

УДК 519.6

К РАСПОЛОЖЕНИЮ НАБЛЮДАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ПЛАСТА

П. А. Мазуров¹, А. Н. Габидуллина¹, А. В. Елесин¹, А. Ш. Кадырова¹

В работе рассмотрено влияние расположения наблюдательных точек на устойчивость итерационного процесса идентификации коэффициента фильтрации трехмерного неоднородного пласта. Исследована зависимость результатов идентификации от расположения наблюдательных точек относительно участков граничных условий первого и второго рода.

Ключевые слова: фильтрация, задача идентификации, граничные условия, коэффициенты невязок, оптимизация, матрица чувствительности.

1. Введение. Близкими по теме данного исследования являются работы по построению оптимального плана расположения наблюдательных точек [1], по выбору весовых коэффициентов невязок [2, 3] в задачах идентификации. Под оптимальной расстановкой наблюдательных точек, в которых измеряется функция искомым идентифицируемых параметров, понимается такая расстановка, при которой параметры восстанавливаются с максимально возможной точностью. В качестве критериев оптимальности обычно используются те или иные скалярные характеристики матрицы $H = A^T A$ [1], где A — матрица чувствительности значений измеряемой функции в наблюдательных точках по отношению к параметрам. Отмечено [1], что ни один из существующих критериев (число обусловленности, определитель и др.) не отражает в полной мере всех особенностей конкретной обратной задачи. В работах [2, 3] анализируются вопросы выбора весовых коэффициентов, с которыми входят в функцию невязки в процессе минимизации квадраты разностей между вычисляемыми в наблюдательных точках значениями функции идентифицируемых параметров и замеренными значениями этой функции. Весовые коэффициенты уменьшают влияние наблюдательных точек с менее точными замерами функции идентифицируемых параметров и увеличивают влияние наблюдательных точек с более точными замерами.

В данной работе исследовалась устойчивость и достоверность результатов идентификации коэффициента фильтрации в зависимости от расположения наблюдательных точек относительно участков граничных условий первого и второго рода. Исследование проводилось на модельной задаче идентификации коэффициента фильтрации трехмерного неоднородного пласта в условиях стационарной напорной фильтрации жидкости [4]. Пласт брался пятислойным зонально неоднородным реальной конфигурации. На кровле задавались расходы. Боковая поверхность и подошва непроницаемые, за исключением участков боковой поверхности пятого нижнего слоя, на которых задавались напоры. Каждая зона однородности Ω_k характеризовалась двумя значениями коэффициента фильтрации K_{xyk} и K_{zk} . Коэффициент фильтрации определялся по значениям напора в наблюдательных точках в результате минимизации функции невязки. Проведены численные эксперименты идентификации коэффициента фильтрации по наблюдательным точкам, расположенным внутри пласта (две наблюдательные точки в каждой зоне однородности), и по наблюдательным точкам, расположенным на кровле пласта. Результаты численных экспериментов показали более устойчивый характер минимизации по наблюдательным точкам, расположенным на кровле, по сравнению с наблюдательными точками внутри пласта. Добавление наблюдательных точек внутри пласта к наблюдательным точкам кровли приводило к более неустойчивому процессу минимизации. Приведено два объяснения данного результата. Одно объяснение дано с использованием понятия запасов чувствительности наблюдательных точек, характеризующих распределение невязок по главным направлениям в пространстве параметров. Другое объяснение дано на примере идентификации коэффициента фильтрации одномерной задачи, отражающей особенности приведенной модельной задачи с заданными расходными характеристиками на кровле пласта и граничными условиями первого рода на боковой поверхности нижнего слоя.

2. Постановка модельной задачи. Исследование влияния расположения наблюдательных точек проводилось на модельной задаче идентификации коэффициента фильтрации трехмерного пятислойного

¹ Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, Казань; e-mail: mazurov@mail.knc.ru, gabidullina@mail.knc.ru, elesin@mail.knc.ru, kadyirova@mail.knc.ru

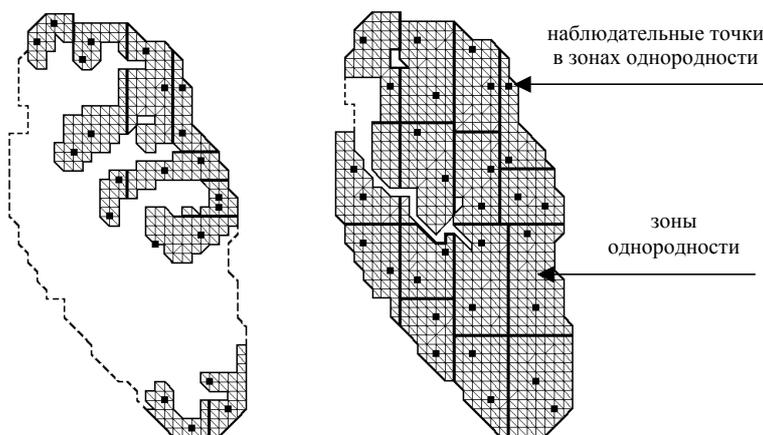


Рис. 1, 2. Слой 1 (слева), слой 2 (справа)

