



doi 10.26089/NumMet.v27r437

УДК 519.6

Глубокое обучение в совместной 3D-инверсии гравитационных и магнитных данных: сравнение функций потерь

А. В. Горбачев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-7054-5191, e-mail: gorbachev.av17@physics.msu.ru

А. Н. Левашов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-2044-0487, e-mail: levashov.an16@physics.msu.ru

Д. В. Чурбанов

Московский физико-технический институт,
кафедра высшей математики, Долгопрудный, Российская Федерация
ORCID: 0009-0007-3799-9419, e-mail: churbanov.dv@phystech.edu

И. Э. Степанова

Институт физики Земли имени О. Ю. Шмидта РАН, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-6497-3117, e-mail: tet@ifz.ru

Аннотация: В работе предложен нейросетевой подход к совместной трехмерной инверсии гравитационных и магнитных данных, ориентированный на восстановление единого рудного тела. Метод основан на сверточной архитектуре U-Net, обучаемой на большом синтетическом датасете, сгенерированном с помощью стохастической комбинации прямоугольных призм, имитирующих типичные геологические структуры. Рассмотрены и сравнены различные функции потерь: среднеквадратичная ошибка (MSE), средняя абсолютная ошибка (MAE), функция Хьюбера и функция потерь с физической невязкой прямой задачи. Показано, что в проведенных синтетических экспериментах применение этой функции потерь обеспечивает наименьшую ошибку среди рассмотренных вариантов и повышает физическую согласованность восстановленных моделей плотности и намагниченности, а аугментация данных поворотами улучшает качество реконструкции. Также сравнены результаты восстановления с помощью нейронных сетей с классическим решением обратной задачи в рамках теории дискретных потенциалов. В рассмотренном тестовом примере нейросетевой подход позволил добиться ошибки 4.23% для функции потерь с физической невязкой при времени обработки 0.2 с на фиксированной сетке 21^3 .

Ключевые слова: совместная инверсия, гравитационное поле, магнитное поле, глубокое обучение, U-Net, физическая регуляризация, трехмерная реконструкция.

Благодарности: А. В. Горбачев благодарит фонд “Базис” за финансовую поддержку. И. Э. Степанова благодарит Институт физики Земли имени О. Ю. Шмидта РАН за финансовую поддержку.

Для цитирования: Горбачев А.В., Левашов А.Н., Чурбанов Д.В., Степанова И.Э. Глубокое обучение в совместной 3D-инверсии гравитационных и магнитных данных: сравнение функций потерь // Вычислительные методы и программирование. 2026. 27, № 4. 603–622. doi 10.26089/NumMet.v27r437.

Deep learning in joint 3D inversion of gravitational and magnetic data: comparison of loss functions

Alexander V. Gorbachev

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0002-7054-5191, e-mail: gorbachev.av17@physics.msu.ru

Andrey N. Levashov

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0003-2044-0487, e-mail: levashov.an16@physics.msu.ru

Dmitry V. Churbanov

Moscow Institute of Physics and Technology, Department of Higher Mathematics, Dolgoprudny, Russia

ORCID: 0009-0007-3799-9419, e-mail: churbanov.dv@phystech.edu

Inna E. Stepanova

Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0001-6497-3117, e-mail: tet@ifz.ru

Abstract: The paper proposes a neural network approach to the joint three-dimensional inversion of gravitational and magnetic data aimed at the recovery of a single ore body. The method is based on a convolutional U-Net architecture trained on a large synthetic dataset generated by stochastic combinations of rectangular prisms simulating typical geological structures. Various loss functions are considered and compared: mean squared error (MSE), mean absolute error (MAE), Huber loss, and a loss with a forward-problem physics residual. It is shown that, in the conducted synthetic experiments, this loss provides the lowest error among the considered variants and improves the physical consistency of the recovered density and magnetization models, while data augmentation by rotations improves the reconstruction quality. The results of neural network recovery are also compared with the classical solution of the inverse problem within the framework of discrete potential theory. In the considered test example, the neural network approach achieved an error of 4.23% for the loss with a physics residual with a processing time of 0.2 s on the fixed 21^3 grid.

Keywords: joint inversion, gravity field, magnetic field, deep learning, U-Net, physics-based regularization, three-dimensional reconstruction.

Acknowledgements: A. V. Gorbachev thanks the Basis Foundation for financial support. I. E. Stepanova thanks the Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences for financial support.

For citation: A. V. Gorbachev, A. N. Levashov, D. V. Churbanov, I. E. Stepanova, “Deep learning in joint 3D inversion of gravitational and magnetic data: comparison of loss functions,” 27 (4), 603–622 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r437.

