

Параллельная версия спектрального предобуславливателя для решения уравнения Пуассона

А. А. Манаев

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0009-0003-2948-3683, e-mail: manaeff.leha@gmail.com

В. В. Лисица

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: lisitsavv@yandex.ru

Аннотация: В работе представлена параллельная версия спектрального предобуславливателя для численного решения уравнения Пуассона в неоднородных средах. Действие спектрального предобуславливателя основано на собственном разложении операторов, аппроксимирующих производные и соответствующие граничные условия по одному из пространственных направлений, с последующим решением серии независимых одномерных задач по другому направлению. Параллельная версия построена на основе метода декомпозиции области с использованием полиномиальной аппроксимации обратной матрицы и блочно-диагональной матрицы, каждый блок которой аналогичен по своему действию спектральному предобуславливателю. Показано, что предложенный подход к построению предобуславливателя способен существенно ускорить вычисления в сравнении со стандартными способами предобуславливания.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, предобуславливатель, спектральное разложение, декомпозиция области.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075–15–2025–348.

Для цитирования: Манаев А.А., Лисица В.В. Параллельная версия спектрального предобуславливателя для решения уравнения Пуассона // Вычислительные методы и программирование. 2026. 27, № 3. 390–405. doi 10.26089/NumMet.v27r325.



Parallel version of the spectral preconditioner for solving the Poisson equation

Aleksei A. Manaev

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk, Russia

ORCID: 0009-0003-2948-3683, e-mail: manaeff.leha@gmail.com

Vadim V. Lisitsa

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk, Russia

ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: lisitsavv@yandex.ru

Abstract: This paper presents a parallel version of the spectral preconditioner for the numerical solution of the Poisson equation in heterogeneous media. The action of the spectral preconditioner is based on the eigendecomposition of operators approximating derivatives and the corresponding boundary conditions along one spatial direction, followed by the solution of a series of independent one-dimensional problems along another spatial direction. The parallel version is based on the domain decomposition method using a polynomial approximation of the inverse matrix and a block-diagonal matrix, where each block is analogous in its action to the spectral preconditioner. It is shown that the proposed approach for constructing the preconditioner can significantly accelerate computations compared to standard preconditioning methods.

Keywords: Poisson equation, preconditioner, spectral decomposition, domain decomposition.

Acknowledgements: The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075–15–2025–348 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: A. A. Manaev, V. V. Lisitsa, “Parallel version of the spectral preconditioner for solving the Poisson equation,” Numerical Methods and Programming. 27 (3), 390–405 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r325.

1. Введение. Численная оценка эффективных свойств сред или же апскейлинг является действенным методом для изучения процессов, происходящих в пористых материалах, в частности в горных породах. Суть апскейлинга заключается в моделировании процессов на поровом масштабе и последующем осреднении результатов, чтобы в дальнейшем представить рассматриваемую область как однородную. Так, например, абсолютную проницаемость можно оценить через решение уравнения Стокса и усреднение потока согласно закону Дарси [1–3]. Решая задачу двухфазного течения, можно оценить эффективное капиллярное давление или относительную проницаемость [4, 5]. Решение стационарных уравнений упругости приводит к оценке эффективных упругих параметров пористых сред [6, 7]. Удельная электрическая проводимость оценивается через решение задачи о распределении потенциала и последующем применении закона Ома [8], аналогичным образом можно оценить эффективную теплопроводность среды [9].

Отметим, что при численном моделировании упомянутых физических процессов так или иначе возникает необходимость в решении уравнения Пуассона с переменным коэффициентом, соответствующим пористой среде. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученная дискретизацией уравнения с соответствующими граничными условиями, в случае высококонтрастных коэффициентов и мелкой расчетной сетки будет плохо обусловленной [10]. При этом прямые методы решения СЛАУ, менее чувствительные к обусловленности системы, непригодны в связи с нехваткой памяти из-за большого числа неизвестных в интересующих задачах. Плохая обусловленность СЛАУ приводит к тому, что на практике итерационный метод решения будет долго сходиться до остановки или даже не сойдется. Таким образом, целесообразно применить предобуславливатель для ускорения сходимости итерационного метода. Стоит также отметить, что стандартные способы предобуславливания имеют ряд недостатков. Так,

диагональный предобуславливатель Якоби не гарантирует существенного ускорения сходимости. Подход, основанный на LU-факторизации с малоранговыми аппроксимациями [11–13], требует дополнительной памяти для хранения факторов. Эффективность многосеточных методов [14, 15] падает при решении СЛАУ, построенных из уравнений для сред со сложной геометрией, характерной для пористых сред [16].

В работах [17–19] мы рассматриваем предобуславливатель, основанный на аппроксимации уравнения Пуассона, но для более простых сред — однородных или слоистых по одному направлению. Действие такого предобуславливателя легко представить как последовательность из быстрых преобразований Фурье (БПФ) или синус-преобразований, решения диагональной СЛАУ и последующего обратного преобразования Фурье. Однако в интересующих нас задачах зачастую возникают непериодические граничные условия, в связи с чем применение БПФ несколько осложнено [20]. Поэтому целесообразно применить спектральное разложение одномерных операторов вторых производных, в таком случае умножение вектора на ортогональную матрицу, составленную из собственных векторов, будет аналогично БПФ. Ранее было указано, что такой подход ориентирован на вычисления на одном расчетном узле [21]. В работе представлена параллельная версия предобуславливателя, применимая в случае гетерогенных вычислений.

2. Постановка задачи.

2.1. Уравнение Пуассона в случае неоднородной среды. Рассмотрим уравнение Пуассона в двумерной прямоугольной области $[a, b] \times [c, d]$:

$$\nabla \cdot (\sigma(x, y) \nabla \varphi(x, y)) = 0 \quad (1)$$

с искомой функцией $\varphi(x, y)$ и известной функцией $\sigma(x, y)$ такой, что $0 < \sigma_1 \leq \sigma(x, y) \leq \sigma_2 < \infty$.

На двух границах задано условие Дирихле:

$$\varphi(x, y)|_{y=c} = \varphi_c, \quad \varphi(x, y)|_{y=d} = \varphi_d, \quad (2)$$

на двух оставшихся — условие Неймана:

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}|_{x=a} = 0, \quad \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}|_{x=b} = 0. \quad (3)$$

На рис. 1 представлен пример области с граничными условиями (2), (3) и кусочно-постоянной $\sigma(x, y)$, соответствующей некоторой двухфазной среде, т.е. $\sigma(x, y)$ — кусочно-постоянная функция, принимающая только два значения σ_1 и σ_2 , которые могут отличаться на порядки. Отметим, что такая постановка задачи (1)–(3) возникает при оценке электропроводности образца горной породы. Очевидным образом данная постановка распространяется и на трехмерный случай, при котором условие Дирихле также задается на двух противоположных границах, а условие Неймана — на оставшихся.

Также отметим, что предложенный в статье метод численного решения уравнения Пуассона обобщается на случай ненулевой правой части, который часто возникает при решении уравнений Навье–Стокса для несжимаемых жидкостей.