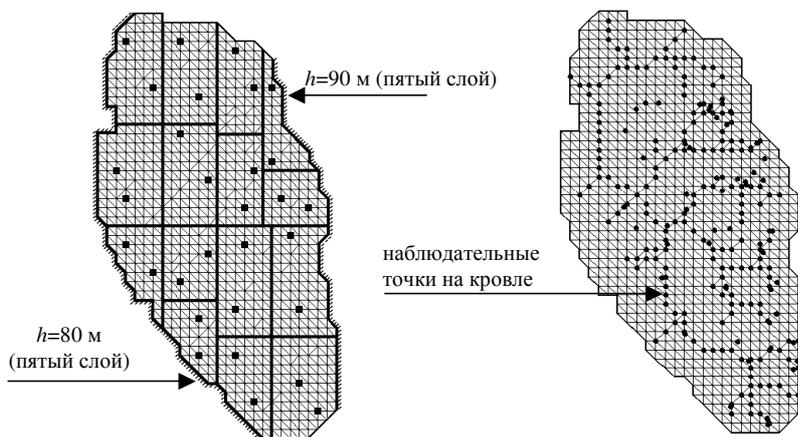


Рис. 3, 4. Слой 3–5 (слева), D_{247} — множество наблюдательных точек на кровле пласта (справа)

пласта реальной конфигурации ($\approx 40 \text{ км} \times 30 \text{ км} \times 200 \text{ м}$) в конечноэлементной аппроксимации (рис. 1–3). Пласт брались напорным при однофазной стационарной фильтрации жидкости, описываемой уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (1)$$

где K_{xy}, K_z — коэффициенты фильтрации, $h = h(x, y, z)$ — напор, Ω — область решения. На границе Γ области решения Ω задавались граничные условия первого и второго рода

$$h(x, y, z)|_{\Gamma_1} = f_1(x, y, z), \quad (2)$$

$$\left(K_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} n_x + K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} n_y + K_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z \right) \Big|_{\Gamma_2} = f_2(x, y, z), \quad (3)$$

где Γ_1 и Γ_2 — участки границы Γ области Ω , $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$; n_x, n_y, n_z — направляющие косинусы внешней нормали \mathbf{n} ; $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)$ — известные функции. Поверхность пласта непроницаемая, за исключением кровли, на которой задавались граничные условия второго рода в пределах от -9.2×10^{-3} м/сут до 2×10^{-3} м/сут, и двух участков боковой поверхности пятого нижнего слоя, на которых задавались граничные условия первого рода $h = 80$ м и $h = 90$ м (рис. 3). Слои пласта делились на зоны однородности $\Omega_k, k = 1, \dots, 71$ (рис. 1–3), в каждой из которых задавались значения коэффициента фильтрации K_{xyk}^{tr} в пределах от 0.1 м/сут до 100 м/сут и K_{zk}^{tr} в пределах от 0.0001 м/сут до 0.02 м/сут. При заданных

значениях K_{xyk}^{tr} и K_{zk}^{tr} из уравнения (1) вычислялись напоры h_j^{tr} , $j = 1, \dots, N$ в наблюдательных точках, где N — число наблюдательных точек. По значениям напора $h_j^* = h_j^{tr} + \delta_j$ восстанавливались значения коэффициента фильтрации в зонах однородности без погрешностей ($\delta_j = 0$) и с погрешностями ($\delta_j \neq 0$). В процессе минимизации как параметры K_{xyk}^{tr} , K_{zk}^{tr} , так и погрешности считались неизвестными.

Значения коэффициента фильтрации определялись из минимизации функции невязки [5–8]

$$J = J(\mathbf{K}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{R},$$

где $\mathbf{R} = [(h_1^* - h_1), \dots, (h_N^* - h_N)]^T$ — вектор невязки, $h^* = \{h_j^*\}_{j=1}^N$, $h = \{h_j\}_{j=1}^N = \{h_j(\mathbf{K})\}_{j=1}^N$ — заданные и вычисленные значения напора в наблюдательных точках, $\mathbf{K} = \{K_i\}_{i=1}^M = \{\ln K_{xyk}, \ln K_{zk}\}_{i=1}^m$, $m = 71$ — число зон однородности, $M = 142$ — число идентифицируемых параметров.

Минимизация функции невязки проводилась методом Левенберга–Марквардта [5, 8, 9]. Алгоритм метода Левенберга–Марквардта строился в следующем виде [9]:

$$\mathbf{s} = (H + \mu^n E)^{-1} \mathbf{g}, \quad \mu^{n+1} = \frac{1}{2} \mu^n, \quad \mathbf{K}^{n+1} = \mathbf{K}^n - \mathbf{s},$$

где μ^n — параметр, $H = A^T A$ — аппроксимация матрицы Гессе, $A = \{\partial h_j / \partial K_i\}$ — матрица чувствительности, $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_M]^T$ — вектор отклонений Левенберга–Марквардта, $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_M]^T = A^T \mathbf{R}$, g_i — чувствительности функции J к параметрам K_i (компоненты градиента \mathbf{g}), E — единичная матрица. На каждой итерации при нарушении условия

$$J(\mathbf{K}^{n+1}) < J(\mathbf{K}^n)$$

параметр μ^n увеличивался в два раза до тех пор, пока данное условие не выполнялось. Начальное значение параметра μ^0 задавалось на порядок больше максимального диагонального элемента матрицы H . Элементы $\partial h_j / \partial K_i$ матрицы чувствительности A определялись из решения уравнений с граничными условиями, получаемыми прямым дифференцированием [5, 6] системы (1)–(3). Производные $\partial h_j / \partial \ln K_{xyk}$ определялись из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial h_{xy}^k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial h_{xy}^k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h_{xy}^k}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xyk} \varphi_k \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xyk} \varphi_k \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (4)$$

при граничных условиях

$$h_{xy}^k|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left(K_{xy} \frac{\partial h_{xy}^k}{\partial x} n_x + K_{xy} \frac{\partial h_{xy}^k}{\partial y} n_y + K_z \frac{\partial h_{xy}^k}{\partial z} n_z \right) \Big|_{\Gamma_2} = -K_{xyk} \varphi_k \frac{\partial h}{\partial x} n_x - K_{xyk} \varphi_k \frac{\partial h}{\partial y} n_y, \quad (5)$$

