



doi 10.26089/NumMet.v27r440

УДК 519.63; 517.958

Разностная схема, аппроксимирующая смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто–Фабрицио по времени

К. Р. Кадиев

Дагестанский государственный университет, Махачкала, Российская Федерация

ORCID: 0009-0002-2951-8578, e-mail: kadiyev_2023@mail.ru

Аннотация: В последнее время для описания различных физических процессов в средах с нестандартной структурой широко используется дробно-дифференциальное исчисление. В связи с этим большое внимание уделяется задачам для уравнений в частных производных дробного порядка, которые являются обобщением уравнений целого порядка. Капуто и Фабрицио предложили новую производную дробного порядка без сингулярного ядра, которая обладает полезными свойствами для моделирования во многих областях науки. В данной работе исследована начально-краевая задача в прямоугольнике для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто–Фабрицио по времени. Построена неявная разностная схема для численного решения этой задачи. С помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка для решения задачи в разностной форме. Эти неравенства обеспечивают устойчивость схемы, единственность решения и его непрерывную зависимость от входных данных. Доказана сходимость решения разностной схемы к решению исходной задачи. Проведенный вычислительный эксперимент подтвердил достоверность теоретических результатов.

Ключевые слова: производная дробного порядка, уравнение теплопроводности, разностная схема, устойчивость разностной схемы.

Для цитирования: Кадиев К.Р. Разностная схема, аппроксимирующая смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто–Фабрицио по времени // Вычислительные методы и программирование. 2026. 27, № 4. 651–665. doi 10.26089/NumMet.v27r440.

A difference scheme approximating a mixed boundary value problem for the heat equation with the Caputo–Fabrizio fractional time derivative

Kurbanmagomed R. Kadiyev

Dagestan State University, Makhachkala, Russia

ORCID: 0009-0002-2951-8578, e-mail: kadiyev_2023@mail.ru

Abstract: In recent years, fractional-differential calculus has been widely used to describe various physical processes in media with non-standard structures. In this regard, considerable attention is given to problems for partial differential equations of fractional order, which are a generalization of integer-order equations. Caputo and Fabrizio proposed a new fractional derivative without a singular kernel, which has useful properties for modeling in many scientific fields. In this paper, an initial-boundary value problem in a rectangular domain for the heat equation with the Caputo–Fabrizio fractional time derivative is investigated. An implicit difference scheme is constructed for the numerical solution of this problem. Using the method of energy inequalities, an a priori estimate for the solution is obtained. These inequalities ensure the stability of the scheme, the uniqueness of the solution and its continuous dependence on the input data. The convergence of the difference scheme to the solution of the original problem is proved. The conducted computational experiment confirmed the validity of the theoretical results.

Keywords: fractional order derivative, heat equation, difference scheme, stability of difference scheme.

For citation: K. R. Kadiyev, "A difference scheme approximating a mixed boundary value problem for the heat equation with the Caputo–Fabrizio fractional time derivative," Numerical Methods and Programming, 27 (4), 651–665 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r440

1. Введение. Дифференциальные уравнения дробного порядка находят множество применений в современных исследованиях теоретической физики, механики и прикладной математики [1, 2]. Дробное математическое исчисление является основным инструментом для описания физических систем, которые обладают памятью и нелокальностью [3, 4]. Процесс теплопроводности в средах с нестандартной структурой (полимеры, сыпучие и пористые материалы, композиционные материалы, а также среды с фрактальной и хаотической структурой) описывается с помощью различных модификаций дифференциального уравнения теплопроводности с различными производными дробного порядка [5, 6]. Вопрос исследования и разработки методов решения такого рода задач является актуальным, поскольку означает качественно новый уровень в моделировании вышеуказанных процессов. В настоящее время существуют как аналитические, так и численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка [7, 8]. Поиск решения с помощью аналитических методов возможен лишь в некоторых частных случаях и представляет собой сложный и трудоемкий процесс [9, 10]. Поэтому целесообразно использовать численные методы, которые дают решение с определенной погрешностью [11, 12].

В последнее десятилетие многие физические задачи моделировались с использованием концепции производной нецелого порядка. К производным дробного порядка относятся, в частности, производные Римана–Лиувилля, Капуто и Капуто–Фабрицио [13]. В литературе можно найти множество аналитических подходов к решению дифференциальных уравнений дробного порядка [1, 2, 4, 6, 11, 14]. Многие из этих методов применимы лишь к линейным дифференциальным уравнениям дробного порядка. Однако большинство дифференциальных уравнений дробного порядка, описывающих реальные задачи, очень сложны и не всегда поддаются решению аналитическими методами [15, 16]. В силу наличия начальных и граничных условий, а также исходных данных в различных задачах для этих уравнений поиск их анали-

тического решения оказывается затруднительным или невозможным, поэтому исследователи во многих случаях прибегают к численным методам [17].

Численные методы для решения дифференциальных уравнений дробного порядка существенно различаются в зависимости от того, как устроена производная дробного порядка [3, 5, 7, 9, 10]. Приближенное представление производной дробного порядка имеет гораздо более сложную формулу по сравнению с производной целочисленного порядка, поскольку дробные производные являются нелокальными, и поэтому для вычисления в конкретной точке требуется знание функции за пределами окрестности, близкой к рассматриваемой точке. По этой причине для построения конечно-разностных аппроксимаций производных дробного порядка требуется учет значений функции в точках, число которых определяется расстоянием до границы рассматриваемой области [7, 9, 10].

Одно из недавних определений производной дробного порядка было предложено Капуто и Фабрицио [13], которые продемонстрировали, что введенная ими производная обладает рядом преимуществ по сравнению с ранее известными определениями. Например, они показали, что при помощи данной производной можно описывать неоднородности вещества и конфигурации, характеризующиеся разными масштабами, что не всегда удается сделать в рамках известных локальных теорий или теорий с использованием классических дробных производных. Еще одно применение состоит в возможности исследования макроскопического поведения некоторых материалов, связанного с нелокальным характером межатомных взаимодействий, которые, как известно, важны для изучения свойств материалов.

В заключение этого раздела дадим определения дробных производных Капуто и Капуто–Фабрицио.

Определение 1. Производная Капуто дробного порядка α для n раз непрерывно дифференцируемой функции $f(t)$, $t \geq 0$, где $n - 1 < \alpha \leq n$, определяется равенством:

$${}_0^C D_t^\alpha (f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{n - \alpha - 1} \frac{d^n}{ds^n} (f(s)) ds.$$

Определение 2. Пусть функция $f(t)$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, T]$, т.е. $f \in C^1[0, T]$. Тогда новая производная Капуто дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$ (производная Капуто–Фабрицио) определяется следующим образом [13]:

$${}_0^{CF} D_t^\alpha (f(t)) = \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} \int_0^t f'(s) \exp\left(-\alpha \frac{t - s}{1 - \alpha}\right) ds, \quad (1)$$

где $M(\alpha)$ — нормирующая функция, удовлетворяющая условию $M(0) = M(1) = 1$.

Замечание 1. Если $f(t) \notin C^1[0, T]$, но $f \in C[0, T]$, то производную Капуто–Фабрицио можно определить как

$${}_0^{CF} D_t^\alpha (f(t)) = \frac{\alpha M(\alpha)}{1 - \alpha} \int_a^t (f(t) - f(s)) \exp\left(-\alpha \frac{t - s}{1 - \alpha}\right) ds.$$

2. Приближения для производных. В этом разделе сначала рассмотрим численные приближения производной Капуто–Фабрицио (1) по времени [13].