2.2. Конечно-разностная аппроксимация. Для аппроксимации задачи (1)–(3) вводится сетка с узлами $x_i = a + ih_x$, $y_j = c + jh_y$ и ячейками $C_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ при $i = 0, 1, \dots, N_x - 1$, $j = 0, 1, \dots, N_y - 1$, где h_x , h_y — шаги сетки вдоль x и y . Предполагается, что $\varphi(x, y)$, $\sigma(x, y)$ являются постоянными внутри ячеек $C_{i,j}$. В таком случае можно построить конечно-разностную аппроксимацию [22] для уравнения (1):

$$\frac{1}{h_x} (\tilde{\sigma}_{i+1/2,j} D_x(\varphi)_{i+1/2,j} - \tilde{\sigma}_{i-1/2,j} D_x(\varphi)_{i-1/2,j}) + \frac{1}{h_y} (\tilde{\sigma}_{i,j+1/2} D_y(\varphi)_{i,j+1/2} - \tilde{\sigma}_{i,j-1/2} D_y(\varphi)_{i,j-1/2}) = 0. \quad (4)$$

Здесь конечно-разностные операторы D_x и D_y определены как

$$D_x(\varphi)_{i+1/2,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_x}, \quad D_y(\varphi)_{i,j+1/2} = \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_y},$$

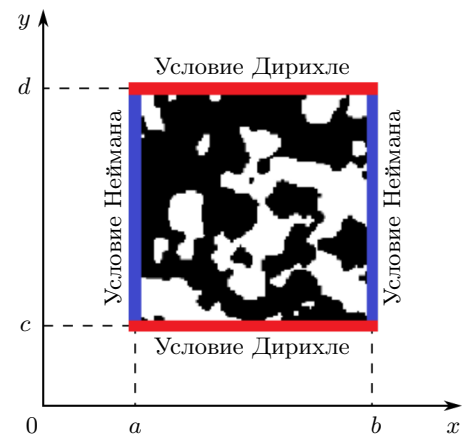


Рис. 1. Пример вычислительной области для двухфазной среды

Fig. 1. Example of a computational domain for a two-phase medium



а значения $\tilde{\sigma}_{i+1/2,j}$, $\tilde{\sigma}_{i,j+1/2}$ аппроксимируются как средние гармонические:

$$\tilde{\sigma}_{i+1/2,j} = \frac{2}{\frac{1}{\sigma_{i+1,j}} + \frac{1}{\sigma_{i,j}}}, \quad \tilde{\sigma}_{i,j+1/2} = \frac{2}{\frac{1}{\sigma_{i,j+1}} + \frac{1}{\sigma_{i,j}}}.$$

Условия (2), (3) аппроксимируются стандартным образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,0} &= \varphi_c, \quad \varphi_{i,N_y-1} = \varphi_d, \\ \frac{\varphi_{0,j} - \varphi_{1,j}}{h_x} &= 0, \quad \frac{\varphi_{N_x-1,j} - \varphi_{N_x-2,j}}{h_x} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Более подробное описание разностной аппроксимации представлено в работах [11, 23].

3. Метод сопряженных градиентов. Воспользовавшись конечно-разностной аппроксимацией (4), (5) и некоторыми линейными операциями, подробное описание которых представлено в [18], получим СЛАУ:

$$A\varphi = f, \quad (6)$$

где A — положительно определенная и самосопряженная матрица, в связи с чем уместно применить метод сопряженных градиентов, теоретически гарантирующий сходимость [10]. Однако известно, что на скорость сходимости метода сопряженных градиентов существенно влияет число обусловленности $\nu(A)$:

$$\|\varphi^* - \varphi_m\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\nu(A)} - 1}{\sqrt{\nu(A)} + 1} \right)^m \|\varphi^* - \varphi_0\|_A, \quad (7)$$

где φ^* , φ_m — точное решение и приближение к нему на итерации m .

Пусть $N_x = N_y$ и $N = N_x \cdot N_y$. Из теории разностных схем [22] известно, что $\nu(A) \sim N$. Таким образом, учитывая, что “стоимость” одной итерации метода сопряженных градиентов составляет $O(N)$, общая сложность метода $O(N^2)$. К тому же при большом значении числа обусловленности метод может не сойтись до заданного значения невязки, определяющего критерий останова.

В связи с вышесказанным целесообразно применить предобуславливатель при решении задачи. Основная идея предобуславливателей заключается в том, что вместо решения СЛАУ (6) решается следующая СЛАУ:

$$M^{-1}A\varphi = M^{-1}f, \quad (8)$$

где матрица M — предобуславливатель, который аппроксимирует матрицу A так, что $\nu(M^{-1}A) \ll \nu(A)$ или $\nu(M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}) \ll \nu(A)$. В таком случае, согласно оценке (7), скорость сходимости метода должна существенно увеличиться. Обратим внимание, что в случае применения предобуславливателя необходимо на каждой итерации решать СЛАУ с матрицей M или, что аналогично, действовать матрицей M^{-1} на вектор. Таким образом, несмотря на уменьшение необходимого для сходимости числа итераций, сами итерации станут “дороже”.

На практике популярны предобуславливатели, основанные на неполном LU-разложении с малоранговыми аппроксимациями [12, 24, 25] или основанные на многосеточных методах [14, 15], как геометрических, так и алгебраических. Несмотря на их популярность, эти подходы не лишены недостатков. Так, первый подход требует дополнительной памяти для хранения результатов факторизации матрицы, что может быть критично при решении задач с большим числом неизвестных, а второй — особенно чувствителен к СЛАУ, полученным из аппроксимации задач со сложной внутренней геометрией [16], такой как на рис. 1. Отметим, что также распространен подход, основанный на аппроксимации обратных операторов матричными полиномами [10].

4. Спектральный предобуславливатель. В работе рассматривается предобуславливатель M , полученный из аппроксимации (4), (5) при условии, что $\sigma(x, y) = \text{const}$. Как известно, СЛАУ с такой матрицей может быть эффективно решена спектральным методом, суть которого заключается в последовательном применении БПФ по каждому направлению [26]. Близок по эффективности подход, где, в отличие от предыдущего метода, вместо применения БПФ к последнему направлению решается серия независимых одномерных задач методом прогонки [17]. В работе [20] представлен эффективный подход к применению

спектрального метода для решения уравнения Пуассона в однородной среде с граничными условиями или Дирихле, или Неймана. Однако данный подход несколько затруднителен в применении, если рассматривается задача с комбинацией различных граничных условий, как в нашем случае. По этой причине в работе вместо БПФ рассматривается спектральное разложение одномерных операторов вторых производных с соответствующими граничными условиями и последующее применение ортогональных матриц к соответствующим блокам векторов. Отметим, что такой подход позволяет напрямую решать уравнение Пуассона в случае $\sigma(x, y) = \sigma(x)$ или $\sigma(x, y) = \sigma(y)$, что может сделать предобуславливатель значительно эффективнее [18].

Итак, при предобуславливании необходимо решить СЛАУ следующего вида:

$$Mz = r, \quad (9)$$

где вектор невязки r и искомый вектор z нумеруются так, что быстрый индекс соответствует направлению x , а медленный — направлению y . Представим матрицу M в следующем виде:

$$M = \frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} P & & \\ & \ddots & \\ & & P \end{pmatrix} + \frac{1}{h_y^2} \begin{pmatrix} 2I & -I & & \\ -I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ & & -I & 2I \end{pmatrix},$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

— трехдиагональная матрица, соответствующая второй производной по x с условиями Неймана на границе. Матрица P является симметричной, а потому ее спектральное разложение имеет вид $P = Q\Lambda Q^T$, где матрицы Λ и Q составлены из собственных значений и собственных векторов.

Введем блочно-ортогональную матрицу Θ и связанные с ней векторы:

$$\Theta = \begin{pmatrix} Q & & \\ & \ddots & \\ & & Q \end{pmatrix}, \quad \xi = \Theta^T z, \quad \eta = \Theta^T r.$$

Домножив систему (9) слева на Θ^T и сделав замену вектора $z = \Theta\xi$ получим СЛАУ

$$W\xi = \eta, \quad (10)$$

где

$$W = \frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{h_y^2} \begin{pmatrix} 2I & -I & & \\ -I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ & & -I & 2I \end{pmatrix}.$$

Матрица W является блочно-диагональной с диагональными блоками. Тогда при соответствующей нумерации векторов систему (10) можно представить как серию из $(N_x - 2)$ СЛАУ с трехдиагональными матрицами:

$$\frac{\lambda_i}{h_x^2} \xi_i + \frac{1}{h_y^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \xi_i = \eta_i \quad (11)$$



при $i = 1, \dots, N_x - 2$, где λ_i — собственное значение матрицы P и

$$\xi_i = \left(\xi_{i,1} \quad \xi_{i,2} \quad \dots \quad \xi_{i,N_y-3} \quad \xi_{i,N_y-2} \right)^T, \quad \eta_i = \left(\eta_{i,1} \quad \eta_{i,2} \quad \dots \quad \eta_{i,N_y-3} \quad \eta_{i,N_y-2} \right)^T.$$

Каждую систему (11) можно решить методом прогонки, а решение исходной СЛАУ (9) получить обратной заменой $z = \Theta \xi$.