1. Введение. Инверсия потенциальных полей — гравитационного и магнитного — относится к классическим некорректно поставленным задачам геофизики. Определение пространственной конфигурации источников на основе измерений сопряжено с фундаментальными проблемами неединственности и неустойчивости [1, 2]. Совместная инверсия гравитационных и магнитных данных позволяет существенно снизить неоднозначность за счет использования структурных связей между плотностью и намагниченностью; в классических постановках для этого применяются, в частности, cross-gradient-ограничения и граммовы функционалы [3, 4]. Метод совместной граммовой инверсии гравитационных, магнитных и градиентометрических данных был развит и применен к моделированию железоксидных месторождений в работе [2].

В последние годы активно развиваются нейросетевые подходы к решению обратных задач геофизики. В работе [1] предложена схема совместной multi-physics-инверсии, усиленная методами глубокого обучения. Непосредственно к теме настоящей статьи относятся работы по совместной 3D-инверсии гравитационных и магнитных данных: в [5] такая задача решается с использованием глубоких нейронных сетей, в [6] предложена сеть с автоматическим распознаванием структурного сходства, в [7] используется двухэтапная схема обучения и донастройки, а в [8] физическая согласованность усиливается невязкой измеренных данных. Близкая к настоящей постановке CNN-модель совместной гравитационно-магнитной инверсии исследована в [9]; в этой работе И. Э. Степанова в числе соавторов. В работе [10] авторами был предложен структурный двухуровневый нейросетевой подход к совместной 3D-инверсии гравитационных и магнитных полей на основе архитектуры U-Net.

Настоящая работа продолжает и развивает указанный подход. Основное внимание уделено сравнению различных функций потерь (MSE, MAE, Huber loss и функции потерь с физической невязкой прямой задачи) и влиянию аугментации данных поворотами. Также проведено детальное сравнение нейросетевого решения с классическим решением в рамках теории дискретных потенциалов.

Постановка прямых задач гравиметрии и магнитометрии, а также методика их решения в рамках теории дискретных потенциалов подробно изложены в предыдущей работе авторов [10]. В настоящей статье используются те же обозначения и математические модели (в частности, дискретные представления потенциалов и матрицы прямых задач A^G и A^M).

Цель настоящей работы состоит в численном исследовании качества совместной 3D-инверсии гравитационных и магнитных данных с использованием единой сверточной нейронной сети при различных способах задания функционала потерь и подготовки обучающей выборки. Новыми результатами по сравнению с [10] являются: систематическое сравнение функций потерь MSE, MAE, Huber loss и функции потерь с физической невязкой прямой задачи для одной и той же архитектуры U-Net и единого синтетического датасета, анализ влияния аугментации данных поворотами на точность восстановления, включение в функционал потерь невязок прямых задач гравиметрии и магнитометрии, сопоставление полученных нейросетевых реконструкций с решением обратной задачи методом дискретного потенциала, а также оценка компромисса между точностью восстановления и вычислительной стоимостью обучения.

2. Постановка прямых задач магнитометрии и гравиметрии в рамках теории дискретных потенциалов. В рамках теории дискретных гравитационных и магнитных потенциалов постановка прямых задач осуществляется в дискретном (сеточном) пространстве. Физические поля и их источники задаются в узлах регулярной трехмерной декартовой сетки с постоянным шагом h по каждому направлению.

В качестве неизвестных рассматриваются значения дискретных гравитационных $V^S(\mathbf{x})$ и магнитных $U^S(\mathbf{x})$ потенциалов в узлах сетки. Эти значения должны удовлетворять конечно-разностным аналогам уравнений Пуассона. Источники поля входят в правые части соответствующих разностных уравнений.

Для гравитационного потенциала $V^S(\mathbf{x})$ используется разностный аналог уравнения Пуассона

$$\Delta^S V^S(\mathbf{x}) = C_n m^S(\mathbf{x}),$$

где Δ^S — конечно-разностный аналог оператора Лапласа, $m^S(\mathbf{x})$ — дискретное распределение гравитирующих масс, C_n — размерностная константа, зависящая от шага сетки и выбранной аппроксимации. Уравнение дополняется нулевыми граничными условиями первого рода на границе расчетной области.

Для магнитного потенциала $U^S(\mathbf{x})$ справедливо дискретное уравнение Пуассона

$$\Delta^S U^S(\mathbf{x}) = C_n \operatorname{div}^S \mathbf{J}^S(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{J}^S(\mathbf{x})$ — дискретное распределение вектора намагниченности в узлах сетки, а div^S — конечно-разностный аналог оператора дивергенции.