Для некоторого натурального числа N шаг по времени для метода конечных разностей определим как $\tau = T/N$. Узлы сетки на отрезке $[0, T]$ обозначим как $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

Дискретное приближение производной Капуто–Фабрицио дробного порядка в точке t_n можно получить, следуя работе [14]. Для этого интеграл в правой части выражения (1) сначала запишем в виде суммы интегралов:

$${}_0^{CF} D_t^\alpha (f(t_n)) = \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(s) \exp\left(-\alpha \frac{t_n - s}{1 - \alpha}\right) ds. \quad (2)$$

Используя приближение первого порядка для производной функции в точке, из (2) получим:

$${}_0^{CF} D_t^\alpha (f(t_n)) = \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{\tau} + O(\tau) \right) \exp\left(-\alpha \frac{t_n - s}{1 - \alpha}\right) ds. \quad (3)$$

После интегрирования (3) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} {}_0^{\text{CF}}D_t^\alpha(f(t_n)) &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{j=1}^n \left(\frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{\tau} + O(\tau) \right) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \exp\left(-\alpha \frac{t_n - s}{1-\alpha}\right) ds = \\ &= \frac{M(\alpha)}{\alpha} \sum_{j=1}^n \left(\frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{\tau} + O(\tau) \right) d_{j,\tau}, \end{aligned}$$

где

$$d_{j,\tau} = \exp\left(-\alpha \frac{\tau}{1-\alpha}(n-j)\right) - \exp\left(-\alpha \frac{\tau}{1-\alpha}(n-j+1)\right).$$

Следовательно, справедлива приближенная формула

$${}_0^{\text{CF}}D_t^\alpha(f(t_n)) = \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left(f(t_j) - f(t_{j-1}) \right) d_{j,\tau} + \frac{M(\alpha)}{\alpha} \sum_{j=1}^n d_{j,\tau} O(\tau).$$

Лемма 1. Пусть функция $f(t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, T]$, т.е. $f \in C^2[0, T]$. Тогда аппроксимация первого порядка производной Капуто–Фабрицио (1) в точке t_n определяется следующим выражением [14]:

$${}_0^{\text{CF}}D_t^\alpha(f(t_n)) = \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left(f(t_j) - f(t_{j-1}) \right) d_{j,\tau} + O(\tau). \quad (4)$$

Итак, аппроксимация первого порядка для вычисления производной Капуто–Фабрицио по времени на всем отрезке выглядит следующим образом:

$${}_0^{\text{CF}}D_t^\alpha(f(t_n)) \approx \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left(f^j - f^{j-1} \right) d_{j,\tau},$$

где $f^j = f(t_j)$.

Замечание 2. Аналогичную формулу первого порядка для аппроксимации производной Капуто–Фабрицио по времени на всем отрезке можно получить, если сначала применить простую квадратурную формулу правых прямоугольников к интегралам в правой части равенства (1), а затем заменить производную функции в точке разностным соотношением. В этом случае в предыдущей формуле вместо $d_{j,\tau}$ будет $\exp(-\alpha(n-j)\tau)$.

Теперь рассмотрим численную аппроксимацию второго порядка точности для производной второго порядка по пространственной переменной [18].

Для некоторого положительного целого числа M шаг по пространственной переменной для метода конечных разностей определим как $h = X/M$. Узлы сетки на отрезке $[0, X]$ обозначим как $x_m = hm$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$.

Рассмотрим численное приближение производной $(a(x)f'(x))'$ в точке x_m . Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $f \in C^4[0, X]$ и $a \in C^2[0, X]$. Тогда аппроксимацию второго порядка точности производной $(a(x)f'(x))'$ в точке x_m определяет следующая формула [18]:

$$(a(x)f'(x))' \Big|_{x_m} = \frac{a(x_m + h/2)(f(x_{m+1}) - f(x_m)) - a(x_m - h/2)(f(x_m) - f(x_{m-1})))}{h^2} + O(h^2). \quad (5)$$

3. Неявная разностная схема, аппроксимирующая начально-краевую задачу. В прямоугольной области $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T\}$ рассматривается следующая задача

$$\begin{aligned} {}_0^{\text{CF}}D_t^\alpha(u(x, t)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) + f_0(x, t), \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad 0 \leq x \leq X, \\ u(0, t) &= f_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(X, t) &= f_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (6)$$



где $a(x, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по первому и непрерывная по второму аргументу функция в области D , $a(x, t) \geq 0$ в области D , $f_0(x, t)$ — непрерывная функция в области D , $f_1(x)$ — непрерывная функция на отрезке $0 \leq x \leq X$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ — непрерывные функции на $0 \leq t \leq T$.

В области D введем равномерную сетку с шагом h по переменной x и шагом τ по переменной t :

$$\begin{aligned}\omega_{h\tau} &= \{(x_m, t_n) : x_m = mh, m = 0, 1, 2, \dots, M, t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N\}, \\ \omega_h &= \{x_m : x_m = mh, m = 0, 1, 2, \dots, M\}, \\ \omega_\tau &= \{t_n : t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N\},\end{aligned}$$

где M, N — некоторые натуральные числа, $h = X/M$, $\tau = T/N$.

Запишем задачу (6) в виде $L(u) = f$. Для этого достаточно положить

$$L(u) \equiv \begin{cases} {}_0^{\text{CF}} D_t^\alpha(u(x, t)) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right), & 0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0), & 0 \leq x \leq X, \\ u(0, t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(X, t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

$$f \equiv \begin{cases} f_0(x, t), & 0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T, \\ f_1(x), & 0 \leq x \leq X, \\ f_2(t), & 0 \leq t \leq T, \\ f_3(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Обозначим через $u(x_m, t_n)$ точное значение решения задачи $L(u) = f$ в узле (x_m, t_n) сетки $\omega_{h\tau}$, а через u_m^n — соответствующее приближенное сеточное значение для $u(x_m, t_n)$. Сеточные функции на $\omega_{h\tau}$, составленные из приближенных сеточных значений для решения задачи $L(u) = f$ и из сеточных значений для решения этой же задачи, обозначим через u^h и $\tilde{u}^h$ соответственно.

Аппроксимируем задачу $L(u) = f$ разностной схемой. Имеем

$$L(u) \Big|_{(x_m, t_n)} \equiv \begin{cases} {}_0^{\text{CF}} D_t^\alpha(u(x, t)) \Big|_{(x_m, t_n)} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) \Big|_{(x_m, t_n)}, \\ u(x, 0) \Big|_{(x_m, t_n)}, \\ u(0, t) \Big|_{(x_m, t_n)}, \\ u(X, t) \Big|_{(x_m, t_n)}, \\ m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

$$f \Big|_{(x_m, t_n)} \equiv \begin{cases} f_0(x, t) \Big|_{(x_m, t_n)}, \\ f_1(x) \Big|_{(x_m, t_n)}, \\ f_2(t) \Big|_{(x_m, t_n)}, \\ f_3(t) \Big|_{(x_m, t_n)}, \\ m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Для замены ${}_0^{\text{CF}} D_t^\alpha(u(x, t)) \Big|_{(x_m, t_n)}$ и $\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) \Big|_{(x_m, t_n)}$ разностными соотношениями вос-

пользуемся формулами (4) и (5) соответственно. Получаем

$$L(u) \Big|_{(x_m, t_n)} \equiv \begin{cases} \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left(u(x_m, t_j) - u(x_m, t_{j-1}) \right) d_{j,\tau} + O(\tau) - \\ \frac{a_{m+1/2}^n (u(x_{m+1}, t_n) - u(x_m, t_n)) - a_{m-1/2}^n (u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n))}{h^2} + O(h^2), \\ m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ u(x_m, t_0), \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \\ u(x_0, t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \\ u(x_M, t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь и далее $a_{m\pm 1/2}^n = a(x_m \pm h/2, t_n)$ [18].