Утверждение 1. Число обусловленности предобусловленной СЛАУ (8) удовлетворяет неравенству

$$\nu \left(M^{-\frac{1}{2}} A M^{-\frac{1}{2}} \right) \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Доказательство. Напомним, что, согласно постановке задачи, $0 < \sigma_1 \leq \sigma(x, y) \leq \sigma_2 < \infty$. Воспользовавшись теорией кругов Гершгорина [10], получим два неравенства:

$$((A - \sigma_1 M)x, x) \geq 0, \quad ((\sigma_2 M - A)x, x) \geq 0.$$

Отсюда

$$\sigma_1(Mx, x) \leq (Ax, x) \leq \sigma_2(Mx, x),$$

что перепишем в виде

$$\sigma_1 \leq \frac{(Ax, x)}{(Mx, x)} \leq \sigma_2.$$

В последних неравенствах фигурирует обобщенное отношение Рэлея, поэтому можно сделать вывод о том, что собственные значения матрицы $M^{-\frac{1}{2}} A M^{-\frac{1}{2}}$ принадлежат отрезку $[\sigma_1, \sigma_2]$. Таким образом,

$$\nu \left(M^{-\frac{1}{2}} A M^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Утверждение 1 доказано.

Важным выводом из представленной оценки является то, что при применении спектрального предобуславливателя не происходит рост числа итераций, необходимых для сходимости итерационного метода, при измельчении сетки в расчетной области. Таким образом, сложность алгоритма зависит только от сложности одной итерации. Самой дорогой операцией на каждой итерации является решение СЛАУ (10), что в свою очередь требует $O(N)$ арифметических операций для решения систем (11), а также двух умножений на блочно-диагональные плотные матрицы Θ и Θ^T , сложность которых составляет $O(N^{\frac{3}{2}})$.

5. Параллельная версия предобуславливателя.

5.1. Декомпозиция области. Методы декомпозиции расчетной области играют важную роль в численном моделировании при вычислениях на системах с распределенной памятью, поскольку они обеспечивают эффективное распараллеливание вычислений с уменьшением влияния накладных расходов на связь между процессами. Также важным плюсом является то, что декомпозиция области в целом позволяет решать те задачи, требование к объему памяти которых не позволяет решать их на одном расчетном узле. Для решения больших СЛАУ существует множество подходов к декомпозиции области, например, блочные методы, аддитивные и мультипликативные методы, их модификации, а также подходы, основанные на разбиении графа [10].

В работе используется подход, основанный на блочном предобуславливании Якоби и полиномиальной аппроксимации обратных операторов, позволяющий значительно уменьшить число необходимых итераций. В отличие от методов Шварца, эффективность которых существенно зависит от величины перекрытия подобластей, соответствующих отдельным процессам, в предложенном подходе подобласти имеют минимальное перекрытие. Таким образом, при той же доступной памяти метод позволит решать большие с физической точки зрения задачи. Подробное описание построения предобуславливателя представлено ниже и начинается с блочного предобуславливателя Якоби.

5.2. Блочный предобуславливатель Якоби. На рис. 2 а–с представлены возможные способы разбиения области на непересекающиеся подобласти равных размеров. В работе предлагается рассмотреть случаи декомпозиции, где на границах подобластей ставится только условие Дирихле. В дальнейшем отметим, почему был сделан такой выбор.

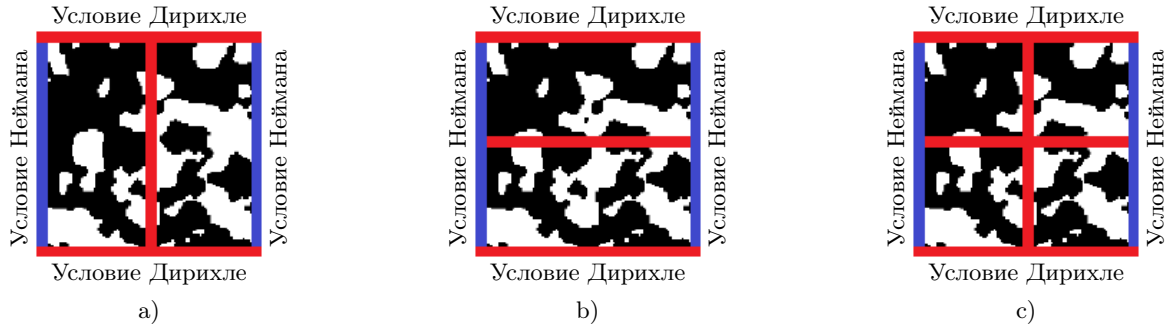


Рис. 2. Примеры декомпозиции области

Fig. 2. Examples of domain decomposition

Напомним, что на каждой итерации метода необходимо решить систему (9). В случае декомпозиции на рис. 2а СЛАУ можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} M_1 & C \\ C^T & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

где векторы z_i и r_i относятся к левой ($i = 1$) и правой ($i = 2$) подобластям.

Матрица C имеет вид

$$C = \frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -I & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и задает связь между подобластями. Матрицы M_i аппроксимируют уравнения Пуассона при $\sigma(x, y) = 1$ с соответствующими граничными условиями.

Блочное предобуславливание Якоби заключается в предположении о том, что внедиагональной матрицей C можно пренебречь. В таком случае при предобуславливании необходимо решить СЛАУ

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

и очевидно, что каждый процесс будет независимо решать систему $M_i z_i = r_i$ спектральным методом, подробно описанным в предыдущем разделе.

Несмотря на отсутствие обменов между процессами, использование блочного предобуславливателя Якоби оказывается недостаточно эффективным на практике. Это связано с тем, что $\|C\| \sim O(N)$ из-за наличия скаляра $\frac{1}{h_x^2}$. Таким образом, с увеличением числа неизвестных N зануление блоков C становится все существеннее.

В связи с вышесказанным в работе предлагается построить операторы, действие которых аппроксимирует действие A^{-1} или M^{-1} . Для дальнейших рассуждений введем обозначения

$$M_D = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, \quad M_C = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3. Аппроксимация A^{-1} . Введем матрицу $R_A = I - \frac{1}{\sigma_2} A M_D^{-1}$. Построим аппроксимацию матрицы A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2} M_D^{-1} M_D A^{-1} = \frac{1}{\sigma_2} M_D^{-1} \left(\frac{1}{\sigma_2} A M_D^{-1} \right)^{-1} = \frac{1}{\sigma_2} M_D^{-1} (I - R_A)^{-1} \approx \frac{1}{\sigma_2} M_D^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^k R_A^i \right),$$

где k — некоторое положительное натуральное число, которое будем называть порядком связи. В данном случае обмен между подобластями происходит при умножении матрицы A на вектор.



Важно отметить, что при построении аппроксимации было использовано свойство матричного ряда Неймана, которое выполняется, если спектральный радиус $\rho(R_A) < 1$.

Утверждение 2. Спектральный радиус матрицы $R_A = I - \frac{1}{\sigma_2} AM_D^{-1}$ меньше 1.

Доказательство. Условие $\rho\left(I - \frac{1}{\sigma_2} AM_D^{-1}\right) < 1$ эквивалентно условию $\rho\left(I - \frac{1}{\sigma_2} M_D^{-\frac{1}{2}} AM_D^{-\frac{1}{2}}\right) < 1$ в случае самосопряженных операторов. Введем матрицу $\tilde{A} = \frac{1}{\sigma_2} M_D^{-\frac{1}{2}} AM_D^{-\frac{1}{2}}$. Для доказательства утверждения необходимо показать, что $\lambda(\tilde{A}) \in (0, 2)$.

