УДК 517.956.223

**ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ**

Ю. П. Горьков¹

Построено фундаментальное решение параболического уравнения $u_{yy} - \text{Sgn } y |y|^p u_x = 0$.

Ключевые слова: параболическое уравнение, фундаментальное решение, краевая задача, интегральные уравнения, единственность решения.

Введение. Цель настоящей работы — построение фундаментального решения уравнения

$$u_{yy} - \text{Sgn } y |y|^p u_x = 0 \quad (1)$$

и использование его для получения явного решения краевой задачи

$$u_{yy} - \text{Sgn } y |y|^p u_x = f(x, y), \quad (x, y) \in R_2^+, \quad (2)$$

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad y \geq 0; \quad (3)$$

$R_2^+ = \{x, y : x > 0, -\infty < y < \infty\}$, $p > 0$. В работе [1] построено явное решение задачи (2), (3) при $f = 0$; в работе [2] построено явное решение этой же задачи при $p = 1$.

Пусть выполнены условия:

1) $\sup_{x, y} |f(x, y)| < \infty, \quad (x, y) \in R_2^+;$

2) $f(x, y) \in C^{\alpha, \beta}(R_2^+), \quad \frac{1}{q} < \alpha, \quad 0 < \beta, \quad q = p + 2;$

3) $\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |f(x, y)|(x^2 + y^2) dx dy < \infty;$

4) $\varphi(y)$ — непрерывная функция, $|\varphi(y)| \leq C_0(1 + y^\delta)$, где $C_0 > 0$ и $0 \leq \delta < 1/2$.

Под решением задачи (2), (3) будем понимать непрерывную в $\overline{R_2^+}$ функцию $u(x, y)$, имеющую непрерывные в R_2^+ производные u_x, u_y, u_{yy} , удовлетворяющую в R_2^+ уравнению (2) и удовлетворяющую условию (3).

1. Построение фундаментального решения. Сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Из представления решения задачи (2), (3), полученного в [1] для случая $f = 0$, следует, что

$$u(0, y) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \times \int_0^\infty (|y|t)^{1/2} K_{1/q}(|y|^{q/2}t) \frac{q}{4 \cos^2(\pi/2q)} t^{1/2} \left[\int_0^\infty \lambda^{p+1/2} \varphi(\lambda) [\mathbf{J}_{1/q}(\lambda^{q/2}t) + \mathbf{J}_{-1/q}(\lambda^{q/2}t)] d\lambda \right] dt, \quad (4)$$

где $\mathbf{J}_\nu(z)$ — функция Ангера порядка ν и $y \leq 0$. После несложных вычислений, основанных на представлениях $K_{1/q}(z)$ и $\mathbf{J}_\nu(z)$ (см. [3]), равенство (4) приводится к виду

$$u(0, y) = \frac{q}{\pi} \sin \frac{\pi}{2q} \int_0^\infty \frac{\tau^{q-3/2}}{\tau^q + 1} \varphi(|y|\tau) d\tau, \quad y \leq 0.$$

Замечание 2. Если $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция, то функция

$$\omega(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}} y \int_{-\infty}^x f(t) \exp\left(-\frac{y^q}{q^2(x-t)}\right) \frac{1}{(x-t)^{1+1/q}} dt$$

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

удовлетворяет в области $\mathbb{R}_2^+ = \{x, y : -\infty < x < \infty, y > 0\}$ уравнению $u_{yy} - \text{Sgn } y |y|^p u_x = 0$ и условию $u(x, 0) = f(x)$ [1].

Замечание 3. Функция

$$E(x, y, \eta) = \frac{1}{2q} \frac{|y\eta|^{1/2}}{x} \exp\left(-\frac{|y|^q + |\eta|^q}{q^2 x}\right) \left[I_{-1/q}\left(\frac{2|y\eta|^{q/2}}{q^2 y}\right) + \text{Sgn } y \text{Sgn } \eta I_{1/q}\left(\frac{2|y\eta|^{q/2}}{q^2 x}\right) \right] H(x)$$

($H(x)$ — функция Хевисайда) является фундаментальным решением уравнения

$$u_{yy} - |y|^p u_x = 0. \tag{5}$$

При ограниченной непрерывной функции $f(y)$ функция $v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} |\eta|^p E(x, y, \eta) f(\eta) d\eta$ удовлетворяет уравнению (5) и условию $v(0, y) = f(y); (x, y) \in \mathbb{R}_2^+$ [4].