Введем следующие обозначения: $(f_0)_m^n = f_0(x_m, t_n)$, $m = 1, 2, \dots, M-1$, $n = 1, 2, \dots, N$; $(f_1)_m = f_1(x_m)$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$; $(f_2)^n = f_2(t_n)$ и $(f_3)^n = f_3(t_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Далее будем полагать, что

$$f^h \equiv \begin{cases} (f_0)_m^n, & m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ (f_1)_m, & m = 0, 1, 2, \dots, M, \\ (f_2)^n, & n = 0, 1, 2, \dots, N, \\ (f_3)^n, & n = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (8)$$

Теперь на основе формул (7) и (8) можно записать разностную схему для задачи $L(u) = f$ в виде

$$L^{(h)}(u^h) = f^h, \quad (9)$$

где разностный оператор $L^{(h)}$ определяется по правилу

$$L^{(h)}(u^h) \equiv \begin{cases} \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left(u_m^j - u_m^{j-1} \right) d_{j,\tau} - \frac{a_{m+1/2}^n (u_{m+1}^n - u_m^n) - a_{m-1/2}^n (u_m^n - u_{m-1}^n)}{h^2}, \\ m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ u_m^0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \\ u_0^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \\ u_M^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Заметим, что разностная схема (9) является неявной разностной схемой [18]. Порядок аппроксимации разностной схемы (9) задачи (6) равен $O(\tau) + O(h^2)$.

4. Устойчивость разностной схемы. В этом разделе мы остановимся на анализе устойчивости неявной разностной схемы (9) [18].

Сначала приведем соотношения, которым удовлетворяют коэффициенты $d_{j,\tau}$, возникающие при аппроксимации производной Капуто–Фабрицио.

Лемма 3. Коэффициенты $d_{j,\tau}$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $d_{j,\tau} > 0$, $j = 1, \dots, n+1$;
- 2) $d_{j,\tau} > d_{j+1,\tau}$, $j = 1, \dots, n$;
- 3) $\sum_{j=1}^n d_{j,\tau} = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha\tau n}{1-\alpha}\right)$.

Доказательство. Неравенства 1) и 2) следуют из положительности и возрастания экспоненциальной функции. Соотношение 3) получается непосредственным суммированием.

Для анализа устойчивости нам потребуется дискретная формула интегрирования по частям (формула суммирования по частям). Рассмотрим сеточные функции, заданные на равномерной сетке $\omega_h = \{x_m = mh, m = 0, 1, \dots, M\}$.

Лемма 4 (Формула суммирования по частям). Для любых сеточных функций y_m и v_m , определенных на ω_h , справедливо тождество

$$\sum_{m=1}^{M-1} y_m(v_{m+1} - v_m) = - \sum_{m=1}^{M-1} v_m(y_{m+1} - y_m) + y_{M-1}v_M - y_0v_1. \quad (10)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M-1} y_m(v_{m+1} - v_m) &= \sum_{m=1}^{M-1} y_mv_{m+1} - \sum_{m=1}^{M-1} y_mv_m = \sum_{m=2}^M y_{m-1}v_m - \sum_{m=1}^{M-1} y_mv_m \\ &= - \sum_{m=1}^{M-1} v_m(y_m - y_{m-1}) + y_{M-1}v_M - y_0v_1. \end{aligned}$$

Это и есть искомая формула.

Отметим, что формула (10) является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям в непрерывном случае.

Из формулы суммирования по частям можно получить разностный аналог первой формулы Грина, которая играет ключевую роль при выводе энергетических неравенств.

Замечание 3 (Первая разностная формула Грина). Пусть $a_{m+1/2}$ — сеточная функция, определенная в полупеллах узлах. Подставляя $y_m = z_m$ и $v_m = a_{m+1/2}(z_{m+1} - z_m)/h$ в (10), получаем после умножения на $1/h$:

$$- \sum_{m=1}^{M-1} z_m((az_x)_x)_m h = \sum_{m=1}^{M-1} a_{m+1/2}(z_{x,m})^2 h - \frac{a_{M-1/2}}{h} z_{M-1}z_M + \frac{a_{1/2}}{h} z_1z_0,$$

$$\text{где } z_{x,m} = \frac{z_{m+1} - z_m}{h}, \quad (az_x)_x = \frac{a_{m+1/2}(z_{m+1} - z_m) - a_{m-1/2}(z_m - z_{m-1})}{h^2}.$$

В дальнейшем нам также понадобится следующий частный случай формулы суммирования по частям, записанный в удобной для наших целей форме.

Лемма 5. Для любых последовательностей $\{w_m\}$, $\{w_{m+1/2}\}$, $\{w_{m-1/2}\}$, $m = 1, 2, \dots, M-1$ справедлива дискретная формула интегрирования по частям [18]

$$\sum_{m=1}^{M-1} v_m(w_{m+1/2} - w_{m-1/2}) = v_{M-1}w_{M-1/2} - v_1w_{1/2} - \sum_{m=1}^{M-1} w_{m+1/2}(v_{m+1} - v_m). \quad (11)$$

Исследуем устойчивость разностной схемы (9) с помощью метода энергетических неравенств [18].

Введем скалярное произведение и сеточную энергетическую норму:

$$(v, w) = h \sum_{m=1}^{M-1} v_m w_m, \quad \|u^n\|^2 = (u^n, u^n) = h \sum_{m=1}^{M-1} |u_m^n|^2.$$

Теорема 1. Разностная схема (9) безусловно устойчива [18].

Доказательство. Домножим разностное уравнение

$$\frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left(u_m^j - u_m^{j-1} \right) d_{j,\tau} = \frac{a_{m+1/2}^n (u_{m+1}^n - u_m^n) - a_{m-1/2}^n (u_m^n - u_{m-1}^n)}{h^2} + (f_0)_m^n$$

на $u_m^n h$ и просуммируем по m от 1 до $M-1$. В итоге получим следующее равенство:

$$\frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left((u^j - u^{j-1}, u^n) \right) d_{j,\tau} = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{M-1} u_m^n (q_{m+1/2}^n - q_{m-1/2}^n) + ((f_0)^n, u^n),$$

$$\text{где } q_i^n = \frac{a_i^n (u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n)}{h}.$$

Для дальнейшего преобразования предыдущей формулы воспользуемся дискретной формулой интегрирования по частям (11) для первого слагаемого в правой части этой формулы [18]. В итоге получим

$$\frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left((u^j - u^{j-1}, u^n) \right) d_{j,\tau} = \frac{1}{h} (u_{M-1}^n q_{M-1/2}^n - u_1^n q_{1/2}^n) - \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{M-2} q_{m+1/2}^n (u_{m+1}^n - u_m^n) + ((f_0)^n, u^n).$$

Используя определение для q_i^n , предыдущее равенство запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left((u^j - u^{j-1}, u^n) \right) d_{j,\tau} &= \frac{a_{M-1/2}^n}{h^2} \left(u_{M-1}^n (f_3)^n - (u_{M-1}^n)^2 \right) - \\ &\frac{a_{1/2}^n}{h^2} \left((u_1^n)^2 - u_1^n (f_2)^n \right) - \frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{M-1} a_{m+1/2}^n (u_{m+1}^n - u_m^n)^2 + ((f_0)^n, u^n). \end{aligned} \quad (12)$$