Так как A и M_D симметричные и положительно-определенные, заметим, что

$$(\tilde{A}x, x) = \left(\left(\frac{1}{\sigma_2} M_D \right)^{-\frac{1}{2}} A \left(\frac{1}{\sigma_2} M_D \right)^{-\frac{1}{2}} x, x \right) = \left(A \left(\frac{1}{\sigma_2} M_D \right)^{-\frac{1}{2}} x, \left(\frac{1}{\sigma_2} M_D \right)^{-\frac{1}{2}} x \right) = (Ay, y) > 0,$$

где $y = \left(\frac{1}{\sigma_2} M_D \right)^{-\frac{1}{2}} x$. Отсюда следует, что $\tilde{A}$ — положительно определенная матрица, поэтому $\lambda(\tilde{A}) > 0$.

Далее, воспользовавшись теорией кругов Гершгорина, получим:

$$((2\sigma_2 M_D - A)x, x) > 0,$$

откуда следует

$$((2I - \tilde{A})x, x) = \left(\frac{1}{\sigma_2} M_D^{-\frac{1}{2}} (2\sigma_2 M_D - A) M_D^{-\frac{1}{2}} x, x \right) = ((2\sigma_2 M_D - A)x, x) > 0.$$

Таким образом, $\lambda(2I - \tilde{A}) > 0$, что равносильно $\lambda(\tilde{A}) < 2$.

Утверждение 2 доказано.

Обратим внимание на то, что неравенства из предложенного доказательства выполняются благодаря постановке условий Дирихле на границе между подобластями. В случае граничного условия Неймана неравенства, вообще говоря, были бы неверны.

Важно отметить, что предложенная как предобуславливатель аппроксимация матрицы A^{-1} с порядком связи k требует, чтобы действие каждой из матриц Θ и Θ^T на вектор выполнялось $(k+1)$ раз. Из-за этого, несмотря на уменьшение числа итераций на практике, итоговое время вычислений больше, чем в случае применения предобуславливателя Якоби.

5.4. Аппроксимация M^{-1} . Введем матрицу $R_M = I - MM_D^{-1}$. Ниже представлена аппроксимация матрицы M^{-1} :

$$M^{-1} = M_D^{-1} (MM_D^{-1})^{-1} = M_D^{-1} (I - R_M)^{-1} \approx M_D^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^k R_M^i \right).$$

Как и в предыдущем подразделе, необходимо убедиться, что $\rho(R_M) < 1$. Однако это очевидно следует из утверждения 2 и того факта, что матрица M является частным случаем матрицы A с $\sigma(x, y) = 1$.

В отличие от предыдущего подраздела, построение предобуславливателя еще не завершено. Напомним, что $M = M_D + M_C$, а значит $R_M = I - MM_D^{-1} = -M_C M_D^{-1}$. Также напомним, что, как и матрица M , матрица M_D представима в виде $M_D = \tilde{M}_D \Theta^T$, где $\tilde{M}_D$ — блочно-диагональная матрица из систем (11) и

$$\Theta = \left(\begin{array}{c|c} \Theta_1 & 0 \\ \hline 0 & \Theta_2 \end{array} \right),$$

где Θ_1 и Θ_2 — ортогональные матрицы, соответствующие каждой подобласти.

Теперь можно продолжить построение предобуславливателя:

$$M^{-1} \approx \Theta \tilde{M}_D^{-1} \Theta^T \left(I + \sum_{i=1}^k (-M_C \Theta \tilde{M}_D^{-1} \Theta^T)^i \right) = \Theta \tilde{M}_D^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^k (-\tilde{M}_C \tilde{M}_D^{-1})^i \right) \Theta^T,$$

где

$$\tilde{M}_C = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \tilde{C} \\ \hline \tilde{C}^T & 0 \end{array} \right), \quad \tilde{C} = \Theta_1^T C \Theta_2.$$

Итоговая версия предобуславливателя имеет следующий вид:

$$M_k^{-1} = \Theta \tilde{M}_D^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^k (-\tilde{M}_C \tilde{M}_D^{-1})^i \right) \Theta^T. \quad (12)$$

Существенным преимуществом предложенного предобуславливателя является то, что его применение требует по одному умножению матриц Θ и Θ^T на вектор — столько же, сколько и при блочном предобуславливании Якоби. Отметим, что блочный предобуславливатель Якоби совпадает с M_0^{-1} . Напомним, что эти умножения требуют $O(N^{\frac{3}{2}})$ операций и являются самыми дорогими действиями на каждой итерации.

В свою очередь, если k не зависит от N , то оператор $\tilde{M}_D^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^k (-\tilde{M}_C \tilde{M}_D^{-1})^i \right)$ требует всего $O(N)$ операций, хоть и может показаться, что он также требует $O(N^{\frac{3}{2}})$ операций из-за наличия ортогональных матриц Θ_1 и Θ_2 в определении $\tilde{M}_C$.

Покажем, что на практике требуется всего $O(N)$ операций для действия матрицей $\tilde{M}_C$. Для этого рассмотрим матрицу Θ_i подробнее:

$$\Theta_i = \begin{pmatrix} q_{1,1}^i I & q_{1,2}^i I & \dots & q_{1,\tilde{N}_x}^i I \\ q_{2,1}^i I & q_{2,2}^i I & \dots & q_{2,\tilde{N}_x}^i I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{\tilde{N}_x,1}^i I & q_{\tilde{N}_x,2}^i I & \dots & q_{\tilde{N}_x,\tilde{N}_x}^i I \end{pmatrix}.$$

Это блочно-ортогональная матрица, соответствующая спектральному разложению оператора второй производной по направлению x , в случае быстрой индексации векторов в направлении y .

Теперь рассмотрим детальнее матрицу $\tilde{C}$:

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \Theta_1^T C \Theta_2 = \\ &= -\frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} q_{1,1}^1 I & \dots & q_{\tilde{N}_x,1}^1 I \\ q_{1,2}^1 I & \dots & q_{\tilde{N}_x,2}^1 I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1,\tilde{N}_x}^1 I & \dots & q_{\tilde{N}_x,\tilde{N}_x}^1 I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{1,1}^2 I & \dots & q_{1,\tilde{N}_x}^2 I \\ q_{2,1}^2 I & \dots & q_{2,\tilde{N}_x}^2 I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{\tilde{N}_x,1}^2 I & \dots & q_{\tilde{N}_x,\tilde{N}_x}^2 I \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & q_{\tilde{N}_x,1}^1 I \\ 0 & \dots & 0 & q_{\tilde{N}_x,2}^1 I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & q_{\tilde{N}_x,\tilde{N}_x}^1 I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{1,1}^2 I & q_{1,2}^2 I & \dots & q_{1,\tilde{N}_x}^2 I \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Последнее представление матрицы $\tilde{C}$ имеет вид произведения скаляра на три матрицы, каждая из которых при умножении требует не более $O(N)$ арифметических операций. Таким образом, как действие $\tilde{M}_C$, так и действие $\tilde{M}_D^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^k (-\tilde{M}_C \tilde{M}_D^{-1})^i \right)$ на вектор имеет сложность $O(N)$.

Отметим одну важную деталь: все рассуждения были представлены при одномерной декомпозиции по оси x на две подобласти, как на рис. 2 а. Поэтому стоит отметить, что при декомпозиции по оси y выполняется $\Theta_1 = \Theta_2$. Таким образом, $\tilde{M}_C = M_C$, а значит аппроксимация обращения матрицы имеет более простой вид

$$M_k^{-1} = \Theta \tilde{M}_D^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^k (-M_C \tilde{M}_D^{-1})^i \right) \Theta^T,$$

и при действии таким оператором на вектор понадобится меньшее число арифметических операций.