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Система уравнений

$$\begin{aligned} \mu(y) &= \frac{q}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2q}\right) \sqrt{|y|} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{q-3/2}}{\tau^q + |y|^q} [\psi(\tau) + \eta^{2-q} \delta(\tau - \eta)] d\tau, \quad y < 0, \\ \psi(y) &= \frac{q}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2q}\right) \sqrt{y} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{q-3/2}}{\tau^q + y^q} \mu(-\tau) d\tau, \quad y > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

имеет решение

$$\mu(y) = \frac{q}{2\pi} \text{tg} \frac{\pi}{2q} \frac{|y| + \eta}{|y|^q + \eta^q}, \quad y < 0; \quad \psi(y) = \frac{q}{2\pi} \text{tg} \frac{\pi}{2q} \frac{y - \eta}{y^q - \eta^q}, \quad y > 0,$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака и $\eta > 0$.

Лемма 2. Интегральные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{q}{2\pi} \text{tg} \frac{\pi}{2q} \frac{\gamma - y}{\gamma^q - y^q} &= \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}} y \int_0^{\infty} f_1(\gamma t^{1/q}) \exp\left(-\frac{y^q}{q^2} t\right) dt, \quad y > 0, \\ \frac{q}{2\pi} \text{tg} \frac{\pi}{2q} \frac{\gamma + |y|}{\gamma^q + |y|^q} &= \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}} |y| \int_0^{\infty} f_2(\gamma t^{1/q}) \exp\left(-\frac{|y|^q}{q^2} t\right) dt, \quad y < 0 \end{aligned}$$

имеют при $\gamma > 0$ следующие решения:

$$\begin{aligned} f_1(\gamma) &= \frac{q^{2/q}}{2\pi^2} \Gamma(1/q) \text{tg} \frac{\pi}{2q} \sin \frac{\pi}{q} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi^q + 1} \exp\left(-\frac{\gamma^q}{q^2 \xi^q}\right) d\xi, \\ f_2(\gamma) &= \frac{1}{2\pi} \Gamma(1/q) \text{tg} \frac{\pi}{2q} q^{2/q-1} \left[\exp\left(-\frac{\gamma^q}{q^2}\right) + \frac{2q}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\gamma^q}{q^2 \xi^q}\right) \frac{1}{\xi^{2q} + 1} \left(\cos \frac{\pi}{2q} + \sin \frac{\pi}{2q} \xi^q \right) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Чтобы убедиться в справедливости лемм, достаточно функции $\mu(y), \psi(y), f_1(\gamma), f_2(\gamma)$ подставить в соответствующие уравнения и вычислить интегралы.

Обратимся теперь к непосредственному построению фундаментального решения. Положим для $y > 0, \gamma > 0, -\infty < x < \infty$

$$v(x, y, \gamma) = \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}} y \int_{-\infty}^x E(t, 0, \gamma) \exp\left(-\frac{y^q}{q^2(x-t)}\right) \frac{1}{(x-t)^{1+1/q}} dt.$$

Согласно замечанию 2 функция v удовлетворяет условию $v(x, 0, \gamma) = E(x, 0, \gamma)$ и уравнению (1) при $(x, y) \in \mathbb{R}_2^+$. Заметим, что

$$E(x, 0, \gamma) = \frac{q^{2/q-1}x^{1/q}}{2^{1+1/q}\Gamma(1-1/q)} \exp\left(-\frac{\gamma^q}{q^2x}\right), \quad x > 0, \quad \gamma > 0.$$

Обозначим $w(x, y, \gamma) = E(x, y, \gamma) - v(x, y, \gamma)$, $(x, y) \in \mathbb{R}_2^+$, $\gamma > 0$. Согласно замечанию 3 функция w удовлетворяет уравнению

$$w_{yy} - \text{Sgn } y |y|^p w_x = -\delta(x)\delta(y - \gamma), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_2^+, \quad \gamma > 0,$$