В силу неотрицательности выражений $\frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{M-1} a_{m+1/2}^n (u_{m+1}^n - u_m^n)^2$, $\frac{a_{M-1/2}^n}{h^2} (u_{M-1}^n)^2$, $\frac{a_{1/2}^n}{h^2} (u_1^n)^2$, а также справедливости формулы (12), выполняется следующее неравенство:

$$\frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left((u^j - u^{j-1}, u^n) \right) d_{j,\tau} \leq \frac{a_{M-1/2}^n}{h^2} u_{M-1}^n (f_3)^n + \frac{a_{1/2}^n}{h^2} u_1^n (f_2)^n + ((f_0)^n, u^n). \quad (13)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left((u^j - u^{j-1}, u^n) \right) d_{j,\tau} &= \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n (u^j, u^n) d_{j,\tau} - \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n (u^{j-1}, u^n) d_{j,\tau} = \\ &\frac{M(\alpha) d_{n,\tau}}{\alpha\tau} \|u^n\|^2 + \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n-1} (u^j, u^n) d_{j,\tau} - \frac{M(\alpha) d_{1,\tau}}{\alpha\tau} (u^0, u^n) - \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n-1} (u^j, u^n) d_{j+1,\tau} = \\ &\frac{M(\alpha) d_{n,\tau}}{\alpha\tau} \|u^n\|^2 + \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n-1} (u^j, u^n) (d_{j,\tau} - d_{j+1,\tau}) - \frac{M(\alpha) d_{1,\tau}}{\alpha\tau} (u^0, u^n). \end{aligned} \quad (14)$$

Из равенства (14), неравенства (13) и положительности $d_{n,\tau}$ (в силу Леммы 3) следует, что

$$\begin{aligned} \|u^n\|^2 &\leq -\frac{1}{d_{n,\tau}} \sum_{j=1}^{n-1} (u^j, u^n) (d_{j,\tau} - d_{j+1,\tau}) + \frac{d_{1,\tau}}{d_{n,\tau}} (u^0, u^n) + \\ &\frac{a_{M-1/2}^n \alpha\tau}{h^2 M(\alpha) d_{n,\tau}} u_{M-1}^n (f_3)^n + \frac{a_{1/2}^n \alpha\tau}{h^2 M(\alpha) d_{n,\tau}} u_1^n (f_2)^n + \frac{\alpha\tau}{M(\alpha) d_{n,\tau}} ((f_0)^n, u^n). \end{aligned} \quad (15)$$

В дальнейшем будем пользоваться неравенством Юнга [19]: для любых векторов a, b справедливо неравенство: $(a, b) \leq \frac{\varepsilon \|a\|^2}{2} + \frac{\|b\|^2}{2\varepsilon}$, где ε — некоторое положительное число.

Используя неравенство Юнга, из (15) получаем

$$\|u^n\|^2 \leq \varepsilon C_1 \|u^n\|^2 + C_2 \sum_{j=1}^{n-1} |d_{j,\tau} - d_{j+1,\tau}| \|u^j\|^2 + C_3 \|f_1\|^2 + C_4 ((f_2)^n)^2 + C_5 ((f_3)^n)^2 + C_6 \|(f_0)^n\|^2, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{где } C_1 &= \frac{\sum_{j=1}^{n-1} |d_{j,\tau} - d_{j+1,\tau}|}{2d_{n,\tau}} + \frac{d_{1,\tau}}{2d_{n,\tau}} + \frac{a_{M-1/2}^n \alpha\tau}{2h^2 M(\alpha) d_{n,\tau}} + \frac{a_{1/2}^n \alpha\tau}{2h^2 M(\alpha) d_{n,\tau}} + \frac{\alpha\tau}{2M(\alpha) d_{n,\tau}}, \quad C_2 = \frac{1}{2\varepsilon d_{n,\tau}}, \\ C_3 &= \frac{d_{1,\tau}}{2\varepsilon d_{n,\tau}}, \quad C_4 = \frac{a_{M-1/2}^n \alpha\tau}{2\varepsilon h^2 M(\alpha) d_{n,\tau}}, \quad C_5 = \frac{a_{1/2}^n \alpha\tau}{2\varepsilon h^2 M(\alpha) d_{n,\tau}}, \quad C_6 = \frac{\alpha\tau}{2\varepsilon M(\alpha) d_{n,\tau}}. \end{aligned}$$

Выбирая ε так, чтобы $\varepsilon C_1 < 1$, из неравенства (16) получаем

$$\|u^n\|^2 \leq C \sum_{j=1}^{n-1} |d_{j,\tau} - d_{j+1,\tau}| \|u^j\|^2 + C \left(\|f_1\|^2 + \tilde{f}_2 + \tilde{f}_3 + \tilde{f}_0 \right), \quad (17)$$



где $C = \max \left\{ \frac{C_i}{1 - \varepsilon C_1}, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$; $\tilde{f}_i = \max \{((f_i)^n)^2, n = 0, 1, \dots, N\}$, $i = 2, 3$; $\tilde{f}_0 = \max \{\|(f_0)^n\|^2, n = 0, 1, \dots, N\}$.

Используем теперь неравенство Гронуолла [20]: если для $\lambda_n \geq 0$, $b_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n-1$, $a \geq 0$ выполняется неравенство $\lambda_n \leq a + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \lambda_j$, то справедливо неравенство $\lambda_n \leq a \exp \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j \right)$.

Из (17) в силу неравенства Гронуолла следует

$$\|u^n\|^2 \leq C \left(\|f_1\|^2 + \tilde{f}_2 + \tilde{f}_3 + \tilde{f}_0 \right) \exp \left(C \sum_{j=1}^{n-1} |d_{j,\tau} - d_{j+1,\tau}| \right),$$

что означает непрерывную зависимость приближенного решения начально-краевой задачи (6) от начального и граничных условий. Следовательно, разностная схема (9) безусловно устойчива [18].

5. Сходимость разностной схемы. Обозначим через R_m^n погрешность приближенного решения в точке (x_m, t_n) , т.е. $R_m^n = u(x_m, t_n) - u_m^n$, где $m = 0, 1, 2, \dots, M$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ [18]. Для сеточной функции $\tilde{u}^h$, построенной по точному решению $u(x, t)$ задачи (6), имеем $L^{(h)}(\tilde{u}^h) = f^h + \delta f^h$, где по аналогии с (8) запишем δf^h в виде

$$\delta f^h \equiv \begin{cases} O(\tau) + O(h^2), & m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ 0, & m = 0, 1, 2, \dots, M, \\ 0, & n = 0, 1, 2, \dots, N, \\ 0, & n = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Вычитая из равенства $L^{(h)}(\tilde{u}^h) = f^h + \delta f^h$ равенство (9), получим $L^{(h)}(R^h) = \delta f^h$ — разностную схему для погрешности приближенного решения. Выполняя те же этапы, что при доказательстве теоремы об устойчивости в разделе 4, находим

$$\|R^n\|^2 \leq C(\tau + h^2),$$

где C — некоторое положительное число. Таким образом, неявная разностная схема (9) является сходящейся, причем сходимость имеет место со скоростью первого порядка по τ и второго порядка по h в выбранной сеточной норме [18].

6. Вычислительный эксперимент. Для анализа разностной схемы (9) рассмотрим в прямоугольной области $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ следующую модельную задачу:

$$\begin{aligned} {}_0^{\text{CF}} D_t^\alpha(u(x, t)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left((xt) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) + \frac{M(\alpha)}{\alpha} \left(1 - \exp \left(-\frac{\alpha t}{1 - \alpha} \right) \right) - (\cos x - \sin x)t + (\cos x + \sin x)xt, \\ u(x, 0) &= \sin x + \cos x + 4, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= t + 5, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u(1, t) &= t + \sin 1 + \cos 1 + 4, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что задача (18) является частным случаем задачи (6) с $X = 1$, $T = 1$, $a(x, t) = xt$, $f_0(x, t) = \frac{M(\alpha)}{\alpha} \left(1 - \exp \left(-\frac{\alpha t}{1 - \alpha} \right) \right) - (\cos x - \sin x)t + (\cos x + \sin x)xt$, $f_1(x) = \sin x + \cos x + 4$, $f_2(t) = t + 5$, $f_3(t) = t + \sin 1 + \cos 1 + 4$.