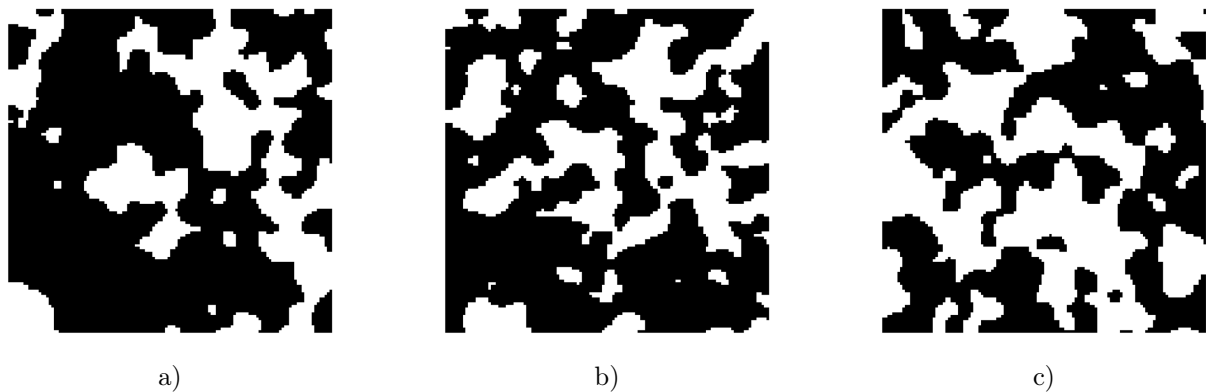


Рис. 3. Примеры сгенерированных двухфазных сред

Fig. 3. Examples of generated two-phase media

6. Численные эксперименты. Численные эксперименты были проведены при решении задачи (1)–(3), где $\sigma(x, y)$ соответствовала одной из нескольких синтетических моделей двухфазных сред, сгенерированных методом усеченного гауссова распределения [27]. Примеры таких сред представлены на рис. 3 а–с.

При создании сред пористость задавалась равной от 30% до 50% с шагом 5%, и для каждого значения пористости было сгенерировано по 10 реализаций моделей. Каждая модель была размером 128×128 пикселей. Проводимость “черной” фазы равнялась $\sigma_2 = 1$ См, а проводимость “белой” фазы выбиралась равной $\sigma_1 = 10^{-1}$ См или $\sigma_1 = 10^{-3}$ См. Для построения моделей большего размера производилось равномерное измельчение сетки.

Критерий остановки метода сопряженных градиентов был задан при достижении значения относительной невязки $\varepsilon = 10^{-8}$.

Как было упомянуто в предыдущем разделе, предобуславливатель, аппроксимирующий исходную матрицу A^{-1} , требует значительно большего числа арифметических операций в сравнении с блочным предобуславливателем Якоби. В связи с этим данный предобуславливатель оказывается совершенно неэффективным и в данном разделе не рассматривается.

Предложенный метод был реализован на языке C++ с использованием MPI. При написании программы были использованы эффективные реализации математических операций линейной алгебры из библиотеки Intel MKL. Представленные в этом разделе численные эксперименты были проведены на кластере “Каскад” Института теплофизики имени С. С. Кутателадзе СО РАН.

6.1. Зависимость числа итераций от количества подобластей и числа неизвестных. В этой серии численных экспериментов исследовалась зависимость числа итераций, необходимых для решения задачи, от числа неизвестных, контраста фаз, типа декомпозиции и порядка связи k .

Пусть I_{DD} — среднее арифметическое (по всем сгенерированным образцам сред) число итераций при использовании предобуславливателя (12). За I_{noDD} обозначим среднее число итераций при использовании спектрального предобуславливателя без декомпозиции области.

На рис. 4–7 представлены графики относительного числа итераций I_{DD}/I_{noDD} в зависимости от порядка связи k при различных значениях параметра фазы σ_1 и количества неизвестных N . Наименование графиков в формате “ $p_x \times p_y$ ” означает тип декомпозиции, где p_x — число подобластей вдоль оси x , а p_y — вдоль оси y .

Предложенное отношение I_{DD}/I_{noDD} является некоторой метрикой того, как M_k^{-1} аппроксимирует M^{-1} . Анализируя графики, можно сделать вывод о том, что на практике аппроксимация действительно происходит, так как отношение I_{DD}/I_{noDD} стремится к 1 с ростом k во всех случаях.

Вполне ожидаемым результатом является то, что с увеличением числа подобластей становится больше относительное число итераций. Это можно объяснить тем, что матрица M_C имеет большее число ненулевых элементов. Стоит отметить, что в среднем “разбивать” область выгоднее при $p_x \geq p_y$.

Нельзя не отметить, что с увеличением N при прочих равных отношение I_{DD}/I_{noDD} существенно растёт, а скорость убывания с ростом k практически не меняется.

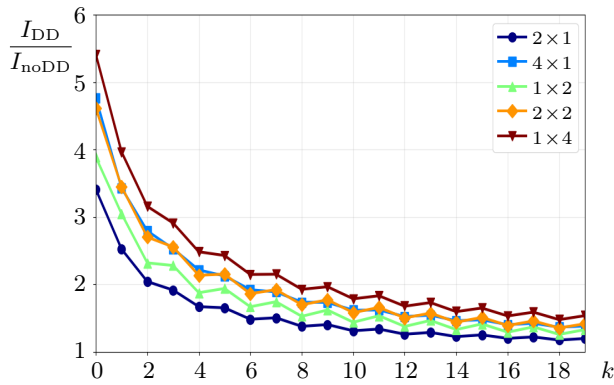


Рис. 4. Зависимость числа итераций от порядка связи при $\sigma_1 = 10^{-1}$ и $N = 128^2$

Fig. 4. Dependence of the number of iterations on the order of communication for $\sigma_1 = 10^{-1}$ and $N = 128^2$

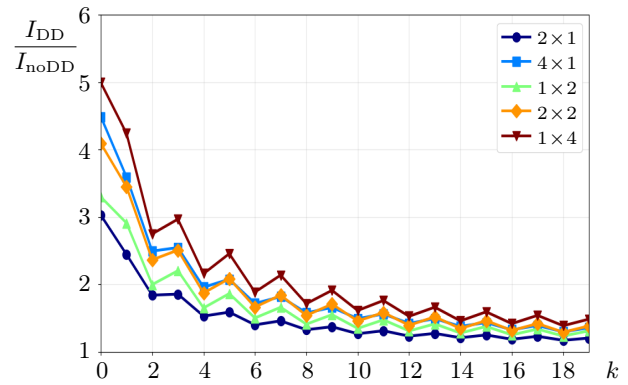


Рис. 5. Зависимость числа итераций от порядка связи при $\sigma_1 = 10^{-3}$ и $N = 128^2$

Fig. 5. Dependence of the number of iterations on the order of communication for $\sigma_1 = 10^{-3}$ and $N = 128^2$

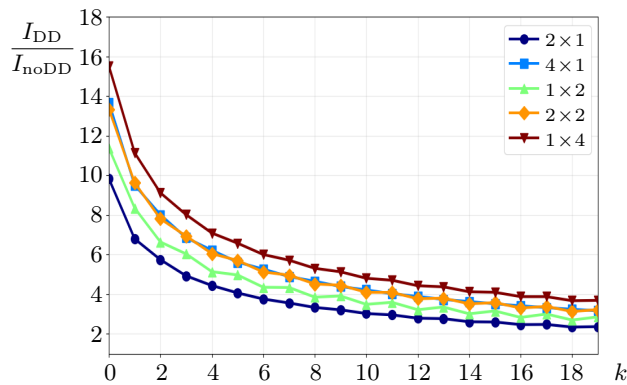


Рис. 6. Зависимость числа итераций от порядка связи при $\sigma_1 = 10^{-1}$ и $N = 1024^2$

Fig. 6. Dependence of the number of iterations on the order of communication for $\sigma_1 = 10^{-1}$ and $N = 1024^2$

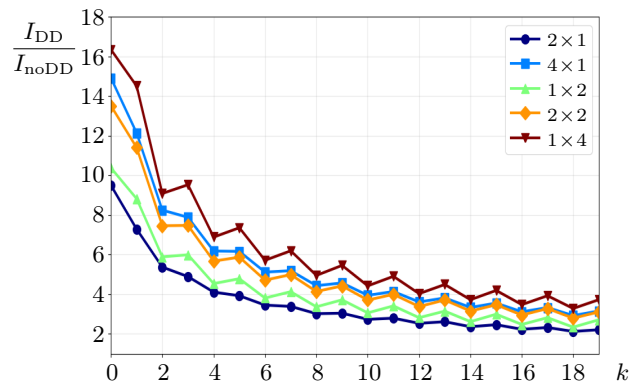


Рис. 7. Зависимость числа итераций от порядка связи при $\sigma_1 = 10^{-3}$ и $N = 1024^2$

Fig. 7. Dependence of the number of iterations on the order of communication for $\sigma_1 = 10^{-3}$ and $N = 1024^2$

6.2. Зависимость времени вычисления от количества подобластей и числа неизвестных.