где $h_{xy}^k = \partial h / \partial \ln K_{xyk}$, $K_{xy} = \sum_{k=1}^m K_{xyk} \varphi_k$, $K_z = \sum_{k=1}^m K_{zk} \varphi_k$, $\varphi_k = \varphi_k(x, y, z) = 1$ при $(x, y, z) \in \Omega_k$ и

$\varphi_k = \varphi_k(x, y, z) = 0$ при $(x, y, z) \notin \Omega_k$, $k = 1, \dots, m$. Значения $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$, входящие в правые части (4), (5),

известны из решения уравнения фильтрации (1). Значения функции h_{xy}^k в наблюдательных точках j дают значения производных $\partial h_j / \partial \ln K_{xyk}$. Аналогично определялись значения производных по параметрам $\ln K_{zk}$. Уравнения для вычисления производных $\partial h_j / \partial \ln K_{xyk}$, $\partial h_j / \partial \ln K_{zk}$ решаются независимо, что дает возможность распараллеливания задачи идентификации. Процесс минимизации функции невязки прерывался при выполнении одного из двух критериев:

1) медленная сходимость итерационного процесса

$$J(\mathbf{K}^n) - J(\mathbf{K}^{n+1}) < 0.01 J(\mathbf{K}^n)$$

в течение 10 итераций;

2) достижение заданной точности по напору в наблюдательных точках

$$\Delta h^m = \max_j |h_j^* - h_j(\mathbf{K}^n)| < 10^{-6} \text{ м.}$$

Для оценки сходимости итерационного процесса идентификации использовалось среднее квадратическое отклонение логарифмов значений коэффициента фильтрации

$$\Delta \ln K_{xyz}^{\Omega} = \left[\sum_{k=1}^m \left(\int_{\Omega_k} ((\ln K_{xyk} - \ln K_{xyk}^{tr})^2 + (\ln K_{zk} - \ln K_{zk}^{tr})^2) d\Omega \right) / \int_{\Omega} d\Omega \right]^{1/2}.$$

Начальные значения коэффициента фильтрации K_{xyk}^0, K_{zk}^0 определялись в процессе минимизации функции невязки при условии $K_{xyk}^0 = K_{xy}^0, K_{zk}^0 = K_z^0, k = 1, \dots, m$. Системы алгебраических уравнений, получаемые в результате конечноэлементной аппроксимации уравнений (1), (4) и соответствующих граничных условий, решались методом сопряженных градиентов с преобуславливающей матрицей в виде неполного разложения Холесского [10, 11].

Приведенная модельная задача отражает особенности решения задачи идентификации коэффициента фильтрации водоносного пласта речного водосборного бассейна. В общем случае режим фильтрации водоносного пласта речного водосборного бассейна напорно-безнапорный. При известной верхней поверхности области решения постановка задачи идентификации для напорного пласта сохраняется и в случае напорно-безнапорной фильтрации. Кровля пласта в этом случае на участках безнапорной фильтрации имитирует поверхность грунтовых вод. Граничные условия второго рода на кровле пласта определяются инфильтрационным питанием, испарением, расходными характеристиками реки и родников. Непроницаемость боковых поверхностей верхних слоев определяется линией водораздела, непроницаемость подошвы пласта — водоупором. Допущение известности верхней поверхности области решения является дополнительной информацией и оправдывается тем, что наиболее достоверные и устойчивые результаты идентификации получаются, как будет показано в следующих разделах, по значениям напора в наблюдательных точках, расположенных на кровле пласта.

3. Влияние расположения наблюдательных точек на результаты идентификации. Проведем исследование влияния расположения наблюдательных точек на результаты идентификации. Предварительно введем следующие обозначения для различных множеств наблюдательных точек: D_{142} — множество наблюдательных точек, расположенных внутри пласта (142 наблюдательные точки, рис. 1 – 3); D_{247} — множество наблюдательных точек, расположенных на кровле пласта (247 наблюдательных точек, рис. 4); D_{389} — множество наблюдательных точек, объединяющее D_{142} и D_{247} .

Множество D_{142} включает наблюдательные точки, расположенные в зонах однородности (по две наблюдательные точки на верхней поверхности каждой зоны). Наблюдательные точки множества D_{247} расположены в местах, характерных для расположения реки и родников, и обладают хорошей разбросанностью по кровле пласта.

Приведем результаты решения задачи идентификации 142-х значений коэффициента фильтрации методом Левенберга–Марквардта по замерам напора $h_j^* = h_j^{tr} + \delta_j$ при наличии погрешностей для каждого из множеств $D_{142}, D_{247}, D_{389}$ (рис. 5 – 8).