Поскольку ${}_0^{\text{CF}} D_t^\alpha(t) = \frac{M(\alpha)}{\alpha} \left(1 - \exp \left(-\frac{\alpha t}{1 - \alpha} \right) \right)$, нетрудно убедиться в том, что функция $u(x, t) = t + \sin x + \cos x + 4$ является точным решением задачи (18) [13].

Перейдем к нахождению приближенного решения задачи (18): будем решать систему (9), соответствующую этой задаче, и сравнивать полученное решение с точным в узлах сетки. Систему (9), соответ-

ствующую задаче (18), запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} g_m^n u_{m-1}^n - c_m^n u_m^n + b_m^n u_{m+1}^n &= (f)_m^n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \\ u_m^0 &= (f_1)_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \\ u_0^n &= (f_2)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \\ u_M^n &= (f_3)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{где } c_m^n = -\left(\frac{h^2 M(\alpha) d_{n,\tau}}{\alpha \tau} + a_{m-1/2}^n + a_{m+1/2}^n\right), (f)_m^n = -\left(h^2 (f_0)_m^n - \frac{h^2 M(\alpha)}{\alpha \tau} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (u_m^j - u_m^{j-1}) d_{j,\tau} - u_m^{n-1} d_{n,\tau}\right)\right), \\ g_m^n = a_{m-1/2}^n, b_m^n = a_{m+1/2}^n.$$

Для каждого фиксированного $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ система (19) является трехдиагональной. Зафиксируем $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ и, используя метод прогонки, найдем решение u_m^n трехдиагональной системы при $m = 0, 1, 2, \dots, M$ [18].

Алгоритм приближенного решения задачи (18).

1. Входные данные: $T, X, N, M, \alpha, M(\alpha), a(x, t) = xt, f_0(x, t) = \frac{M(\alpha)}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha t}{1 - \alpha}\right)\right) - (\cos x - \sin x)t + (\cos x + \sin x)xt, f_1(x) = \sin x + \cos x + 4, f_2(t) = t + 5, f_3(t) = t + \sin 1 + \cos 1 + 4.$
2. Определяем: $\tau = 1/N, h = 1/M; u_m^0 = f_1(mh), m = 0, \dots, M; u_0^n = f_2(n\tau), n = 1, \dots, N; u_M^n = f_3(n\tau), n = 1, \dots, N.$
3. Для $n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \text{а) находим } d_{j,\tau} &= \exp\left(-\alpha \frac{\tau}{1 - \alpha} (n - j)\right) - \exp\left(-\alpha \frac{\tau}{1 - \alpha} (n - j + 1)\right), j = 1, \dots, n; g_m^n = a((m - 1/2)h, n\tau), \\ c_m^n &= \frac{h^2 M(\alpha) d_{n,\tau}}{\alpha \tau} + a((m - 1/2)h, n\tau) + a((m + 1/2)h, n\tau), b_m^n = a((m + 1/2)h, n\tau), \\ (f)_m^n &= -\left(h^2 f_0(mh, n\tau) - \frac{h^2 M(\alpha)}{\alpha \tau} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (u_m^j - u_m^{j-1}) d_{j,\tau} - u_m^{n-1} d_{n,\tau}\right)\right), m = 1, \dots, M-1; \end{aligned}$$

б) вычисляем коэффициенты для метода прогонки по следующим формулам [18]

$$\begin{aligned} z_0^n &= 0, \quad v_0^n = u_0^n, \\ z_{i+1}^n &= \frac{b_{i+1}^n}{c_{i+1}^n - z_i^n g_{i+1}^n}, \quad v_{i+1}^n = \frac{g_{i+1}^n v_i^n - f_{i+1}^n}{c_{i+1}^n - z_i^n g_{i+1}^n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1; \end{aligned}$$

с) вычисляем приближенное решение задачи (18) по формуле

$$u_{M-j}^n = z_{M-j}^n u_{M-j+1}^n + v_{M-j}^n \quad \text{при } j = 1, \dots, M-1.$$

4. Находим значения точного решения в узлах сетки:

$$u_{m,n}^{\text{exact}} = n\tau + \sin(mh) + \cos(mh) + 4, \quad m = 0, \dots, M, \quad n = 0, \dots, N.$$

5. Находим погрешность $r = \max |u_{m,n}^{\text{exact}} - u_m^n|$ приближенного решения при $n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M-1.$
6. Для фиксированного $n \in \{0, \dots, N\}$ строим графики приближенного u_m^n и точного решения $u_{m,n}^{\text{exact}}$ при $m = 0, \dots, M.$

7. Численные результаты и оценка вычислительной эффективности. Для верификации предложенной разностной схемы был проведен вычислительный эксперимент на модельной задаче с известным точным решением $u(x, t) = t + \sin x + \cos x + 4$ [13]. Расчеты выполнены на последовательности пространственно-временных сеток с соотношением $N = M^2$, где число узлов по пространству M изменялось от 10 до 200, а N соответственно — от 100 до 40 000. Во всех экспериментах параметры задавались равными $\alpha = 0.5, T = 1, X = 1$, а в качестве времени визуализации выбран момент $t = 0.3$.



Время счета определялось как полное время выполнения процедуры численного решения на заданной сетке, включая инициализацию данных, прогонку по времени и вычисление глобальной погрешности. Измерение проводилось с использованием функции `time()` из стандартной библиотеки языка Python. Таким образом, зафиксированное значение отражает реальное (wall-clock) время одного запуска алгоритма.

Для количественной оценки эмпирического порядка сходимости использовалась классическая логарифмическая формула:

$$p_i = \frac{\ln E_i - \ln E_{i-1}}{\ln h_i - \ln h_{i-1}},$$

где E_i — максимальная погрешность на сетке с пространственным шагом h_i . Учитывая, что $\tau = h^2$ (поскольку $N = M^2$ и $T = X = 1$), получаем следующую эквивалентную формулу:

$$p_i = \frac{\ln(E_{i-1}/E_i)}{\ln(M_i/M_{i-1})}.$$

На рис. 1 представлено сравнение точного и приближенного решений при $t = 0.3$ на сетке с $M = 100$ и $N = 10\,000$. Приближенное решение отображено в 7 узлах $x_i = i/7, i = 0, \dots, 6$, рядом с которыми указаны локальные погрешности. Глобальная погрешность на этой сетке равна $2.838 \cdot 10^{-6}$, что подтверждает высокую точность метода даже при умеренном числе узлов.

