c(x, 0)g_t - L\varphi)|_{x=l_0, t=0} = p_0(l_0, 0)f^0|_{t=0} + p_1(l_0, 0).$$

Доказательство повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теоремы 3 с учетом того, что множество следов $\{\psi(x, t)|_{x=\bar{x}}\}$ решений сопряженной задачи, имеющей в данном случае вид

$$(c(x, t)\psi)_t + (a(x, t)\psi_x)_x + (b(x, t)\psi)_x - d(x, t)\psi = \eta(t)\delta_{l_0}(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T,$$

$$a(x, t)\psi_x - (e_0(t) - b(x, t))\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq t < T,$$

$$a(x, t)\psi_x + (e_1(t) + b(x, t))\psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < T,$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

плотно в $L_2[0, T]$ при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $C^1[0, T]$.

4. Единственность решения обратной задачи со смешанными краевыми условиями. К рассматриваемому классу обратных задач относится также случай задания на границах области краевых условий смешанного типа.

Пусть, например, обратная задача состоит в нахождении функций $u(x, t)$ в $\bar{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющих уравнению (1), граничным условиям

$$u|_{x=0} = v_0(t), \quad a(x, t, u)u_x + e_1(t, u)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (62)$$

начальному условию (3) и наблюдению (4), в которых входные данные $a \geq a_{\min} > 0$, $b, c \geq c_{\min} > 0$, d, p_i ($i = 0, 1$), v_0, e_1, q_1 и φ и g предполагаются заданными.

Пусть входные данные удовлетворяют соответствующим требованиям гладкости и согласования, т.е. требованиям 3–8 применительно к смешанным краевым условиям.

Определение 3. Решением обратной задачи со смешанными краевыми условиями назовем пару функций $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$:

$$u^0(x, t) \in H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0, T], \quad 0 < \lambda < 1,$$

удовлетворяющих соотношениям (1), (62), (3) и локальному условию переопределения (4) в обычном смысле.

Единственность решения этой обратной задачи в смысле определения 3 устанавливает следующая

Теорема 5. Пусть входные данные удовлетворяют требуемым условиям гладкости и согласования и пусть, кроме того, функция $c(x, t, u)$ имеет непрерывную производную по t при $(x, t, u) \in \bar{D}$. Тогда в случае существования решения $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ рассматриваемой обратной задачи в классах Гельдера $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^{\lambda/2}[0, T]$ это решение определяется однозначно.

Основные моменты доказательства этой теоремы повторяют соответствующие рассуждения при доказательстве теорем 1, 3.

Достаточные условия единственности решения $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ в указанных классах Гельдера в линейном случае (т.е. для линейного параболического уравнения и линейного краевого условия третьего рода при $x = l$, см. (44) и (61)) вытекают из соответствующих утверждений теорем 2, 4.

Обратная задача со смешанными краевыми условиями может иметь более одного решения, если функция f в правой части уравнения (1) или (44) ищется в виде $f(x, t)$, а не $f(t)$. Это подтверждает, в частности, следующий пример.

Пример 3. Две пары функций

$$\begin{cases} u_1(x, t) = x(x^2 - 1)t + t, \\ f_1(x, t) = x(x^2 - 1) - 6xt + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2(x, t) = x^3(x^2 - 1)t + t, \\ f_2(x, t) = x^3(x^2 - 1) - 2xt(10x^2 - 3) + 1 \end{cases}$$

являются решениями в области $\bar{Q} = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратной задачи

$$u_t - u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$u|_{x=-1} = t, \quad u_x + u|_{x=1} = 3t, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

с локальным переопределением при $x = 0$: $u|_{x=0} = t$, $0 < t \leq T$. Таким образом, для этой обратной задачи нарушена единственность решения.

5. О некорректности обратных задач с локальным условием переопределения. Рассматриваемый класс обратных задач для параболических уравнений с неизвестной правой частью относится к некорректно поставленным задачам.