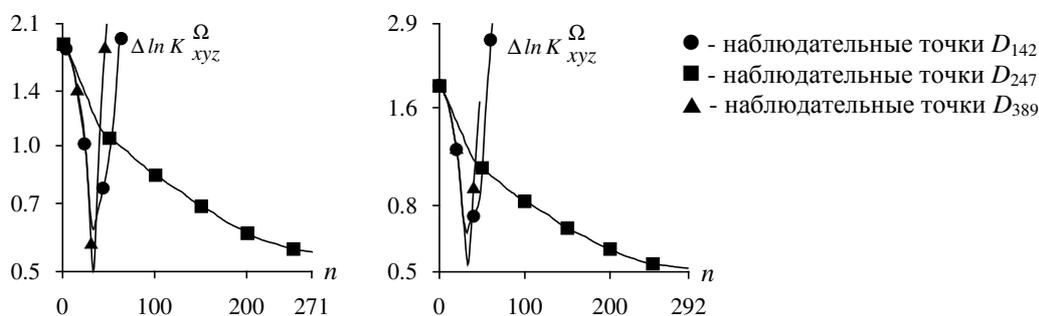


Рис. 5, 6. Среднеквадратические отклонения $\Delta \ln K_{xyz}^{\Omega}$, полученные при погрешностях $\delta_j = 0.01$ м (слева), $\delta_j = -0.01$ м (справа)

Приведенные результаты показывают, что решение задачи идентификации в случае наблюдательных точек D_{247} более устойчиво к погрешностям в замерах напора по сравнению с решением в случае D_{142} . Добавление к наблюдательным точкам D_{247} наблюдательных точек D_{142} приводит к появлению неустойчивости решения задачи идентификации.

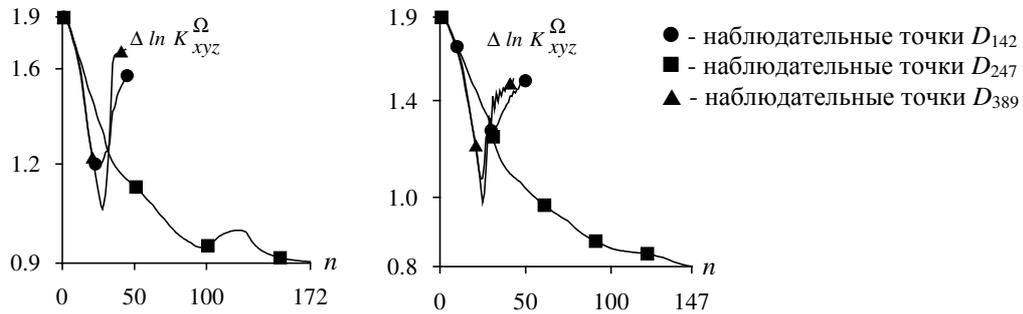


Рис. 7, 8. Среднеквадратические отклонения $\Delta \ln K_{xyz}^{\Omega}$, полученные при погрешностях $\delta_j = 0.1$ м (слева), $\delta_j = -0.1$ м (справа)

4. Исследование влияния расположения наблюдательных точек на процесс идентификации с использованием запасов чувствительности наблюдательных точек. Для определения запасов чувствительности наблюдательных точек предварительно приведем краткие результаты работ по введению понятия запасов чувствительности [12–14]. Запишем приближенные приращения функции невязки и вектора чувствительности (градиента) в окрестности минимума функции невязки в пространстве параметров между текущей точкой \mathbf{K} и точкой минимума $\mathbf{K} - \mathbf{s}$ [8, 15]:

$$J(\mathbf{K} - \mathbf{s}) - J(\mathbf{K}) \approx -\mathbf{g}^T(\mathbf{K})\mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T G(\mathbf{K})\mathbf{s}, \quad (6)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{K} - \mathbf{s}) - \mathbf{g}(\mathbf{K}) \approx -G(\mathbf{K})\mathbf{s}, \quad (7)$$

где \mathbf{s} — вектор отклонений параметров, $G = \left\{ \frac{\partial^2 J}{\partial K_i \partial K_l} \right\}$ — матрица Гессе. Необходимым условием минимума функции невязки является равенство нулю вектора чувствительности $\mathbf{g}(\mathbf{K} - \mathbf{s})$. Из (7) и равенства $\mathbf{g}(\mathbf{K} - \mathbf{s}) = 0$ запишем уравнение $G(\mathbf{K})\mathbf{s}^N = \mathbf{g}(\mathbf{K})$ для определения вектора отклонений Ньютона при существовании обратной матрицы $G^{-1}(\mathbf{K})$:

$$\mathbf{s}^N = G^{-1}(\mathbf{K})\mathbf{g}(\mathbf{K}). \quad (8)$$

С учетом (6) и (8) в окрестности минимума $J(\mathbf{K} - \mathbf{s}) = 0$ получим $J(\mathbf{K}) \approx \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{s}^N$, или

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} \approx \mathbf{g}^T \mathbf{s}^N = \sum_{i=1}^M g_i s_i^N. \quad (9)$$

Каждое слагаемое $g_i s_i^N$ в (9) характеризует приращение квадрата вектора невязки $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ за счет i -го параметра. В квазиньютоновском методе Гаусса–Ньютона [8] матрица Гессе аппроксимируется с помощью матрицы чувствительности A :

$$G \approx H = A^T A = \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\partial h_j}{\partial K_i} \frac{\partial h_j}{\partial K_l} \right\},$$

и вектор отклонений Гаусса–Ньютона \mathbf{s} определяется из решения системы уравнений

$$H\mathbf{s} = \mathbf{g}. \quad (10)$$

При приближении точки \mathbf{K} к точке $\mathbf{K} - \mathbf{s}$ минимума функции невязки $J(\mathbf{K} - \mathbf{s}) = 0$ для компонент матрицы Гессе

$$\frac{\partial^2 J}{\partial K_i \partial K_l} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial h_j}{\partial K_i} \frac{\partial h_j}{\partial K_l} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 h_j}{\partial K_i \partial K_l} (h_j - h_j^*)$$

при ограниченных производных $\frac{\partial^2 h_j}{\partial K_i \partial K_l}$ имеем

$$G \rightarrow H. \quad (11)$$

Величина $P_i = s_i g_i$ определена в [12–14] как запас чувствительности i -го параметра. Из (9), (11) в окрестности минимума $J(\mathbf{K} - \mathbf{s}) = 0$ запас чувствительности P_i характеризует приращение квадрата вектора невязки за счет i -го параметра от текущей точки \mathbf{K} в пространстве параметров до точки $\mathbf{K} - \mathbf{s}$ минимума функции невязки.