и условию $w(x, 0, \gamma) = 0$, $-\infty < x < \infty$. Учитывая вид уравнения (1), естественно предположить, что искомое фундаментальное решение $\Phi(x, y, \xi, \eta)$ удовлетворяет следующим тождествам:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, 0, \eta) &= \frac{1}{|x|^{1-1/q}} \Phi\left(\text{Sgn } x, \frac{y}{|x|^{1/q}}, 0, \frac{\eta}{|x|^{1/q}}\right), \\ \Phi(x, y, 0, \eta) &= \frac{1}{|y|^{q-1}} \Phi\left(\frac{x}{|y|^q}, \text{Sgn } y, 0, \frac{\eta}{|y|}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Естественно также предположить, что $\Phi(0, y, 0, \eta)$ удовлетворяет системе уравнений (6). Согласно лемме 1 это означает, что при $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \Phi(0, y, 0, \eta) &= \frac{q}{2\pi} \text{tg} \frac{\pi}{2q} \frac{|y| + \eta}{|y|^q + \eta^q}, \quad y < 0, \\ \Phi(0-, y, 0, \eta) &= \frac{q}{2\pi} \text{tg} \frac{\pi}{2q} \frac{y - \eta}{y^q - \eta^q}, \quad y > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Можно также предположить, что при $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, 0, \gamma) &= \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}} y \int_{-\infty}^x \Phi(t, 0, 0, \gamma) \exp\left(-\frac{y^q}{q^2(x-t)}\right) \frac{1}{(x-t)^{1+1/q}} dt \quad \text{при } x < 0, \quad y > 0, \\ \Phi(x, y, 0, \gamma) &= \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}} |y| \int_x^{\infty} \Phi(t, 0, 0, \gamma) \exp\left(-\frac{|y|^q}{q^2(t-x)}\right) \frac{1}{(t-x)^{1+1/q}} dt \quad \text{при } x > 0, \quad y < 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда из соотношений (7) – (9) и леммы 2 следует, что при $\gamma > 0$

$$\Phi(-1, 0, 0, \gamma) = f_1(\gamma), \quad \Phi(1, 0, 0, \gamma) = f_2(\gamma).$$

Последние равенства тождественны следующим равенствам: при $x > 0$

$$\Phi(x, 0, 0, \gamma) = \frac{1}{2\pi x^{1-1/q}} \Gamma(1/q) \text{tg} \frac{\pi}{2q} q^{2/q-1} \left[\exp\left(-\frac{\gamma^q}{q^2x}\right) + \frac{2q}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \frac{\gamma^q}{q^2x\xi^q} \frac{1}{\xi^{2q} + 1} \left\{ \cos \frac{\pi}{2q} + \sin \frac{\pi}{2q} \xi^q \right\} d\xi \right]$$

и при $x < 0$

$$\Phi(x, 0, 0, \gamma) = \frac{q^{2/q}}{2\pi^2|x|^{1-1/q}} \Gamma(1/q) \text{tg} \frac{\pi}{2q} \sin \frac{\pi}{q} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi^q + 1} \exp\left(-\frac{\gamma^q}{q^2|x|\xi^q}\right) d\xi.$$

Положим

$$\begin{aligned} \Phi_+(x, y, \gamma) &= \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}} y \int_{-\infty}^x \Phi(t, 0, 0, \gamma) \exp\left(-\frac{y^q}{q^2(x-t)}\right) \frac{1}{(x-t)^{1+1/q}} dt, \quad \text{при } (x, y) \in \mathbb{R}_2^+, \\ \Phi_-(x, y, \gamma) &= \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}} |y| \int_x^{\infty} \Phi(t, 0, 0, \gamma) \exp\left(-\frac{|y|^q}{q^2(t-x)}\right) \frac{1}{(t-x)^{1+1/q}} dt, \quad \text{при } (x, y) \in \mathbb{R}_2^-. \end{aligned}$$

Функции Φ_+ и Φ_- удовлетворяют уравнению (1) (каждая в своей области определения) и при $\gamma > 0$ и $-\infty < x < \infty$ имеем $\Phi_+(x, 0, \gamma) = \Phi_-(x, 0, \gamma)$. Полагая

$$\Phi(x, y, \xi, \gamma) = \begin{cases} \Phi_+(x - \xi, y, \gamma) + w(x - \xi, y, \gamma), & (x, y) \in \mathbb{R}_2^+, \\ \Phi_-(x - \xi, y, \gamma), & (x, y) \in \mathbb{R}_2^-, \end{cases}$$

получим функцию, непрерывную при $(x, y) \neq (\xi, \gamma)$, имеющую непрерывные производные $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_{yy}$ (при $(x, y) \neq (\xi, \gamma)$) и удовлетворяющую уравнению

$$\Phi_{yy} - \text{Sgn } y |y|^p \Phi_x = -\delta(x - \xi)\delta(y - \gamma).$$

Построение фундаментального решения при $\gamma \leq 0$ проводится аналогично. Функция $\Phi(x, y, \xi, \gamma)$ с указанными выше производными стремится к нулю при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ (при ограниченных значениях ξ и γ). Асимптотика фундаментального решения $\Phi(x, y, \xi, \gamma)$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ и при $p = 1$ построена в работе [5]. Построение асимптотики фундаментального решения при произвольном p проводится аналогично.