Стандартный семиточечный конечно-разностный аналог оператора Лапласа имеет вид

$$\Delta^S \phi(\mathbf{x}_{i,j,k}) = \frac{1}{h^2} [\phi_{i+1,j,k} + \phi_{i-1,j,k} + \phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j-1,k} + \phi_{i,j,k+1} + \phi_{i,j,k-1} - 6\phi_{i,j,k}].$$

2.1. Алгоритм вычисления фундаментального решения. Фундаментальное решение дискретного аналога уравнения Лапласа определяется как сеточная функция $G^S(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta^S G^S(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \delta^S(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$$

во всех внутренних узлах сетки. Здесь $\delta^S(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ — дискретный аналог дельта-функции, равный $1/h^3$ в узле $\boldsymbol{\xi}$ и нулю в остальных узлах.

Вычисление G^S сводится к решению краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta^S G^S(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \delta^S(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), & \mathbf{x} \in \Omega^S, \\ G^S(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega^S, \end{cases}$$

в ограниченной прямоугольной сеточной области Ω^S с нулевыми граничными условиями первого рода.

Конечно-разностная аппроксимация этой краевой задачи приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$A\mathbf{g} = \mathbf{d}. \quad (1)$$

Матрица A и векторы $\mathbf{g}$, $\mathbf{d}$ устроены следующим образом. Матрица A — разреженная блочно-ленточная матрица размерности $N_h \times N_h$, где N_h обозначает общее число узлов расчетной сетки. Для всякого внутреннего узла с индексом p (отвечающего узлу (i, j, k)) элементы матрицы A определяются посредством семиточечного шаблона: на главной диагонали $A_{p,p} = -6/h^2$, на позициях шести соседних узлов $A_{p,q} = 1/h^2$, на граничных узлах матрица модифицируется в соответствии с нулевыми граничными условиями (строки заменяются на единичные с нулем в правой части).

Вектор $\mathbf{g}$ содержит значения фундаментального решения во всех узлах сетки:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} G^S(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}) \\ G^S(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\xi}) \\ \vdots \\ G^S(\mathbf{x}_{N_h} - \boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix},$$

где узлы $\mathbf{x}_p$ упорядочены лексикографически по индексам (i, j, k) .

Вектор правой части $\mathbf{d}$ соответствует дискретной дельта-функции, сдвинутой в узел $\boldsymbol{\xi}$:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/h^3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где компонента $1/h^3$ стоит на позиции, соответствующей узлу $\boldsymbol{\xi}$, а все остальные компоненты равны нулю.

Для численного решения системы (1) используется матричный метод прогонки.

2.2. Вычисление дискретного потенциала по известным источникам. При известном распределении дискретных масс $m^S(\boldsymbol{\xi})$ гравитационный потенциал в узлах сетки вычисляется по формуле дискретного потенциала

$$V^S(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega^S} m^S(\boldsymbol{\xi}) G^S(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad (2)$$

где Ω^S — сеточная область, содержащая носитель источников.

Аналогично, магнитный потенциал выражается через дискретное распределение вектора намагниченности

$$U^S(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega^S} \mathbf{J}^S(\boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla^S G^S(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad (3)$$

где ∇^S — конечно-разностный аналог оператора градиента, согласованный с Δ^S .

Представления (2), (3) задают прямые задачи гравиметрии и магнитометрии в рамках теории дискретных потенциалов.



3. Методика решения обратной задачи совместной инверсии гравитационных и магнитных полей. В разделе 2 были рассмотрены прямые задачи гравиметрии и магнитометрии в рамках теории дискретных потенциалов, а также сформулированы дискретные представления для гравитационного и магнитного потенциалов. Настоящий раздел посвящен разработке методики решения обратной задачи — восстановления трехмерной формы и физических параметров рудного тела по наблюдаемым гравитационным и магнитным полям.

3.1. Построение синтетического датасета. Одним из ключевых этапов обучения нейронных сетей для решения задачи трехмерной совместной инверсии гравитационных и магнитных полей является формирование качественного обучающего датасета. Использование реальных данных ограничено их недостаточным объемом и сложностью получения достоверных решений обратных задач. Поэтому в работе применяется синтетический датасет, генерируемый на основе модели прямых задач, описанной в разделе 2.

Задача совместной инверсии в данной работе заключается в одновременном восстановлении единого трехмерного носителя аномальных источников — рудного тела, обладающего как аномальной плотностью $\bar{\rho}(\mathbf{r})$, так и вектором намагниченности $\bar{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$. При этом предполагается, что области аномальной плотности и намагниченности пространственно совпадают (имеют общий носитель), что соответствует наиболее типичной геологической ситуации для рудных объектов. Совместное использование гравитационных и магнитных данных позволяет повысить точность решения обратной задачи благодаря взаимным структурным и физическим ограничениям между двумя полями.