5.1. Проявлением некорректности является неустойчивость решения относительно погрешностей входных данных. Это подтверждает следующий

Пример 4. Функции

$$u^0(x, t) = t(4 - x^2), \quad f^0(t) = t$$

являются точным решением обратной задачи в области $\bar{Q} = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq T\}$:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(t) + t - x^2 + 4, \quad (x, t) \in Q, \\ u|_{x=0} &= 4t, \quad u|_{x=2} = 0, \quad 0 < t \leq T, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \end{aligned}$$

с условием переопределения при $x = 1$:

$$u|_{x=1} = g(t), \quad g(t) = 3t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Допустим, что функция $g(t)$ задана приближенно

$$g_n(t) = g(t) + \delta_n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

с погрешностью $\delta_n(t) = n^{-2}t$, где $n > 0$ — любое целое. При $n \rightarrow \infty$ $\delta_n(t) \rightarrow 0$ в равномерной метрике. Решением обратной задачи с приближенно заданной функцией $g_n(t)$ при $x = 1$ является пара функций

$$\begin{aligned} u_n &= u^0 + \Delta_n u, \quad \Delta_n u = n^{-2}tx(2-x) \exp n(1-x)^2, \\ f_n &= f^0 + \Delta_n f, \quad \Delta_n f = \{4tx(x-2)(1-x)^2 + 2n^{-1}t(5x^2 - 10x + 4) + n^{-2}(2t + 2x - x^2)\} \exp n(1-x)^2. \end{aligned}$$

Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$ $\Delta_n u \rightarrow \infty$, $\Delta_n f \rightarrow \infty$ в метрике $C(\bar{Q})$.

Для построения приближенных решений, устойчивых к погрешностям входных данных этого класса обратных задач, необходимо применять регуляризующие методы. Однако в случае квазилинейных параболических уравнений возникает проблема обоснования применимости известных принципов регуляризации, так как область применения некоторых из них (например, метода квазиобращения и методов сведения исходной задачи к интегральному уравнению) включает в себя только линейные параболические уравнения.

5.2. Эффективным способом устойчивого приближенного решения рассматриваемого класса обратных задач является вариационный метод квазирешений [10].

Изложим кратко основные принципы построения устойчивых приближений в классах Гельдера на примере обратной задачи (1)–(4). Ее операторное представление имеет вид

$$Af = g, \quad f \in F \subset L_2[0, T], \quad g \in G \subset L_2[0, T], \quad (63)$$

где $A: F \rightarrow G$ — нелинейный оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $f \in F$ след решения $u|_{x=l_0}$ краевой задачи (1)–(3). Точным решением уравнения (63) является такой элемент $f^0 \in F$, для которого $u|_{x=l_0}$ совпадает с заданным элементом $g \in G$.

Предположим, что входные данные обратной задачи (1)–(4) удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда возможность определения оператора A для любого $f \in F$ и принадлежность $Af \in G$ обеспечиваются выбором F и G в виде

$$\begin{aligned} F &= \{f(t) \in W_2^1[0, T]\}, \quad F \subset H^{\lambda/2}[0, T], \\ G &= \{\omega(t) \in H^{1+\lambda/2}[0, T]\}, \quad 0 < \lambda < 1. \end{aligned}$$

Вариационный подход к постановке обратной задачи (1)–(4) основан на том, что решение операторного уравнения (63) эквивалентно минимизации в F функционала

$$\inf_{f \in F} J_g(f), \quad J_g(f) = \|Af - g\|_{L_2[0, T]}.$$

Для регуляризации этой некорректной вариационной задачи воспользуемся методом квазирешений на системе расширяющихся компактных в $H^{\lambda/2}[0, T]$ ($0 < \lambda < 1$) множеств F_R , где

$$F_R = \{f(t) \in F, \quad \|f\|_{W_2^1[0, T]} \leq R\}, \quad R = \text{const} > 0.$$

Квазирешением уравнения (63) на множестве F_R назовем множество

$$F_R^* = \{f_R \in F_R, J_g(f_R) = \inf_{f \in F_R} J_g(f)\}.$$

Корректность задачи минимизации функционала $J_g(f)$ на F_R при любом фиксированном $R > 0$ и возможность построения квазирешения F_R^* (непустота F_R^*) устанавливаются как в [3].