Для практики более важным показателем является время, затраченное на численное решение задачи. Поэтому вместе с числом итераций рассматривалось итоговое время решения СЛАУ.

По аналогии с предыдущим подразделом введем обозначения T_{noDD} и T_{DD} — итоговое время решения СЛАУ без декомпозиции с использованием M^{-1} и при декомпозиции с использованием M_k^{-1} соответственно.

На рис. 8–11 представлены графики зависимости относительного времени $T_{\text{DD}}/T_{\text{noDD}}$. Как и ранее, наименование графика отражает тип декомпозиции расчетной области.

В отличие от графиков 4–7, графики относительного времени достигают минимума при небольших порядках связи k . Это объясняется тем, что, несмотря на показанное ранее уменьшение числа итераций с ростом k , сами итерации становятся “дороже” из-за увеличения числа арифметических операций и обменов между подобластями при применении M_k^{-1} .

Нельзя не заметить, что при малых значениях k эффективнее оказывается декомпозиция при $p_x \geq p_y$, однако с ростом k большую эффективность показывает одномерная декомпозиция по оси y . Как было

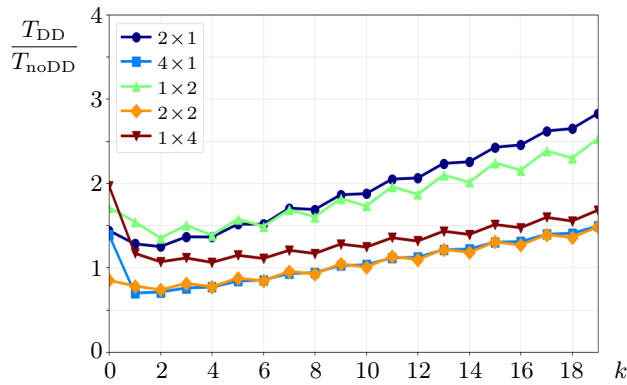


Рис. 8. Зависимость времени вычисления от порядка связи при $\sigma_1 = 10^{-1}$ и $N = 128^2$

Fig. 8. Dependence of the computational time on the order of communication for $\sigma_1 = 10^{-1}$ and $N = 128^2$

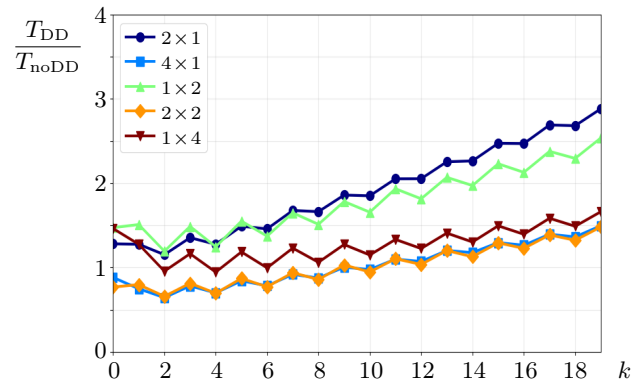


Рис. 9. Зависимость числа итераций от порядка связи при $\sigma_1 = 10^{-3}$ и $N = 128^2$

Fig. 9. Dependence of the number of iterations on the order of communication for $\sigma_1 = 10^{-3}$ and $N = 128^2$

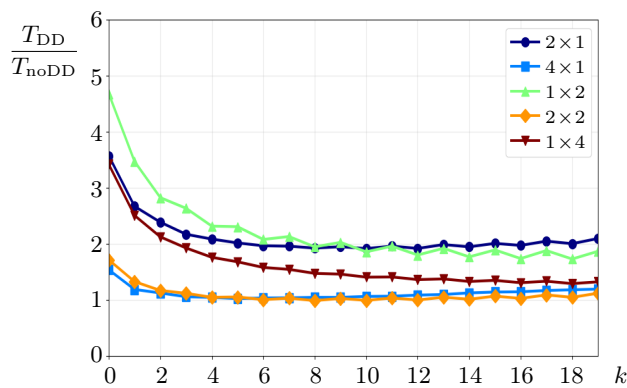


Рис. 10. Зависимость времени вычисления от порядка связи при $\sigma_1 = 10^{-1}$ и $N = 1024^2$

Fig. 10. Dependence of the computational time on the order of communication for $\sigma_1 = 10^{-1}$ and $N = 1024^2$

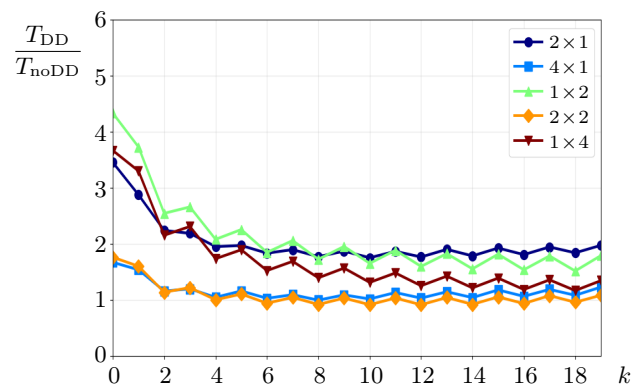


Рис. 11. Зависимость времени вычисления от порядка связи при $\sigma_1 = 10^{-3}$ и $N = 1024^2$

Fig. 11. Dependence of the computational time on the order of communication for $\sigma_1 = 10^{-3}$ and $N = 1024^2$

отмечено в конце раздела 5, при такой декомпозиции действие оператором M_k^{-1} требует меньшего числа арифметических операций, значит итерации становятся относительно “дешевле”.

Осталось отметить, что даже применение M_2^{-1} приводит к заметному уменьшению относительно-го времени в сравнении с M_0^{-1} , который аналогичен блочному предобуславливателю Якоби. Однако при большом числе неизвестных и расчете на четырех процессах MPI время T_{DD} едва достигает времени T_{noDD} без декомпозиции на одном процессе. Таким образом, следует сделать вывод, что применение предложенного предобуславливателя целесообразно при невозможности решения задачи (1)–(3) на одном расчетном узле из-за нехватки памяти.

7. Заключение. Представлено построение и исследование эффективности предобуславливателя для решения уравнения Пуассона в существенно неоднородных средах. Данное уравнение часто возникает в задачах вычислительной физики горных пород, например для оценки эффективной электропроводности или проводимости пористой среды. Важной деталью является то, что представленный предобуславливатель построен для многопроцессорных вычислений с использованием технологий MPI, что критически важно при решении задач с большим числом неизвестных. Алгоритм был реализован с использованием

библиотеки Intel MKL на языке C++ для эффективных математических операций типа “вектор-вектор” и “матрица-вектор”.