При невырожденной квадратной ($N = M$) матрице A сумма запасов чувствительности всех параметров равна квадрату вектора невязки \mathbf{R} [12–14]:

$$P = \sum_{i=1}^M P_i = \sum_{i=1}^M s_i g_i = \mathbf{s}^T \mathbf{g} = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{R})^T (\mathbf{A}^T \mathbf{R}) = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$$

независимо от расстояния между точкой $\mathbf{K} - \mathbf{s}$ предполагаемого минимума $J(\mathbf{K} - \mathbf{s}) = 0$ и текущей точкой \mathbf{K} . В главной системе координат в пространстве параметров с использованием SVD-разложения матрицы $H = V \Sigma V^T$ [8, 16, 17] уравнение (10) записывается в виде $\sigma_i s_{V_i} = g_{V_i}$, $i = 1, \dots, M$, где V — ортогональная матрица, $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_M)$ — диагональная матрица, σ_i — сингулярные числа, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_M > 0$, s_{V_i} — компоненты вектора отклонений $\mathbf{s}_V = V^T \mathbf{s}$, g_{V_i} — чувствительности функции J в направлении осей главной системы координат (компоненты градиента $\mathbf{g}_V = V^T \mathbf{g}$). Запас чувствительности в направлении i -ой оси преобразованной системы координат будет равен $P_{V_i} = s_{V_i} g_{V_i} = \frac{g_{V_i}^2}{\sigma_i} = s_{V_i}^2 \sigma_i \geq 0$, а полный запас чувствительности

$$P_V = \sum_{i=1}^M P_{V_i} = \sum_{i=1}^M s_{V_i} g_{V_i} = \mathbf{s}_V^T \mathbf{g}_V = (V^T \mathbf{s})^T (V^T \mathbf{g}) = \mathbf{s}^T \mathbf{g} = P. \quad (12)$$

Таким образом, полный запас чувствительности есть инвариантная величина относительно данного преобразования матрицы H . Заметим, что $P_{V_i} \geq 0$; указанное неравенство для P_i в общем случае не выполняется. В [12] показано, что в случае $N > M$ и матрицы A ранга M сумма запасов чувствительности всех параметров не больше квадрата вектора невязки $P_V \leq \mathbf{R}^T \mathbf{R}$.

В [12–14] распределение запасов чувствительности в главной системе координат использовано для объяснения причин медленной сходимости метода наискорейшего спуска. Для объяснения результатов раздела 3 введем понятие запаса чувствительности наблюдательной точки. Запасом чувствительности j -ой наблюдательной точки Π^j назовем запас чувствительности функции невязки в случае j -ой невязки, равной единице, и остальных невязок, равных нулю. В главной системе координат запас чувствительности j -ой наблюдательной точки записывается аналогично (12) в следующем виде:

$$\Pi_V^j = \sum_{i=1}^M \Pi_{V_i}^j = \sum_{i=1}^M g_{V_i}^j s_{V_i}^j,$$

где $\Pi_{V_i}^j = g_{V_i}^j s_{V_i}^j \geq 0$ — запас чувствительности j -ой наблюдательной точки в i -ом направлении, $g_{V_i}^j$ — чувствительность j -ой невязки, равной единице, $s_{V_i}^j$ — отклонение, определяемое уравнением $\sigma_i s_{V_i}^j = g_{V_i}^j$.

Рассмотрим распределение запасов чувствительности наблюдательных точек D_{142} и D_{247} в направлениях главной системы координат при минимизации функции невязки по наблюдательным точкам D_{389} . Запасы чувствительности наблюдательных точек D_{142} и D_{247} в i -ом направлении записываются соответственно в виде

$$\Pi_{V_i}^{D_{142}} = \sum_{j \in D_{142}} \Pi_{V_i}^j, \quad \Pi_{V_i}^{D_{247}} = \sum_{j \in D_{247}} \Pi_{V_i}^j.$$

Распределение запасов чувствительности точек D_{142} и D_{247} по главным направлениям в начальном состоянии приведены на рис. 9, 10.

Интегральные характеристики $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N_c} \Pi_{V_i}^{D_{142}}$, $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N_c} \Pi_{V_i}^{D_{247}}$ распределения запасов чувствительности наблюдательных точек D_{142} и D_{247} начального состояния в главной системе координат приведены на рис. 11, 12.

На рис. 13 приведены по итерациям номера N_c^{142} , N_c^{247} центров распределения запасов чувствительности наблюдательных точек D_{142} и D_{247} , где N_c^{142} , N_c^{247} — соответственно номера N_c , при которых

достигаются минимумы $\left| \sum_{i=1}^{N_c} \Pi_{V_i}^{D_{142}} - \sum_{i=N_c}^{142} \Pi_{V_i}^{D_{142}} \right|$ и $\left| \sum_{i=1}^{N_c} \Pi_{V_i}^{D_{247}} - \sum_{i=N_c}^{142} \Pi_{V_i}^{D_{247}} \right|$.