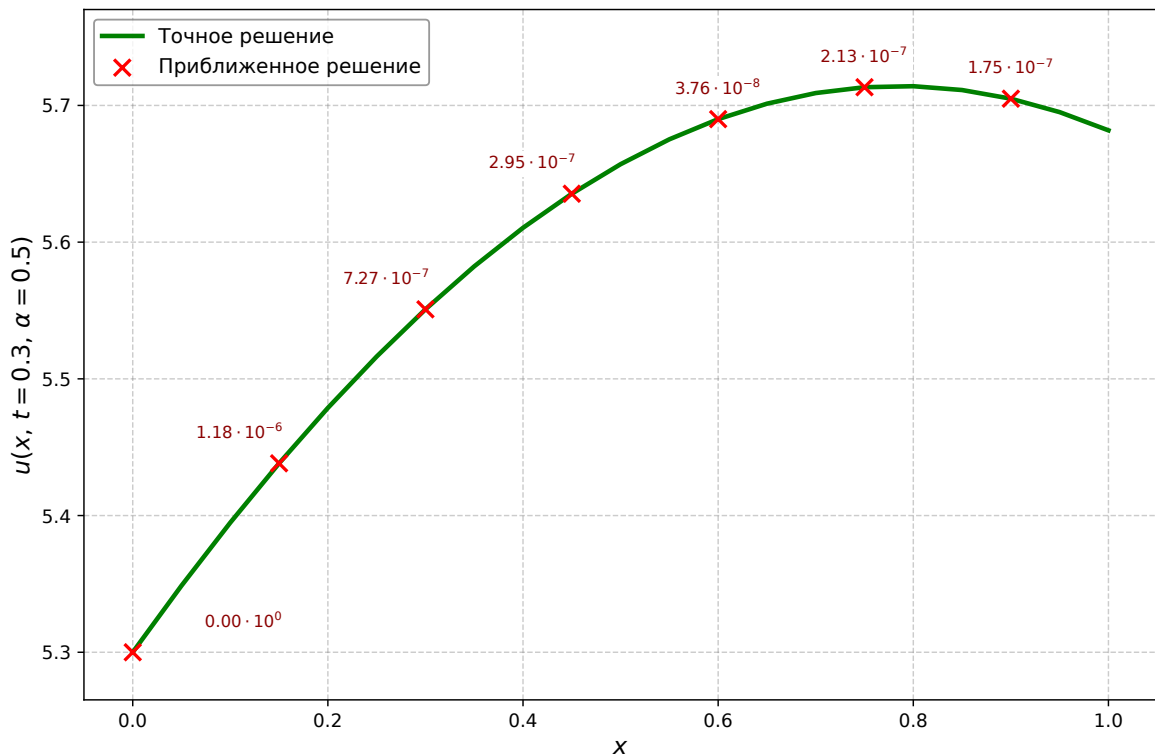


Рис. 1. Сравнение точного и приближенного решения при $t = 0.3$ и $\alpha = 0.5$

Fig. 1. Comparison of the exact and approximate solutions at $t = 0.3$ and $\alpha = 0.5$

Результаты вычислительного эксперимента, проведенного на последовательности сеток с соотношением $N = M^2$ ($M = 10, 20, \dots, 200$), приведены в табл. 1. Как видно из таблицы, при измельчении сетки максимальная погрешность монотонно убывает с $2.274 \cdot 10^{-4}$ до $7.585 \cdot 10^{-7}$ (более чем в 300 раз).

Результаты расчета порядка сходимости также приведены в табл. 1. Эмпирический порядок p_i устойчиво стремится к значению 1.904, что находится в полном согласии с теоретической оценкой $O(\tau) + O(h^2)$. Результаты в табл. 1 наглядно демонстрируют, что эмпирический порядок действительно стабилен и не зависит от конкретной процедуры измельчения, пока сохраняется соотношение $\tau \sim h^2$. В этом случае суммарная погрешность убывает как $O(h^2)$ или как $O(M^{-2})$.

Таблица 1. Оценка эмпирического порядка сходимости разностной схемы при $\tau = h^2$

Table 1. Estimation of the empirical convergence order of the difference scheme with $\tau = h^2$

M	N	h	τ	Ошибка E Error E	Эмпирический порядок сходимости p Empirical convergence order p	Время счета, с Computation time, s
10	100	0.100000	0.010000	$2.274 \cdot 10^{-4}$	—	0.014
20	400	0.050000	0.002500	$6.077 \cdot 10^{-5}$	1.9038	0.092
30	900	0.033333	0.001111	$2.809 \cdot 10^{-5}$	1.9032	0.315
40	1600	0.025000	0.000625	$1.624 \cdot 10^{-5}$	1.9047	0.784
50	2500	0.020000	0.000400	$1.062 \cdot 10^{-5}$	1.9034	1.682
60	3600	0.016667	0.000278	$7.506 \cdot 10^{-6}$	1.9034	3.214
70	4900	0.014286	0.000204	$5.597 \cdot 10^{-6}$	1.9038	5.631
80	6400	0.012500	0.000156	$4.340 \cdot 10^{-6}$	1.9048	9.347
90	8100	0.011111	0.000123	$3.469 \cdot 10^{-6}$	1.9019	14.89
100	10000	0.010000	0.000100	$2.838 \cdot 10^{-6}$	1.9055	22.91
110	12100	0.009091	0.000083	$2.367 \cdot 10^{-6}$	1.9041	34.58
120	14400	0.008333	0.000069	$2.006 \cdot 10^{-6}$	1.9018	50.73
130	16900	0.007692	0.000059	$1.722 \cdot 10^{-6}$	1.9072	71.45
140	19600	0.007143	0.000051	$1.496 \cdot 10^{-6}$	1.8985	98.62
150	22500	0.006667	0.000044	$1.312 \cdot 10^{-6}$	1.9023	133.4
160	25600	0.006250	0.000039	$1.160 \cdot 10^{-6}$	1.9079	177.8
170	28900	0.005882	0.000035	$1.034 \cdot 10^{-6}$	1.8967	234.1
180	32400	0.005556	0.000031	$9.270 \cdot 10^{-7}$	1.9111	304.5
190	36100	0.005263	0.000028	$8.363 \cdot 10^{-7}$	1.9044	391.2
200	40000	0.005000	0.000025	$7.585 \cdot 10^{-7}$	1.9037	496.8

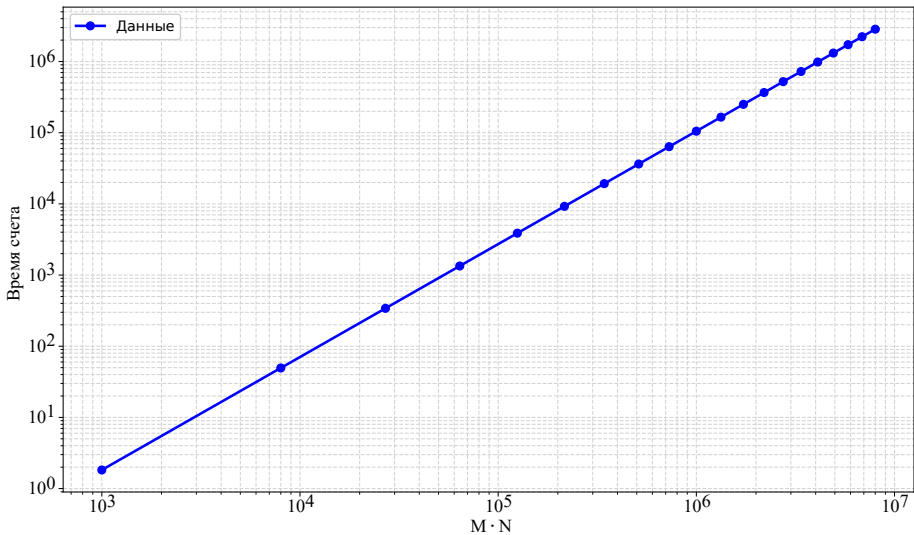


Рис. 2. Зависимость времени счета от общего числа узлов $M \cdot N$ при $N = M^2$
(логарифмический масштаб по обеим осям)

Fig. 2. Dependence of the computation time on the total number of nodes $M \cdot N$ for
 $N = M^2$ (logarithmic scale on both axes)

Время счета на рассмотренных сетках возрастает от 0.014 с до 496.8 с при увеличении общего числа узлов $M \cdot N$ от 10^3 до $8 \cdot 10^6$. Зависимость времени счета от $M \cdot N$ близка к линейной (наклон в логарифмических координатах составляет порядка 1.2), что свидетельствует о высокой вычислительной эффективности предложенной реализации. Эффективность неявной схемы обусловлена как вторым порядком сходимости по пространственной переменной и безусловной устойчивостью, так и практически линейным ростом времени счета от общего числа узлов.