В качестве модельных объектов рассматривались множества прямоугольных призм в области восстановления, заданной координатами

$$x \in [-20, 20], \quad y \in [-20, 20], \quad z \in [-5, 0].$$

Область восстановления была дискретизирована на равномерную трехмерную сетку с количеством узлов

$$N_x = 21, \quad N_y = 21, \quad N_z = 21.$$

Такая дискретизация используется как модельная постановка для сравнительного численного эксперимента и существенно уступает по разрешению сеткам, применяемым в практических задачах рудной геологоразведки, где типичные размеры расчетных областей могут составлять 100^3 – 500^3 узлов и более. Поэтому полученные ниже результаты следует рассматривать как проверку методики на фиксированной сетке, а не как прямую демонстрацию готовности к расчетам промышленного масштаба. Выбранная архитектура U-Net привязана к размерности входных и выходных тензоров; переход к другой дискретизации требует модификации архитектуры и повторного обучения сети.

Область измерений потенциальных полей задавалась в горизонтальной плоскости над областью восстановления:

$$x \in [-20, 20], \quad y \in [-20, 20], \quad z \in [0, 5];$$

соответствующая сетка имела количество узлов

$$N_s = 21, \quad N_t = 21, \quad N_r = 21.$$

Для генерации разнообразных геологических структур использовался следующий стохастический алгоритм:

1. Количество прямоугольных призм в одном примере датасета выбирается случайным образом из диапазона от 1 до 50.
2. Для каждой призмы случайным образом определяется положение ее центра в области восстановления.
3. Задаются случайные размеры призмы

$$l_x \in [2, 7], \quad l_y \in [2, 7], \quad l_z \in [0.5, 1.25].$$

4. Каждой призме присваиваются единичные значения аномальной плотности ρ и намагниченности m в пределах, характерных для рудных тел.

Полученные распределения плотности $\rho^{(k)}(\mathbf{r})$ и намагниченности $m^{(k)}(\mathbf{r})$ (с общим пространственным носителем) включаются в геометрический датасет. По формулам дискретных прямых задач [10] для

каждого примера вычисляются соответствующие гравитационные $\varphi^{(k)}$ и магнитные $b^{(k)} = B_z^{(k)}$ поля в области измерений.

Всего было сгенерировано $K = 10\,000$ синтетических 3D-объектов. На их основе сформированы следующие датасеты:

$$\mathcal{D}_g = \{(\rho^{(k)}, \varphi^{(k)})\}_{k=1}^K, \quad \mathcal{D}_m = \{(m^{(k)}, b^{(k)})\}_{k=1}^K.$$

Для совместного подхода также формируется объединенный датасет пар

$$\mathcal{D} = \{(\varphi^{(k)}, b^{(k)}), (\rho^{(k)}, m^{(k)})\}_{k=1}^K,$$

который используется для обучения единой нейронной сети, восстанавливающей одновременно распределения плотности и намагниченности.

3.2. Архитектура нейронной сети. Классические результаты об универсальной аппроксимации в работе [11] показывают принципиальную возможность аппроксимации широких классов непрерывных отображений нейронными сетями, но сами по себе не являются обоснованием выбора конкретной глубокой архитектуры. В настоящей задаче выбор сверточной архитектуры обусловлен трехмерной сеточной структурой входных полей и восстанавливаемых распределений источников, а также необходимостью учитывать локальные пространственные связи между соседними узлами.

В задачах инверсии потенциальных полей входные (поля) и выходные (распределения источников) данные обладают сложной трехмерной структурой и различной пространственной размерностью. В таких случаях наиболее эффективными являются сверточные нейронные сети (CNN). В настоящей работе в качестве базовой архитектуры выбрана сеть типа U-Net [12], построенная по схеме энкодер-декодер.

Энкодер последовательно сжимает входные данные в латентное представление меньшей пространственной размерности, но с увеличением числа каналов. Декодер, напротив, восстанавливает данные до исходной или близкой к ней размерности. Между энкодером и декодером используются skip-соединения, позволяющие передавать детальную пространственную информацию.

Для работы сети все элементы датасета преобразуются в тензорный формат. Наблюдаемые гравитационное $\varphi^{(k)}$ и магнитное $b^{(k)}$ поля представляются в виде тензоров размерности $1 \times M_S^x \times M_S^y \times M_S^z$. Распределения плотности $\rho^{(k)}$ и намагниченности $m^{(k)}$ приводятся к тензорам размерности $M_N^z \times M_N^x \times M_N^y$.

Архитектура используемой сети U-Net показана на рис.1. На вход сети подается тензор размерности $2 \times 21 \times 21 \times 21$, соответствующий объединенным трехмерным компонентам гравитационного и магнитного полей. На выходе формируется тензор такой же размерности, содержащий распределения плотности и намагниченности в области восстановления.