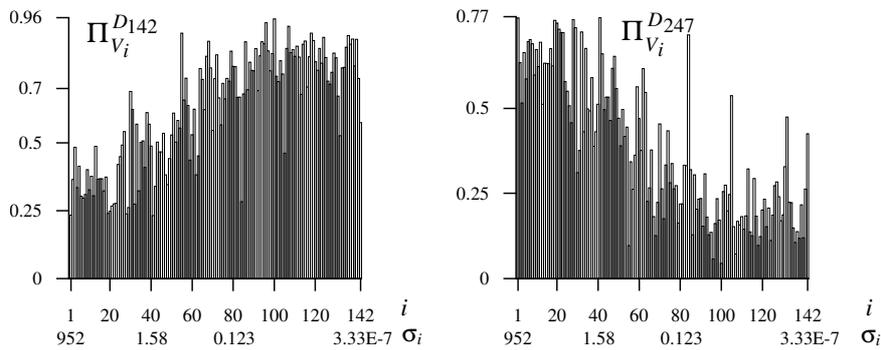


Рис. 9, 10. Распределение запасов чувствительности наблюдательных точек D_{142} (слева) и D_{247} (справа) начального состояния по главным направлениям в задаче идентификации по наблюдательным точкам D_{389} ; i — номер направления, σ_i — сингулярное число, соответствующее i -му направлению

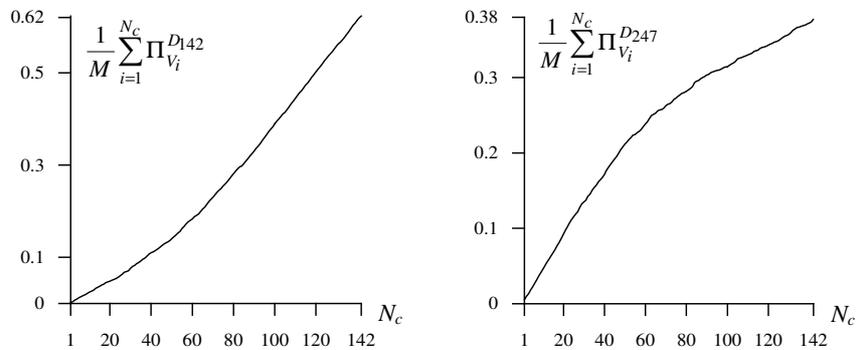


Рис. 11, 12. Интегральные характеристики распределения запасов чувствительности наблюдательных точек D_{142} (слева) и D_{247} (справа) начального состояния в главной системе координат в задаче идентификации по наблюдательным точкам D_{389} ; N_c — максимальный номер направления, по которому суммируются запасы чувствительности, M — число параметров.

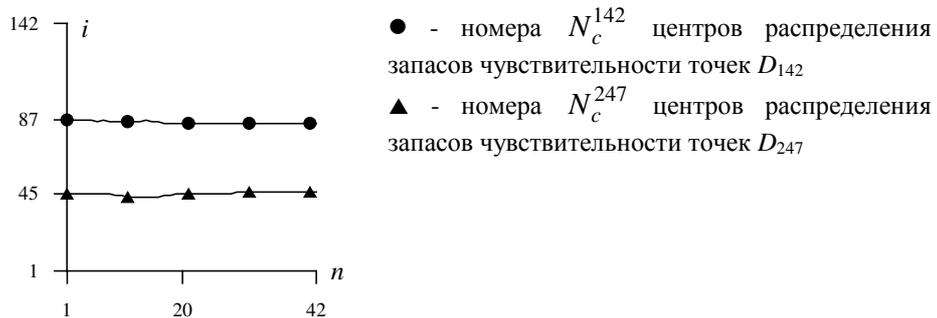


Рис. 13. Номера центров распределения запасов чувствительности наблюдательных точек D_{142} и D_{247} в процессе минимизации функции невязки по наблюдательным точкам D_{389} , n — номер итерации, i — номер направления

Приведенные результаты показывают, что запасы чувствительности наблюдательных точек D_{142} сосредоточены в направлениях с меньшими сингулярными числами по сравнению с запасами чувствительности наблюдательных точек D_{247} . При наличии погрешностей в замерах напора отдельных наблюдательных точек отклонения параметров от своих истинных значений связаны с распределением соответствующих невязок по главным направлениям. Невязки, распределенные в направлениях с меньшими сингу-

лярными числами, вызывают большие отклонения параметров в процессе минимизации. Отсюда, невязки наблюдательных точек D_{142} вносят большую неустойчивость в процесс идентификации по сравнению с невязками наблюдательных точек D_{247} .

5. Исследование влияния расположения наблюдательных точек на примере решения одномерной задачи идентификации коэффициента фильтрации. Для другого объяснения неустойчивости идентификации коэффициента фильтрации по замерам напора в наблюдательных точках, расположенных внутри пласта, рассмотрим задачу идентификации коэффициента фильтрации по значению напора при одномерной стационарной фильтрации, описываемой уравнением

$$\frac{d}{dx} \left(K \frac{dh}{dx} \right) = 0, \quad x \in [0, L] \tag{13}$$

с граничными условиями первого и второго рода

$$h|_{x=0} = h^0, \quad -K \frac{dh}{dx} \Big|_{x=L} = q. \tag{14}$$

Решение системы (13), (14) имеет вид

$$\frac{q}{K} x = h^0 - h(x), \quad x \in [0, L]. \tag{15}$$

Пусть в точке $x = x^*$, $x \in (0, L)$ известно значение напора $h^* = h(x^*)$, по которому будем определять коэффициент фильтрации из (15). При погрешности δ в замере напора $h^* - \delta$ коэффициент фильтрации K_δ будет определяться из уравнения

$$\frac{q}{K_\delta} x^* = h^0 - h^* + \delta. \tag{16}$$

С учетом (15), (16) имеем

$$\left(\frac{1}{K_\delta} - \frac{1}{K} \right) = \frac{\delta}{qx^*}. \tag{17}$$

Из (17) видно, что чем дальше точка x^* от граничного условия первого рода и чем больше расход q , тем меньше ошибка в определении коэффициента фильтрации. Условие (17) отражает сущность неустойчивости итерационного процесса идентификации коэффициента фильтрации по наблюдательным точкам внутри пласта для приведенной модельной задачи с заданными расходами на кровле пласта и граничными условиями первого рода на боковых поверхностях нижнего слоя.