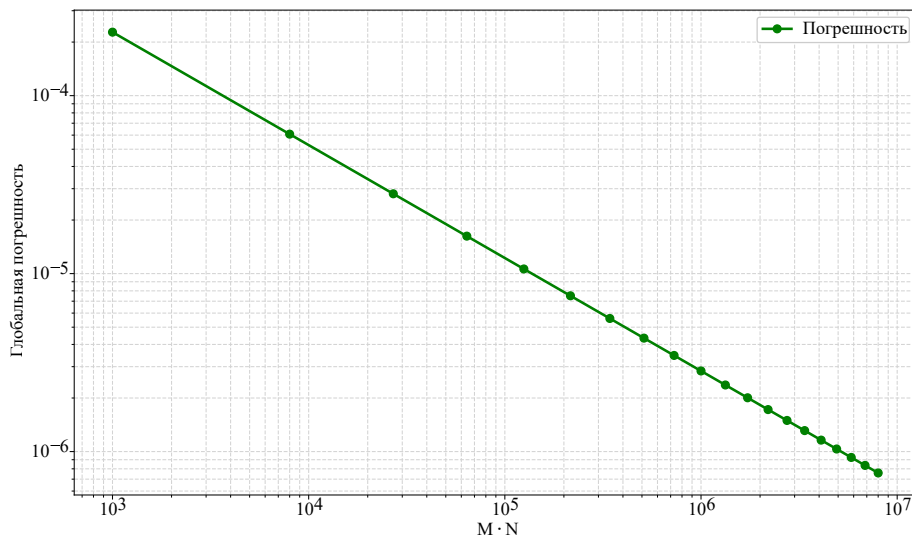


Рис. 3. Зависимость глобальной погрешности от $M \cdot N$ при $N = M^2$ (логарифмический масштаб по обеим осям)

Fig. 3. Dependence of the global error on $M \cdot N$ for $N = M^2$ (logarithmic scale on both axes)

Графики зависимостей, построенные по результатам вычислительного эксперимента, приведены на рис. 2, 3. На рис. 2 показана зависимость времени счета от общего числа узлов $M \cdot N$ в логарифмическом масштабе по обеим осям. На рис. 3 изображена зависимость глобальной погрешности от $M \cdot N$ в логарифмическом масштабе по обеим осям. Монотонное убывание погрешности с ростом $M \cdot N$ наглядно демонстрирует сходимость схемы, а второй порядок сходимости по пространственной переменной (то есть убывание погрешности как $O(h^2) = O(M^{-2})$ при $\tau = h^2$) количественно отражен

в табл. 1, где эмпирический порядок p_i устойчиво стремится к 1.904.

8. Заключение. В настоящей работе исследована начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с производной дробного порядка Капуто–Фабрицио по времени. Для этой задачи построена неявная разностная схема с аппроксимацией первого порядка точности по времени и второго порядка точности по пространственной переменной.

С помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка разностного решения, из которой следуют безусловная устойчивость построенной схемы, существование, единственность [18] и непрерывная зависимость решения этой схемы от входных данных. Доказана сходимость разностной схемы к решению исходной задачи со скоростью $O(\tau) + O(h^2)$, что подтверждают теоретические оценки порядка аппроксимации.

В результате вычислительного эксперимента, проведенного на последовательности сеток с соотношением $N = M^2$ ($M = 10, 20, \dots, 200$), получены следующие результаты:

- глобальная погрешность монотонно убывает с $2.274 \cdot 10^{-4}$ до $7.585 \cdot 10^{-7}$, а эмпирический порядок по пространственной переменной стремится к 1.904, что согласуется с теоретической оценкой $O(\tau) + O(h^2)$ при связи шагов $\tau = h^2$ (см. табл. 1 и рис. 3);
- время счета возрастает от 0.014 с до 496.8 с, демонстрируя близкий к линейному рост от общего числа узлов $M \cdot N$, что подтверждает высокую вычислительную эффективность реализации (см. рис. 2);
- сравнение с точным решением на контрольной сетке ($M = 100, N = 10\,000$) показывает глобальную погрешность $2.838 \cdot 10^{-6}$, что подтверждает высокую точность метода (см. рис. 1).

Прямые, представленные на рис. 2, 3, наглядно демонстрируют согласие теоретических оценок с результатами вычислительных экспериментов: погрешность убывает со вторым порядком по пространству, а линейный рост времени счета подтверждает высокую эффективность реализации. Из рис. 1 видно качественное совпадение приближенного и точного решений.

Таким образом, предложенная неявная разностная схема обладает свойствами устойчивости и сходимости и может применяться для численного решения смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности с производной Капуто–Фабрицио. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования процессов теплопереноса в средах с памятью и нелокальными свойствами, включая полимеры, пористые и композиционные материалы.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на построение схем более высокого порядка точности по времени, а также на обобщение предложенного метода на многомерные задачи и нелинейные случаи.

Список литературы

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
2. Тарасов В.Е. Дробные интегро-дифференциальные уравнения для электромагнитных волн в диэлектрических средах // Теоретическая и математическая физика. 2009. **158**, № 3. 419–424. doi 10.4213/tmf6324.
3. Gufo E.F.D. Application of the Caputo-Fabrizio fractional derivative without a singular kernel to the Korteweg-de Vries-Burgers equation // Math. Model. Anal. 2016. **21**, N 2. 188–198. doi 10.3846/13926292.2016.1145607.
4. Gufo E.F.D., Pene M.K., Mwambakanah J.N. Duplication in a model of rock fracture with fractional derivative without singular kernel // Open Math. 2015. **13**, N 1. 839–846. doi 10.1515/math-2015-0078.
5. Beybalayev V.D., Aliverdiev A.A., Hristov J. Transient heat conduction in a semi-infinite domain with a memory effect: Analytical solutions with a Robin boundary condition // Fractal Fract. 2023. **7**, N 10. Article Number 770. doi 10.3390/fractalfract7100770.
6. Gomez-Aguilar J.F., Lopez-Lopez M.G., Alvarado-Martinez V.M., et al. Modeling diffusion transport with a fractional derivative without singular kernel // Phys. A, Stat. Mech. Appl. 2016. **447**, N C. 467–481. doi 10.1016/j.physa.2015.12.066.
7. Бейбалаяев В.Д., Ибаев Т.И. Начально-краевая задача для нестационарного уравнения теплопроводности в ограниченной области без тепловой изоляции боковой поверхности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2025. **29**, № 3. 554–565. doi 10.14498/vsgtu2155.
8. Diethelm K., Ford N.J., Freed A.D. Detailed error analysis for a fractional Adams method // Numerical Algorithms. 2004. **36**, N 1. 31–52. doi 10.1023/B:NUMA.0000027736.85078.be.
9. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of a fractional derivative without singular kernel // Prog. Fract. Differ. Appl. 2015. **1**, N 2. 73–85. doi 10.12785/pfda/010201.
10. Crank J., Nicholson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1947. **43**, N 1. 50–67. doi 10.1017/S0305004100023197.
11. Lin R., Liu F., Anh V., Turner I. Stability and convergence of a new explicit finite-difference approximation for the variable-order nonlinear fractional diffusion equation // Appl. Math. Comput. 2009. **212**, N 2. 435–445. doi 10.1016/j.amc.2009.02.047.
12. Losada J., Nieto J.J. Properties of a new fractional derivative without a singular kernel // Prog. Fract. Differ. Appl. 2015. **1**, N 2. 87–92.
13. Atangana A., Nieto J.J. Numerical solution for the model of RLC circuit via the fractional derivative without singular kernel // Adv. Mech. Eng. 2015. **7**, N 10. 1–7. doi 10.1177/1687814015613758.
14. Podlubny I., Chechkin A., Skovranek T., et al. Matrix approach to discrete fractional calculus II: partial fractional differential equations // J. Comput. Phys. 2009. **228**, N 8. 3137–3153. doi 10.1016/j.jcp.2009.01.014.
15. Shi J., Chen M. A second-order accurate scheme for two-dimensional space fractional diffusion equations with time Caputo-Fabrizio fractional derivative // Appl. Numer. Math. 2020. **151**. 246–262. doi 10.1016/j.apnum.2020.01.007.
16. Thomée V. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Springer Series in Computational Mathematics (SSCM, Vol. 25). Berlin: Springer, 2006. doi 10.1007/978-3-662-03359-3.
17. Tian Y., Wang J.R. On some Hermite-Hadamard-type inequalities for convex functions via Hadamard fractional integrals // Prog. Fract. Differ. Appl. 2015. **1**, N 2. 103–110.
18. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. — 616 с.
19. Young W.H. On classes of summable functions and their Fourier series // Proc. Royal Soc. A. 1912. **87**, N 594. 225–229. doi 10.1098/rspa.1912.0076.
20. Pachpatte B.G. On discrete inequalities related to Gronwall's inequality // Proceedings of the Indian Academy of Sciences — Section A, 1977. **85**, N 1. 26–40. doi 10.1007/BF03051385.