3.3. Функции потерь, используемые при обучении нейронной сети. На нижнем уровне алгоритма инверсии полей проводится обучение единой нейронной сети для совместной обработки гравитационных и магнитных данных. Выбор функции потерь существенно влияет на скорость сходимости, устойчивость к шумам и обобщающую способность модели. Поэтому в работе рассматривается несколько функционалов потерь, каждый из которых обладает собственными преимуществами при решении задач геофизической инверсии: среднеквадратичная ошибка хорошо работает с гладкими полями и штрафует крупные отклонения, средняя абсолютная ошибка более устойчива к выбросам, функция Хьюбера сочетает преимущества обеих, а функция потерь с физической невязкой прямой задачи дополнительно штрафует несогласованность восстановленных источников с наблюдаемыми полями.

Для удобства обозначим вектор предсказанных сетью значений как $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_L)$ и вектор истинных значений как $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_L)$, где L — общее число узлов сетки в области восстановления (для плотности или намагниченности).

1. Среднеквадратичная ошибка (MSE).

Среднеквадратичная ошибка чувствительна к большим отклонениям и часто приводит к более гладким решениям:

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\hat{u}_l - u_l)^2.$$

2. Средняя абсолютная ошибка (MAE).

Средняя абсолютная ошибка более устойчива к наличию выбросов в данных:

$$\text{MAE}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\hat{u}_l - u_l|.$$

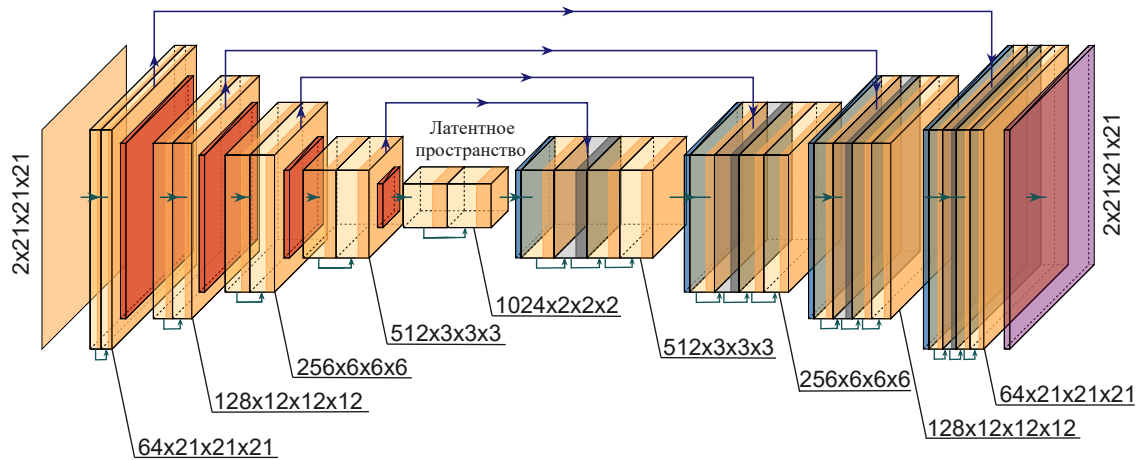


Рис. 1. Архитектура используемой сети типа U-Net. На вход подается тензор размерности $2 \times 21 \times 21 \times 21$, соответствующий сеточным значениям гравитационного и магнитного полей. На выходе сети формируется тензор размерности $2 \times 21 \times 21 \times 21$, содержащий распределения плотности и намагниченности в трехмерной области восстановления

Fig. 1. The architecture of the U-Net type of network used. The input is a tensor of dimension $2 \times 21 \times 21 \times 21$ corresponding to the grid values of the gravitational and magnetic fields. At the output of the network, a tensor of dimension $2 \times 21 \times 21 \times 21$ is formed, containing density and magnetization distributions in the three-dimensional reconstruction area

3. Функция потерь Хьюбера (Huber loss).

Функция Хьюбера представляет собой компромисс между MSE и MAE, менее чувствительный к выбросам:

$$\text{HuberLoss}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \begin{cases} \frac{1}{2}(\hat{u}_l - u_l)^2, & \text{если } |\hat{u}_l - u_l| \leq \varepsilon, \\ \varepsilon(|\hat{u}_l - u_l| - \frac{\varepsilon}{2}), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ — гиперпараметр, определяющий порог перехода от квадратичного к линейному поведению.

4. Функция потерь с физической невязкой прямой задачи.