2. Представление решения краевой задачи. Пусть $\Phi^*(x, y, \xi, \eta)$ означает фундаментальное решение сопряженного уравнения

$$u_{yy} + \text{Sgn } y |y|^p u_x = -\delta(x - \xi)\delta(y - \eta).$$

Поскольку функция

$$z(x, y) = - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) \Phi(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta$$

удовлетворяет уравнению (2) и условию 4) (при $x = 0$), то решение задачи (2), (3) достаточно выписать при $f = 0$.

Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2) при $f = 0$ и граничному условию $u(0, y) = \varphi(y)$ при $y \geq 0$. Интегрируя обе части тождества $(u_{yy} - \text{Sgn } y |y|^p u_x) \Phi^*(x, y, \xi, \eta) = 0$ по области $x > 0, -\infty < y < \infty$, получим равенство

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\infty y^p u(0, y) \Phi^*(0, y, \xi, \eta) dy - \int_{-\infty}^0 |y|^p u(0, y) \Phi^*(0, y, \xi, \eta) dy. \tag{10}$$

Учитывая замечание 1, равенство (10) представим в виде

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\infty y^p \varphi(y) \Phi^*(0, y, \xi, \eta) dy - \int_{-\infty}^0 |y|^p \Phi^*(0, y, \xi, \eta) \left[\frac{q}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2q}\right) \int_0^\infty \frac{\tau^{q-3/2}}{\tau^q + 1} \varphi(\tau|y|) d\tau \right] dy.$$

Полагая

$$G(\xi, \eta, y) = \Phi^*(0, y, \xi, \eta) - \frac{q}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2q}\right) \int_0^\infty \frac{\tau^{q-3/2}}{\tau^q + 1} \Phi^*(0, -\tau y, \xi, \eta) d\tau,$$

приходим к равенству $u(\xi, \eta) = \int_0^\infty y^p \varphi(y) G(\xi, \eta, y) dy$.

Теорема. Пусть выполнены условия 1)–4). В классе функций, растущих при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ не быстрее, чем $M(x^{\delta/3} + |y|^\delta)$, где M – постоянная и $0 \leq \delta < 1/2$, решение задачи (2), (3) единственно и имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^\infty \gamma^p \varphi(\gamma) G(x, y, \gamma) d\gamma + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) \left[\int_0^\infty \gamma^p \Phi(0, \gamma, \xi, \eta) G(x, y, \gamma) d\gamma \right] d\xi d\eta. \tag{11}$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству представления решения задачи (2), (3) при $p = 1$ [2].

Представлению (11) можно придать другой вид, если воспользоваться тождеством $\Phi_*(\xi, \eta, x, y) = \Phi(x, y, \xi, \eta)$. Доказательство тождества проводится стандартным приемом с использованием формулы Грина [6]. Учитывая специфику уравнения (2), область интегрирования по переменным μ и σ очевидным образом меняется. Продолжение фундаментальных решений по переменным μ и σ (при переходе к полярной системе координат) осуществляется согласно явным представлениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pagani C.* On the parabolic equation $\text{Sgn}(x)|x|^p u_y - u_{xx} = 0$ and a related one // *Annali di matematica pura ed applicata*. 1974. **IV**, N IC. 333–399.
2. *Горьков Ю.П.* Формула решения одной краевой задачи для стационарного уравнения броуновского движения // Доклады АН СССР. 1974. **223**, № 3. 525–528.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. II. М.: Наука, 1974.
4. *Gevrey M.* Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique // *Jornal de Mathematique*. 1914. Chap. IV, V. 105–137.
5. *Горьков Ю.П.* О поведении решения одной краевой задачи для стационарного уравнения броуновского движения // Труды института математики и механики УНЦ АН СССР. 1979. Вып. 28. 73–80.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

Поступила в редакцию
21.01.2005