Рассмотрим дополнительный пример влияния расстояния наблюдательных точек до участков граничных условий первого рода. На рис. 14, 15 приведены значения функции невязки и среднеквадратического отклонения $\Delta \ln K_{xyz}^\Omega$ при идентификации коэффициента фильтрации по 142-м наблюдательным точкам, расположенным в зонах однородности на верхней поверхности слоев, и при идентификации по этим же точкам, смещенным в середины слоев ближе к участкам граничных условий первого рода.

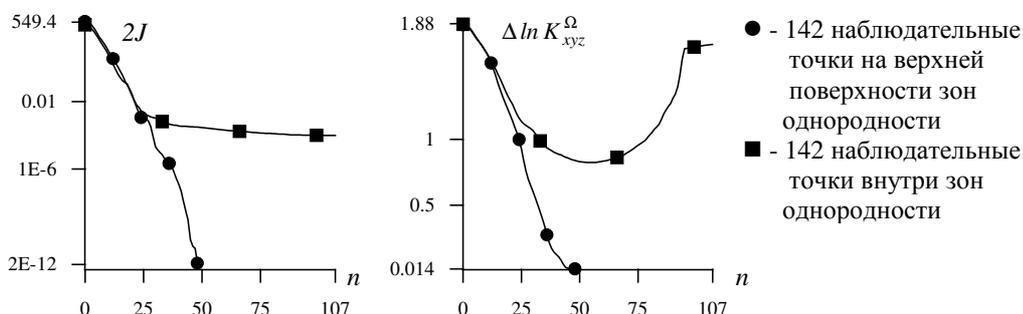


Рис. 14, 15. Результаты решения задачи идентификации по 142-м наблюдательным точкам (без погрешностей): функция невязки J (слева), среднеквадратическое отклонение $\Delta \ln K_{xyz}^\Omega$ (справа)

6. К расположению наблюдательных точек. Рассмотрим отдельные примеры идентификации коэффициента фильтрации по другим множествам наблюдательных точек, расположенных на кровле пласта. На рис. 16 – 19 приведены результаты идентификации при погрешностях в замерах напора по множествам наблюдательных точек D_{142}^m , D_{247}^m , D_{896} , где D_{142}^m – 142 наблюдательные точки с максимальными

расходами, D_{247}^m — 247 наблюдательных точек с максимальными расходами, D_{896} — 896 наблюдательных точек, расположенных во всех узлах конечноэлементной сетки кровли. Расходы определялись в виде интегралов от граничных условий второго рода вокруг узлов сетки по поверхности кровли.

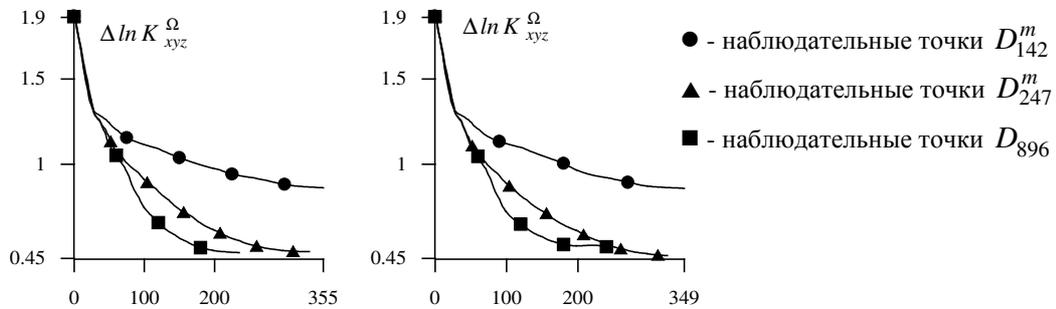


Рис. 16, 17. Среднеквадратическое отклонение $\Delta \ln K_{xyz}^{\Omega}$ при решении задачи идентификации по множествам наблюдательных точек D_{142}^m , D_{247}^m , D_{896} при погрешностях $\delta_j = 0.01$ м (слева), $\delta_j = -0.01$ м (справа)

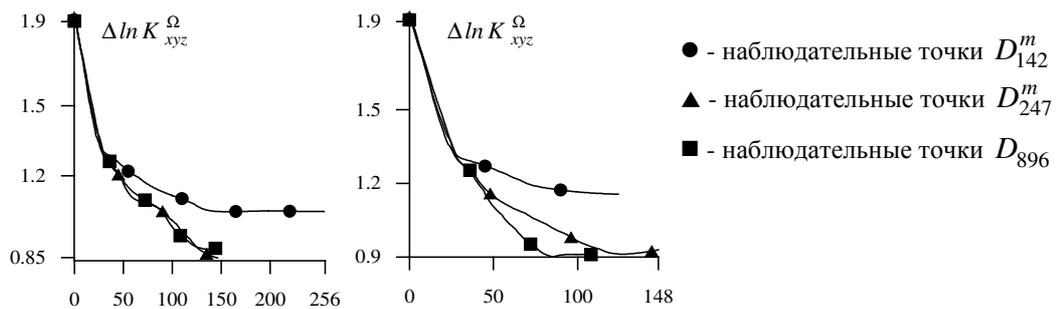


Рис. 18, 19. Среднеквадратическое отклонение $\Delta \ln K_{xyz}^{\Omega}$ при решении задачи идентификации по множествам наблюдательных точек D_{142}^m , D_{247}^m , D_{896} при погрешностях $\delta_j = 0.1$ м (слева), $\delta_j = -0.1$ м (справа)

Рассмотренные примеры показывают сохранение устойчивого характера итерационного процесса идентификации по наблюдательным точкам, расположенным на кровле пласта.