Используемый в работе функционал учитывает не только невязку с эталонными распределениями источников, но и невязку уравнений прямых задач из раздела 2. По терминологии он является supervised data-consistent loss с дополнительным physics residual term. Он не является PINN в каноническом смысле работ Раисси, Пердикариса и Карниадакиса [13], где обучение может проводиться без supervised-меток искоемых источников, а физические уравнения входят непосредственно в обучение как ограничения на решение. В настоящей работе этот функционал далее обозначается как PhysDCLoss и имеет вид

$$\text{PhysDCLoss}(\hat{\rho}, \hat{m}; \varphi, b) = \text{MSE}(\hat{\rho}, \rho) + \text{MSE}(\hat{m}, m) + \lambda \cdot R(\hat{\rho}, \hat{m}),$$

где $\lambda > 0$ — весовой коэффициент, а член R — норма невязки прямых задач в L_2 -метрике:

$$R(\hat{\rho}, \hat{m}) = \|A^G \hat{\rho} - \varphi_{\text{obs}}\|_{L_2}^2 + \|A^b \hat{m} - b_{\text{obs}}\|_{L_2}^2.$$

Здесь: A^G — матрица прямой задачи гравиметрии (см. [10]), A^b — матрица (или соответствующая строка/блок матрицы A^M), вычисляющая вертикальную компоненту $b = B_z$ по скалярному распределению $\hat{m}$, φ_{obs} и b_{obs} — наблюдаемые (эталонные) поля из датасета.

Таким образом, член R штрафует за отклонения полей (вычисленных по предсказанным источникам через операторы прямых задач) от наблюдаемых полей, обеспечивая строгую физическую согласованность решения.

Для совместной инверсии по батчу примеров общая функция потерь записывается в виде

$$\text{Loss}_{\text{joint}} = \sum_{k \in \text{batch}} \left[\mathcal{L}(\hat{\rho}^{(k)}, \rho^{(k)}) + \mathcal{L}(\hat{m}^{(k)}, m^{(k)}) \right],$$

где для первых трех вариантов $\mathcal{L}$ соответствует MSE, MAE или HuberLoss; вариант PhysDCLoss задается отдельной формулой с добавлением члена R . При этом

$$\{\hat{\rho}^{(k)}, \hat{m}^{(k)}\} = \text{NN}(\varphi^{(k)}, b^{(k)}),$$

где NN — операторное обозначение действия нейронной сети.

4. Вычислительные эксперименты и их анализ. Детализируем элементы нейросетевого алгоритма, который использовался ниже при численном решении модельных обратных задач совместной инверсии гравитационных и магнитных полей.

4.1. Детали обучения нейронных сетей. В качестве алгоритма для оптимизации параметров нейронной сети использовался типичный для данных моделей оптимизатор AdamW с коэффициентом скорости сходимости (learning rate) 10^{-3} , который уточнялся после каждого прохода выборки с помощью GradScaler [14]. Принципы работы оптимизатора описаны, например, в [15]. Датасет $\mathcal{D}$ разбивался на обучающую, валидационную и тестовую выборки: $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\text{train}} \cup \mathcal{D}_{\text{val}} \cup \mathcal{D}_{\text{test}}$, соответственно по 8 000, 1 000 и 1 000 объектов. Таким образом, функции потерь $\text{Loss}_{\text{train}}$, Loss_{val} и $\text{Loss}_{\text{test}}$ вычислялись по следующему правилу:

$$\text{Loss}_{\square} = \text{Loss}_{\text{joint}}(\hat{m}^{(k)}, \hat{\rho}^{(k)}, m^{(k)}, \rho^{(k)}),$$

где $\{\hat{\rho}^{(k)}, \hat{m}^{(k)}\} = \text{NN}(\varphi^{(k)}, b^{(k)})$, $(\rho^{(k)}, \varphi^{(k)}, m^{(k)}, b^{(k)}) \in \mathcal{D}_{\square}$, а вместо $\square$ надо подставить train, val или test.

Размер батча из эвристических соображений фиксировался равным 8.

На каждой эпохе обучения нейронной сети вычисляются соответствующие значения $\text{Loss}_{\text{train}} = \text{Loss}_{\text{train}}(\text{epoch})$ и $\text{Loss}_{\text{val}} = \text{Loss}_{\text{val}}(\text{epoch})$.

При определении оптимального момента остановки обучения нейронной сети важно зафиксировать ситуацию, когда алгоритм начинает *переобучаться* на тренировочных данных. Как правило, этот момент определяется началом “расхождения” кривых $\text{Loss}_{\text{train}}(\text{epoch})$ и $\text{Loss}_{\text{val}}(\text{epoch})$. В нашем алгоритме обучение останавливалось при том значении epoch = iter_{stop}, при котором впервые выполнялось неравенство $|\text{Loss}_{\text{train}}(\text{epoch}) - \text{Loss}_{\text{val}}(\text{epoch})| \geq \varepsilon$.

Итоговое значение невязки, определяющее качество приближенного решения, бралось как $\text{Loss}_{\text{result}} = \text{Loss}_{\text{test}}(\text{iter}_{\text{stop}})$ на тестовой выборке для итерации, на которой впервые фиксировалось переобучение по валидационной кривой.