Действие предобуславливателя основано на аппроксимации дискретного оператора Лапласа для однородной среды. Основная идея заключается в применении спектрального разложения одномерных операторов производных вдоль одного направления и решении одномерных задач методом прогонки в другом направлении. Предложена модификация на основе матричного ряда Неймана, позволяющая за счет увеличения обменов между подобластями улучшить аппроксимацию оператора Лапласа, что было теоретически доказано и показано в результате численных экспериментов.

Тестирование алгоритма на синтетических образцах горных пород показало, что предложенный подход позволяет существенно сократить число итераций, а также уменьшить итоговое время вычисления в сравнении с методом, где используется блочный предобуславливатель Якоби при той же декомпозиции области. Однако, как было показано в разделе с численными экспериментами, при решении задачи без декомпозиции требуется существенно меньше итераций, даже в сравнении с модифицированным подходом с декомпозицией. Таким образом, предложенный предобуславливатель рекомендуется использовать в случаях, когда численное решение задачи на одном расчетном узле невозможно по причине недостатка оперативной памяти.

Список литературы

1. Andrä H., Combaret N., Dvorkin J., et al. Digital rock physics benchmarks — part II: computing effective properties // Computers and Geosciences. 2013. **50**. 33–43. doi [10.1016/j.cageo.2012.09.008](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2012.09.008).
2. Bazaikin Y., Gurevich B., Iglaue S., et al. Effect of CT image size and resolution on the accuracy of rock property estimates // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2017. **122**, N 5. 3635–3647. doi [10.1002/2016JB013575](https://doi.org/10.1002/2016JB013575).
3. Evstigneev N.M., Ryabkov O.I., Gerke K.M. Stationary Stokes solver for single-phase flow in porous media: A blazingly fast solution based on Algebraic Multigrid Method using GPU // Advances in Water Resources. 2023. **171**. Article Number 104340. doi [10.1016/j.advwatres.2022.104340](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2022.104340).
4. Khachkova T.S., Lisitsa V.V., Gondul E.A., et al. Two-phase flow simulation algorithm for numerical estimation of relative phase permeability curves of porous materials // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2024. **39**, N 4. 209–221. doi [10.1515/rnam-2024-0020](https://doi.org/10.1515/rnam-2024-0020).
5. Li M., Foroughi S., Zhao J., et al. Image-based pore-scale modelling of the effect of wettability on breakthrough capillary pressure in gas diffusion layers // Journal of Power Sources. 2023. **584**, Article Number 233539. doi [10.1016/j.jpowsour.2023.233539](https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2023.233539).
6. Shulakova V., Pervukhina M., Müller T.M., et al. Computational elastic up-scaling of sandstone on the basis of X-ray micro-tomographic images // Geophysical Prospecting. 2012. **61**, N 2. 287–301. doi [10.1111/j.1365-2478.2012.01082.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2012.01082.x).
7. Решетова Г.В., Хачкова Т.С. Численный метод оценки эффективных упругих характеристик горной породы по двумерным и трехмерным цифровым изображениям керна // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**, № 4. 416–433. doi [10.26089/NumMet.v18r435](https://doi.org/10.26089/NumMet.v18r435).
8. Хачкова Т.С., Лисица В.В., Решетова Г.В., Чеверда В.А. Численная оценка удельного электрического сопротивления горных пород по их цифровым изображениям с использованием графических со-процессоров // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**, № 3. 306–318. doi [10.26089/NumMet.v21r326](https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r326).
9. Dorn C., Schneider M. Lippmann–Schwinger solvers for the explicit jump discretization for thermal computational homogenization problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2019. **118**, N 11. 631–653. doi [10.1002/nme.6030](https://doi.org/10.1002/nme.6030).
10. Saad, Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
11. Haber E., Ascher U.M., Aruliah D.A., Oldenburg D.W. Fast simulation of 3D electromagnetic problems using potentials // Journal of Computational Physics. 2000. **163**, N 1. 150–171. doi [10.1006/jcph.2000.6545](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6545).
12. Kostin V., Solov'yev S., Bakulin A., Dmitriev M. Direct frequency-domain 3D acoustic solver with intermediate data compression benchmarked against time-domain modeling for full-waveform inversion applications // Geophysics. 2019. **84**, N 4. 207–219. doi [10.1190/geo2018-0465.1](https://doi.org/10.1190/geo2018-0465.1).
13. Воронин К.В., Соловьев С.А. Решение уравнения Гельмгольца с использованием метода малоранговой аппроксимации в качестве предобуславливателя // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**, № 2. 268–280. doi [10.26089/NumMet.v16r226](https://doi.org/10.26089/NumMet.v16r226).



14. *Johansen H., Colella P.* A Cartesian grid embedded boundary method for Poisson's equation on irregular domains // Journal of Computational Physics. 1998. **147**, N 1. 60–85. doi [10.1006/jcph.1998.5965](https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5965).
15. *Stüben K.* A review of algebraic multigrid // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2001. **128**, N 1–2. 281–309. doi [10.1016/S0377-0427\(00\)00516-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00516-1).
16. *Dick C., Rogowsky M., Westermann R.* Solving the fluid pressure Poisson equation using multigrid—evaluation and improvements // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2015. **22**, N 11. 2480–2492. doi [10.1109/TVCG.2015.2511734](https://doi.org/10.1109/TVCG.2015.2511734).
17. *Khachkova T., Lisitsa V., Reshetova G., Tcheverda V.* GPU-based algorithm for evaluating the electrical resistivity of digital rocks // Computers and Mathematics with Applications. 2021. **82**, N 9. 200–211. doi [10.1016/j.camwa.2020.11.005](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.11.005).
18. *Манаев А.А., Лисица В.В.* Спектральный предобуславливатель для решения уравнения Пуассона // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 2. 111–128. doi [10.26089/NumMet.v26r208](https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r208).
19. *Манаев А.А., Хачкова Т.С., Лисица В.В.* Численный алгоритм оценки параметра пористости образцов горных пород // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 4. 479–501. doi [10.26089/NumMet.v26r432](https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r432).
20. *Hasbestan J.J., Xiao C.N., Senocak I.* PittPack: An open-source Poisson's equation solver for extreme-scale computing with accelerators // Computer Physics Communications. 2020. **254**, N 3. Article Number 107272. doi [10.1016/j.cpc.2020.107272](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107272).
21. *Lisitsa V., Manaev A., Khachkova T., et al.* GPU-oriented numerical algorithm to estimate formation factor of porous materials // Journal of Computational Science. 2026. **96**. Article Number 102829. doi [10.1016/j.jocs.2026.102829](https://doi.org/10.1016/j.jocs.2026.102829).
22. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
23. *Haber E., Ascher U.M.* Fast finite volume simulation of 3D electromagnetic problems with highly discontinuous coefficients // SIAM Journal on Scientific Computing. 2001. **22**, N 6. 1943–1961. doi [10.1137/S1064827599360741](https://doi.org/10.1137/S1064827599360741).
24. *Chandrasekaran S., Dewilde P., Gu M., Somasunderam N.* On the numeral rank of the off-diagonal blocks of Schur complements of discretized elliptic PDEs // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2010. **31**, N 5. 2261–2290. doi [10.1137/090775932](https://doi.org/10.1137/090775932).
25. *Соловьев С.А.* Решение разреженных систем линейных уравнений методом Гаусса с использованием техники аппроксимации матрицами малого ранга // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**, № 3. 441–460.
26. *Pleshkevich A., Vishnevskiy D., Lisitsa V.* Sixth-order accurate pseudo-spectral method for solving one-way wave equation // Applied Mathematics and Computation. 2019. **359**. 34–51. doi [10.1016/j.amc.2019.04.029](https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.04.029).
27. *Hyman J.D., Winter C.L.* Stochastic generation of explicit pore structures by thresholding Gaussian random fields // Journal of Computational Physics. 2014. **277**. 16–31. doi [10.1016/j.jcp.2014.07.046](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.046).

Получена
31 мая 2026 г.

Принята
18 июня 2026 г.

Опубликована
15 июля 2026 г.