Приведем сравнение чисел обусловленности $\eta = \sigma_{\max}/\sigma_{\min}$ матрицы $H = A^T A$ при значениях коэффициента фильтрации $K_{xyk} = K_{xyk}^{tr}$, $K_{zk} = K_{zk}^{tr}$ для множеств наблюдательных точек, использованных в работе.

Числа обусловленности матрицы H при значениях параметров $K_i = K_i^{tr}$

Множество наблюдательных точек	D_{142}	D_{247}	D_{389}	D_{142}^m	D_{247}^m	D_{896}
Число обусловленности	5.84×10^{14}	1.61×10^{16}	1.23×10^{11}	3.31×10^{18}	4.65×10^{14}	1.12×10^{16}

Сравнение чисел обусловленности и результатов идентификации показывает недостаточность выбора числа обусловленности в качестве критерия для построения оптимального плана расположения наблюдательных точек и необходимость учета расположения наблюдательных точек относительно границы области решения.

7. Заключение. В работе исследовалось влияние расположения наблюдательных точек на результаты решения модельной задачи идентификации коэффициента фильтрации трехмерного неоднородного

пятислойного пласта с заданными расходами на кровле пласта и с заданными напорами на участках боковой поверхности нижнего слоя. Проведено сравнение результатов идентификации, полученных по наблюдательным точкам, расположенным на кровле пласта, и по наблюдательным точкам, расположенным в зонах однородности внутри пласта. Численные эксперименты показали более устойчивый характер процесса идентификации коэффициента фильтрации по наблюдательным точкам, расположенным на кровле. Добавление к этим наблюдательным точкам наблюдательных точек внутри пласта приводило к увеличению неустойчивости задачи идентификации. Приведено два объяснения полученных результатов. Одно объяснение дано на примере решения одномерной задачи идентификации. Показано, что приближение наблюдательных точек к участкам границы с заданными граничными условиями первого рода увеличивает неустойчивость задачи. Другое объяснение дано с использованием понятия запасов чувствительности наблюдательных точек. Запасы чувствительности наблюдательных точек характеризуют распределение невязок по главным направлениям в пространстве параметров. Показано, что запасы чувствительности наблюдательных точек, расположенных внутри пласта, сосредоточены в направлениях минимизации с меньшими сингулярными числами по сравнению с запасами чувствительности наблюдательных точек кровли. Необходимо отметить, что запасы чувствительности наблюдательных точек не связаны со спецификой задачи и могут быть использованы в других случаях минимизации функции невязки при решении нелинейных уравнений. В работе не дается рекомендаций по оптимальному расположению наблюдательных точек. Приведенные результаты носят качественный характер, но показывают необходимость учета расположения наблюдательных точек относительно границы области решения при построении оптимального плана расположения наблюдательных точек и при выборе весовых коэффициентов невязок.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 17 “Параллельные вычисления и многопроцессорные вычислительные системы”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1998.
2. Hill M.C., Tiedeman C.D. Weighting observations in the context of calibrating ground-water models // 4th International Conference on Calibration and Reliability in Groundwater Modelling. Prague, Czech Republic. 17–20 June 2002. 1. 213–217.
3. Hill M.C., Cooley R.L., Pollock D.W. A controlled experiment in ground-water flow model calibration // Ground Water. 1998. 36, N 3. 520–535.
4. Мироненко В.А. Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГГУ, 1996.
5. Sun N.-Z. Inverse problems in groundwater modeling. Norwell: Kluwer Acad., 1994.
6. Yeh W.W-G. Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: the inverse problem // Water Resour. Res. 1986. 22, N 2. 95–108.
7. Carrera J., Neuman S.P. Estimation of aquifer parameters under transient and steady state conditions: 1. Maximum likelihood method incorporating prior information // Water Resour. Res. 1986. 22, N 2. 199–210.
8. Дэниелс Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.
9. Летова Т.А., Пантелеев А.В. Экстремум функций в примерах и задачах. М.: Изд-во МАИ, 1998.
10. Hill M.C. Solving groundwater flow problems by conjugate-gradient methods and the strongly implicit procedure // Water Resour. Res. 1990. 26, N 9. 1961–1969.
11. Larabi A., De Smedt F. Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods // Water Resour. Res. 1994. 30, N 2. 509–521.
12. Мазуров П.А., Габидуллина А.Н., Елесин А.В., Кадырова А.Ш. Запасы чувствительности в задачах идентификации коэффициента фильтрации трехмерных пластов // Вычислительные методы и программирование. 2004. 5, № 1. 50–61.
13. Мазуров П.А., Елесин А.В., Габидуллина А.Н., Кадырова А.Ш. Определение параметров водоносных пластов с использованием анализа чувствительности // Современные проблемы гидрогеологии и гидрогеомеханики. Сб. докл. конференции. СПб., 2002. 462–471.
14. Mazurov P.A., Elesin A.V., Gabidullina A.N., Kadyrova A.Sh. Use of minimization along the slope for estimation of aquifer parameters // 4th International Conference on Calibration and Reliability in Groundwater Modelling. Prague, Czech Republic. 17–20 June 2002. 1. 278–281.
15. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
16. Weiss R., Smith L. Parameter space methods in joint parameter estimation for groundwater flow models // Water Resour. Res. 1998. 34, N 4. 647–661.
17. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.