Получена
15 мая 2026 г.

Принята
14 сентября 2026 г.

Опубликована
30 октября 2026 г.

Информация об авторе

Курбанмагомед Рамазанович Кадиев — аспирант; Дагестанский государственный университет, ул. М. Гаджиева, 43а, 367025, Махачкала, Российская Федерация.



References

1. V. V. Uchaykin, *Metod drobnykh proizvodnykh [Method of Fractional Derivatives]* (Artishok, Ul'yanovsk, 2008) [in Russian].
2. V. E. Tarasov, "Fractional Integro-Differential Equations for Electromagnetic Waves in Dielectric Media," *Theor. Math. Phys.* **158** (3), 355–359 (2009). doi [10.1007/s11232-009-0029-z](https://doi.org/10.1007/s11232-009-0029-z).
3. E. F. D. Gufo, "Application of the Caputo-Fabrizio Fractional Derivative without a Singular Kernel to the Korteweg-de Vries-Burgers Equation," *Math. Model. Anal.* **21** (2), 188–198 (2016). doi [10.3846/13926292.2016.1145607](https://doi.org/10.3846/13926292.2016.1145607).
4. E. F. D. Gufo, M. K. Pene, and J. N. Mwambakanah, "Duplication in a Model of Rock Fracture with Fractional Derivative without Singular Kernel," *Open Math.* **13** (1), 839–846 (2015). doi [10.1515/math-2015-0078](https://doi.org/10.1515/math-2015-0078).
5. V. D. Beybalaev, A. A. Aliverdiev, and J. Hristov, "Transient Heat Conduction in a Semi-Infinite Domain with a Memory Effect: Analytical Solutions with a Robin Boundary Condition," *Fractal Fract.* **7** (10), Article Number 770 (2023). doi [10.3390/fractalfract7100770](https://doi.org/10.3390/fractalfract7100770).
6. J. F. Gomez-Aguilar, M. G. Lopez-Lopez, V. M. Alvarado-Martinez, et al., "Modeling Diffusion Transport with a Fractional Derivative without Singular Kernel," *Phys. A: Stat. Mech. Appl.* **447** (C), 467–481 (2016). doi [10.1016/j.physa.2015.12.066](https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.12.066).
7. V. D. Beybalaev and T. I. Ibaov, "Initial-boundary value problem for nonstationary heat conduction equation in a bounded domain with non-insulated lateral surface," *Vestn. Sam. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* **29** (3), 554–565 (2025). doi [10.14498/vsgtu2155](https://doi.org/10.14498/vsgtu2155).
8. K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed, "Detailed Error Analysis for a Fractional Adams Method," *Numer. Algorithms* **36** (1), 31–52 (2004). doi [10.1023/B:NUMA.0000027736.85078.be](https://doi.org/10.1023/B:NUMA.0000027736.85078.be).
9. M. Caputo and M. Fabrizio, "A New Definition of a Fractional Derivative without Singular Kernel," *Prog. Fract. Differ. Appl.* **1** (2), 73–85 (2015). doi [10.12785/pfda/010201](https://doi.org/10.12785/pfda/010201).
10. J. Crank and P. Nicholson, "A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat-Conduction Type," *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **43** (1), 50–67 (1947). doi [10.1017/S0305004100023197](https://doi.org/10.1017/S0305004100023197).
11. R. Lin, F. Liu, V. Anh, and I. Turner, "Stability and Convergence of a New Explicit Finite-Difference Approximation for the Variable-Order Nonlinear Fractional Diffusion Equation," *Appl. Math. Comput.* **212** (2), 435–445 (2009). doi [10.1016/j.amc.2009.02.047](https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.02.047).
12. J. Losada and J. J. Nieto, "Properties of a New Fractional Derivative without a Singular Kernel," *Prog. Fract. Differ. Appl.* **1** (2), 87–92 (2015).
13. A. Atangana and J. J. Nieto, "Numerical solution for the model of RLC circuit via the fractional derivative without singular kernel," *Adv. Mech. Eng.* **7** (10), 1–7 (2015). doi [10.1177/1687814015613758](https://doi.org/10.1177/1687814015613758).
14. I. Podlubny, A. Chechkin, T. Skovranek, et al., "Matrix approach to discrete fractional calculus II: partial fractional differential equations," *J. Comput. Phys.* **228** (8), 3137–3153 (2009). doi [10.1016/j.jcp.2009.01.014](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.01.014).
15. J. Shi and M. Chen, "A Second-Order Accurate Scheme for Two-Dimensional Space Fractional Diffusion Equations with Time Caputo-Fabrizio Fractional Derivative," *Appl. Numer. Math.* **151**, 246–262 (2020). doi [10.1016/j.apnum.2020.01.007](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.01.007).
16. V. Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, 2nd ed. Springer Series in Computational Mathematics (SSCM, Vol. 25)* (Springer, Berlin, 2006). doi [10.1007/978-3-662-03359-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03359-3).
17. Y. Tian and J. R. Wang, "On Some Hermite-Hadamard-Type Inequalities for Convex Functions via Hadamard Fractional Integrals," *Prog. Fract. Differ. Appl.* **1** (2), 103–110 (2015).
18. A. A. Samarskii, *Teoriya raznostnykh skhem [Theory of Difference Schemes]* (Moscow: Nauka, 1983) [in Russian].
19. W. H. Young, "On Classes of Summable Functions and Their Fourier Series," *Proc. Royal Soc. A* **87** (594), 225–229 (1912). doi [10.1098/rspa.1912.0076](https://doi.org/10.1098/rspa.1912.0076).
20. B. G. Pachpatte, "On discrete inequalities related to Gronwall's inequality," *Proceedings of the Indian Academy of Sciences – Section A.* **85** (1), 26–40 (1977). doi [10.1007/BF03051385](https://doi.org/10.1007/BF03051385).

Received
May 15, 2026

Accepted
September 14, 2026

Published
October 30, 2026

Information about the author

Kurbanmagomed R. Kadiev — Graduate student; Dagestan State University, ulitsa M. Gadzhieva, 43a, 367025, Makhachkala, Russia.