В качестве отчетной метрики качества восстановления используется относительная L_2 -ошибка на области восстановления источников

$$\Omega_{\text{rec}} = \{(x, y, z) : x \in [-20, 20], y \in [-20, 20], z \in [-5, 0]\},$$

дискретизированной сеткой $N_x \times N_y \times N_z = 21 \times 21 \times 21$ узлов ($L = N_x N_y N_z$). Для произвольного сеточного поля $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_L)$ и его приближения $\hat{\mathbf{u}}$ дискретная относительная L_2 -ошибка на Ω_{rec} задается формулой

$$\text{RelL}_2(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \frac{\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} = \frac{\left(\sum_{l=1}^L (\hat{u}_l - u_l)^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{l=1}^L u_l^2\right)^{1/2}}.$$

Для совместного восстановления плотности и намагниченности на одном объекте используется среднее

$$E(\hat{\rho}, \hat{m}; \rho, m) = \frac{1}{2} \left(\text{RelL}_2(\hat{\rho}, \rho) + \text{RelL}_2(\hat{m}, m) \right) \times 100\%.$$

Значения, приводимые ниже в тексте и в табл. 1, соответствуют усреднению E по объектам тестовой выборки $\mathcal{D}_{\text{test}}$; область усреднения по пространству — узлы Ω_{rec} , область усреднения по выборке — $\mathcal{D}_{\text{test}}$.

Гиперпараметр λ в PhysDCLoss подбирался по минимуму относительной L_2 -ошибки на отдельной валидационной выборке $\mathcal{D}_{\text{val}}$ и не настраивался по тестовой выборке $\mathcal{D}_{\text{test}}$, на которой декларируется итоговая ошибка.

4.2. Пример восстановления источников, определяющих трехмерную структуру рудного тела. Для детального анализа качества восстановления был выбран один случайный объект из тестовой выборки объемом 1 000 примеров. Все параметры дискретизации, включая размер области восстановления $x \in [-20, 20]$, $y \in [-20, 20]$, $z \in [-5, 0]$ и области измерений $x \in [-20, 20]$, $y \in [-20, 20]$, $z \in [0, 5]$, а также количество узлов сетки $N_x = N_y = N_z = 21$ и $N_s = N_t = N_r = 21$, полностью совпадали для нейросетевого и классического решений. Структура распределения плотности и намагниченности эталонного объекта также была идентична в обоих подходах, что гарантирует прямую сопоставимость результатов.

Эталонная трехмерная модель рудного тела представлена на рис. 2. Объект представляет собой сложную композицию нескольких прямоугольных призм, образующих единое тело неправильной формы с характерными выступами и углублениями. Соответствующее гравитационное поле (потенциал), создаваемое данным объектом на поверхности наблюдения, показано на рис. 3. Для сравнения с нейросетевым подходом к тому же тестовому объекту было применено решение обратной задачи методом дискретного потенциала [16]. Полученное распределение источников приведено на рис. 4. Как видно из рисунков, метод дискретного потенциала восстанавливает общую геометрию тела, однако демонстрирует заметные осцилляции и ложные источники малой амплитуды вне основного тела, а также некоторую размытость границ на глубине.

Нейросетевое восстановление проводилось с использованием единой архитектуры U-Net (см. подраздел 3.2) после обучения на датасете $\mathcal{D}_{\text{train}}$. Для обеспечения воспроизводимости результатов все входные поля φ и b подвергались минимакс-нормализации в диапазон $[0, 1]$, а инициализация весов модели выполнялась по методике инициализации Ксавье. Для каждого варианта функции потерь производилось отдельное обучение с последующим прямым проходом сети через выбранный тестовый объект.

Сначала исследовано обучение без аугментации данных поворотами. Результаты обучения нейронной сети с функцией потерь MSE приведены на рис. 5 а; обучение на тестовой выборке останавливается при относительной L_2 -ошибке 14.72%.

Далее был проведен эксперимент с аугментацией данных одним фиксированным поворотом на угол $\alpha = \pi/4$ вокруг оси z . Данная трансформация применялась ко всем объектам обучающей выборки, что позволило учесть различное взаимное расположение области восстановления и области измерений (часть сенсоров при этом оказывалась ближе к телу). Кривая сходимости MSE с аугментацией (рис. 5 б) останавливается при относительной L_2 -ошибке 7.34%, что подтверждает положительный эффект аугментации поворотом.

Для функции ошибок MAE обучение останавливается при L_2 -ошибке 16.82% и дает наибольшую ошибку среди рассмотренных вариантов (рис. 5 с).

Применение функции потерь Хьюбера показывает остановку при ошибке 5.71% и дает хороший результат при сравнительно небольшом времени обучения (рис. 5 d).