Если точное решение, т.е. элемент f^0 , не принадлежит некоторому компакту F_R^* , то любой элемент из множества квазирешений F_R^* ($\bar{R} < R < R^0 = \|f^0\|_{W_2^1[0,T]}$) сходится в $W_2^1[0,T]$ к f^0 при $R \rightarrow R^0$. Это утверждение формулирует следующая теорема на основе понятия α -сходимости множеств.

Теорема 6. Пусть входные данные обратной задачи (1)–(4) удовлетворяют условиям теоремы 1 и, кроме того, при $(x, t, u) \in \bar{D}$ производные a_{xu} , a_{uu} , b_u , c_u , d_u непрерывны в смысле Гельдера по x , t , u с показателями λ , $\lambda/2$, λ соответственно, $0 < \lambda < 1$.

Тогда квазирешение F_R^* , определенное для любого R , $0 < R < R^0 = \|f^0\|_{W_2^1[0,T]}$, α -сходится к точному решению f^0 операторного уравнения (63) при $R \rightarrow R^0$:

$$F_R^* \xrightarrow{\alpha} f^0 (W_2^1[0,T]).$$

При этом для $R \rightarrow R^0$

$$U_R^* \xrightarrow{\alpha} u^0 (H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q})),$$

где $U_R^* = \{u_R(x, t)\}$ — множество решений квазилинейной краевой задачи (1)–(3), соответствующее множеству F_R^* функций $f_R(t)$ в правой части уравнения (1), $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ — точное решение обратной задачи (1)–(4) в смысле определения 1.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству соответствующих утверждений в [3]. Оно основано, в частности, на оценках устойчивости в классах Гельдера первой краевой задачи (1)–(3)

$$|\Delta u|_Q^{2+\lambda, 1+\lambda/2} \leq K |\Delta f|_{[0,T]}^{\lambda/2}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad K = \text{const} > 0.$$

Исследование устойчивости метода квазирешений при приближенном задании оператора A и правой части g в операторном представлении (63) обратной задачи (1)–(4) проводится по той же схеме, что в [3] для обратной задачи с данными Коши.

Замечание 2. Обоснование применимости метода квазирешений для устойчивого приближенного решения обратной задачи с краевыми условиями третьего рода (45), (46) проводится аналогичным образом. При этом выбор множества F должен учитывать требование согласования (47):

$$F = \{f(t) \in W_2^1[0, T], c(x, 0, \varphi)g_t - L\varphi|_{x=0, t=0} = p_0(x, 0)f(0) + p_1(x, 0)|_{x=l_0}\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдман Н.Л. Обратная задача с финальным переопределением для квазилинейного параболического уравнения с неизвестной правой частью // Вычислительные методы и программирование. 2003. 4, № 1. 159–170.
2. Гольдман Н.Л. Единственность определения правой части в квазилинейных параболических уравнениях с финальным и граничным наблюдением // Доклады РАН. 2004. 395, № 2. 151–156.
3. Гольдман Н.Л. Об одном классе обратных задач с данными Коши для квазилинейного параболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2004. 5, № 1. 74–86.
4. Гольдман Н.Л. Определение правой части в квазилинейном параболическом уравнении с финальным наблюдением // Дифференциальные уравнения. 2005. 41, № 3. 366–374.
5. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., and Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York–Basel: Marcel Dekker, 1999.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
9. Ландис Е.М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1959. 14, № 1. 21–85.
10. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Труды МИАН. 1971. 112. 232–240.

Поступила в редакцию
02.04.2005