Информация об авторах

Алексей Андреевич Манаев — инженер; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Вадим Викторович Лисица — д.ф.-м.н., заведующий лабораторией; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. H. Andrä, N. Combaret, J. Dvorkin, et al., “Digital rock physics benchmarks — part II: Computing effective properties,” Computers and Geosciences. **50**, 33–43 (2013). doi [10.1016/j.cageo.2012.09.008](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2012.09.008).
2. Y. Bazaikin, B. Gurevich, S. Iglaue, et al., “Effect of CT image size and resolution on the accuracy of rock property estimates,” Journal of Geophysical Research: Solid Earth **122** (5), 3635–3647 (2017). doi [10.1002/2016JB013575](https://doi.org/10.1002/2016JB013575).
3. N. M. Evstigneev, O. I. Ryabkov, and K. M. Gerke, “Stationary Stokes solver for single-phase flow in porous media: A blazingly fast solution based on Algebraic Multigrid Method using GPU,” Advances in Water Resources **171**, Article Number 104340 (2023). doi [10.1016/j.advwatres.2022.104340](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2022.104340).

4. T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa, E. A. Gondul, et al., “Two-phase flow simulation algorithm for numerical estimation of relative phase permeability curves of porous materials,” *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling* **39** (4), 209–221 (2024). doi [10.1515/rnam-2024-0020](https://doi.org/10.1515/rnam-2024-0020).
5. M. Li, S. Foroughi, J. Zhao, et al., “Image-based pore-scale modelling of the effect of wettability on breakthrough capillary pressure in gas diffusion layers,” *Journal of Power Sources* **584**, Article Number 233539 (2023). doi [10.1016/j.jpowsour.2023.233539](https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2023.233539).
6. V. Shulakova, M. Pervukhina, T. M. Müller, et al., “Computational elastic up-scaling of sandstone on the basis of X-ray micro-tomographic images,” *Geophysical Prospecting* **61** (2), 287–301 (2012). doi [10.1111/j.1365-2478.2012.01082.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2012.01082.x).
7. G. V. Reshetova and T. S. Khachkova, “A numerical method to estimate the effective elastic moduli of rocks from two- and three-dimensional digital images of rock core samples,” *Numerical Methods and Programming* **18** (4), 416–433 (2017). doi [10.26089/NumMet.v18r435](https://doi.org/10.26089/NumMet.v18r435).
8. T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa, G. V. Reshetova, and V. A. Tcheverda, “Numerical estimation of electrical resistivity in digital rocks using GPUs,” *Numerical Methods and Programming* **21** (3), 306–318 (2020). doi [10.26089/NumMet.v21r326](https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r326).
9. C. Dorn and M. Schneider, “Lippmann-Schwinger solvers for the explicit jump discretization for thermal computational homogenization problems,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **118** (11), 631–653 (2019). doi [10.1002/nme.6030](https://doi.org/10.1002/nme.6030).
10. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003).
11. E. Haber, U. M. Ascher, D. A. Aruliah, and D. W. Oldenburg, “Fast Simulation of 3D Electromagnetic Problems Using Potentials,” *Journal of Computational Physics* **163** (1), 150–171 (2000). doi [10.1006/jcph.2000.6545](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6545).
12. V. Kostin, S. Solovyev, A. Bakulin, and M. Dmitriev, “Direct frequency-domain 3D acoustic solver with intermediate data compression benchmarked against time-domain modeling for full-waveform inversion applications,” *Geophysics* **84** (4), 207–219 (2019). doi [10.1190/geo2018-0465.1](https://doi.org/10.1190/geo2018-0465.1).
13. K. V. Voronin and S. A. Solovyev, “Solution of the Helmholtz problem using the preconditioned low-rank approximation technique,” *Numerical Methods and Programming* **16** (2), 268–280 (2015). doi [10.26089/NumMet.v16r226](https://doi.org/10.26089/NumMet.v16r226).
14. H. Johansen and P. Colella, “A Cartesian Grid Embedded Boundary Method for Poisson’s Equation on Irregular Domains,” *Journal of Computational Physics* **147** (1), 60–85 (1998). doi [10.1006/jcph.1998.5965](https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5965).
15. K. Stüben, “A review of algebraic multigrid,” *Journal of Computational and Applied Mathematics* **128** (1–2), 281–309 (2001). doi [10.1016/S0377-0427\(00\)00516-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00516-1).
16. C. Dick, M. Rogowsky, and R. Westermann, “Solving the Fluid Pressure Poisson Equation Using Multigrid—Evaluation and Improvements,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* **22** (11), 2480–2492 (2015). doi [10.1109/TVCG.2015.2511734](https://doi.org/10.1109/TVCG.2015.2511734).
17. T. Khachkova, V. Lisitsa, G. Reshetova, and V. Tcheverda, “GPU-based algorithm for evaluating the electrical resistivity of digital rocks,” *Computers and Mathematics with Applications* **82** (9), 200–211 (2021). doi [10.1016/j.camwa.2020.11.005](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.11.005).
18. A. A. Manaev and V. V. Lisitsa, “Spectral preconditioner for solving the Poisson equation,” *Numerical Methods and Programming* **26** (2), 111–128 (2025). doi [10.26089/NumMet.v26r208](https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r208).
19. A. A. Manaev, T. S. Khachkova, and V. V. Lisitsa, “Numerical algorithm to estimate formation factor of digital rocks,” *Numerical Methods and Programming* **26** (4), 479–501 (2025). doi [10.26089/NumMet.v26r432](https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r432).
20. J. J. Hasbestan, C. N. Xiao, and I. Senocak, “PittPack: An open-source Poisson’s equation solver for extreme-scale computing with accelerators,” *Computer Physics Communications* **254** (3), Article Number 107272 (2020). doi [10.1016/j.cpc.2020.107272](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107272).
21. V. Lisitsa, A. Manaev, T. Khachkova, et al., “GPU-oriented numerical algorithm to estimate formation factor of porous materials,” *Journal of Computational Science* **96**, Article Number 102829 (2026). doi [10.1016/j.jocs.2026.102829](https://doi.org/10.1016/j.jocs.2026.102829).
22. A. A. Samarskii, *The theory of difference schemes* (CRC Press, 2001; Nauka, Moscow, 1983).
23. E. Haber and U. M. Ascher, “Fast finite volume simulation of 3D electromagnetic problems with highly discontinuous coefficients,” *SIAM Journal on Scientific Computing* **22** (6), 1943–1961 (2001). doi [10.1137/S1064827599360741](https://doi.org/10.1137/S1064827599360741).
24. S. Chandrasekaran, P. Dewilde, M. Gu, and N. Somasunderam, “On the Numeral Rank of the Off-Diagonal Blocks of Schur Complements of Discretized Elliptic PDEs,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **31** (5), 2261–2290 (2010). doi [10.1137/090775932](https://doi.org/10.1137/090775932).
25. S. A. Solovyev, “Application of the low-rank approximation technique in the Gauss elimination method for sparse linear systems,” *Numerical Methods and Programming* **15** (3), 441–460 (2014). <https://www.mathnet.ru/eng/vmp263>. Cited July 09, 2026.



26. A. Pleshkevich, D. Vishnevskiy, and V. Lisitsa, “Sixth-order accurate pseudo-spectral method for solving one-way wave equation,” *Applied Mathematics and Computation* **359**, 34–51 (2019). doi [10.1016/j.amc.2019.04.029](https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.04.029).
27. J. D. Hyman and C. L. Winter, “Stochastic generation of explicit pore structures by thresholding Gaussian random fields,” *Journal of Computational Physics* **277**, 16–31 (2014). doi [10.1016/j.jcp.2014.07.046](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.046).

Received
May 31, 2026

Accepted
June 18, 2026

Published
July 15, 2026

Information about the authors

Aleksei A. Manaev — Engineer; Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.

Vadim V. Lisitsa — Dr. Sci., Head of Laboratory; Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.