В рассматриваемом тестовом примере наименьшая ошибка среди исследованных вариантов получена при использовании функции потерь с физической невязкой прямой задачи (рис. 6, 7). Распределения плотности и намагниченности хорошо согласуются с эталоном по форме, глубине залегания и амплитуде, хотя вывод о преимуществе этого варианта основан на синтетическом тесте и требует дополнительной проверки на более широкой выборке объектов. Обучение останавливается при относительной L_2 -ошибке 4.23% на тестовой выборке (рис. 5 е). Зависимость ошибки на валидационной выборке от весового коэффициента λ в функции с физической невязкой приведена на рис. 8; выбранное по $\mathcal{D}_{\text{val}}$ значение λ далее фиксировалось, а итоговая ошибка 4.23% сообщается для $\mathcal{D}_{\text{test}}$.

Все приведенные выше результаты получены на одной и той же аппаратной конфигурации (NVIDIA GeForce RTX 4060) и с одинаковыми гиперпараметрами обучения (оптимизатор AdamW, learning rate 10^{-3} , размер батча 8), что обеспечивает полную воспроизводимость эксперимента.

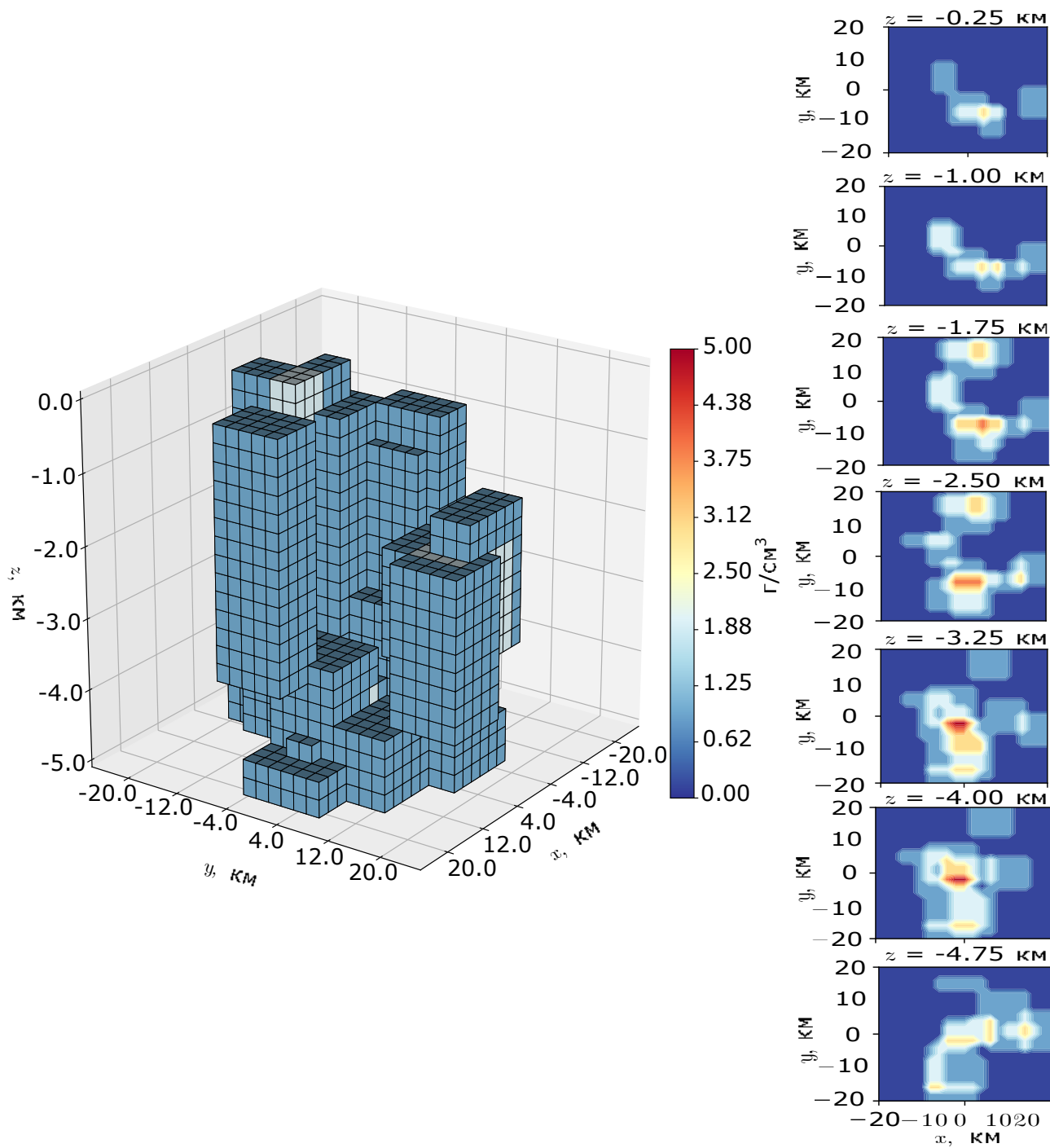


Рис. 2. Эталонная трехмерная модель рудного тела из тестовой выборки

Fig. 2. A reference three-dimensional model of an ore body from a test sample

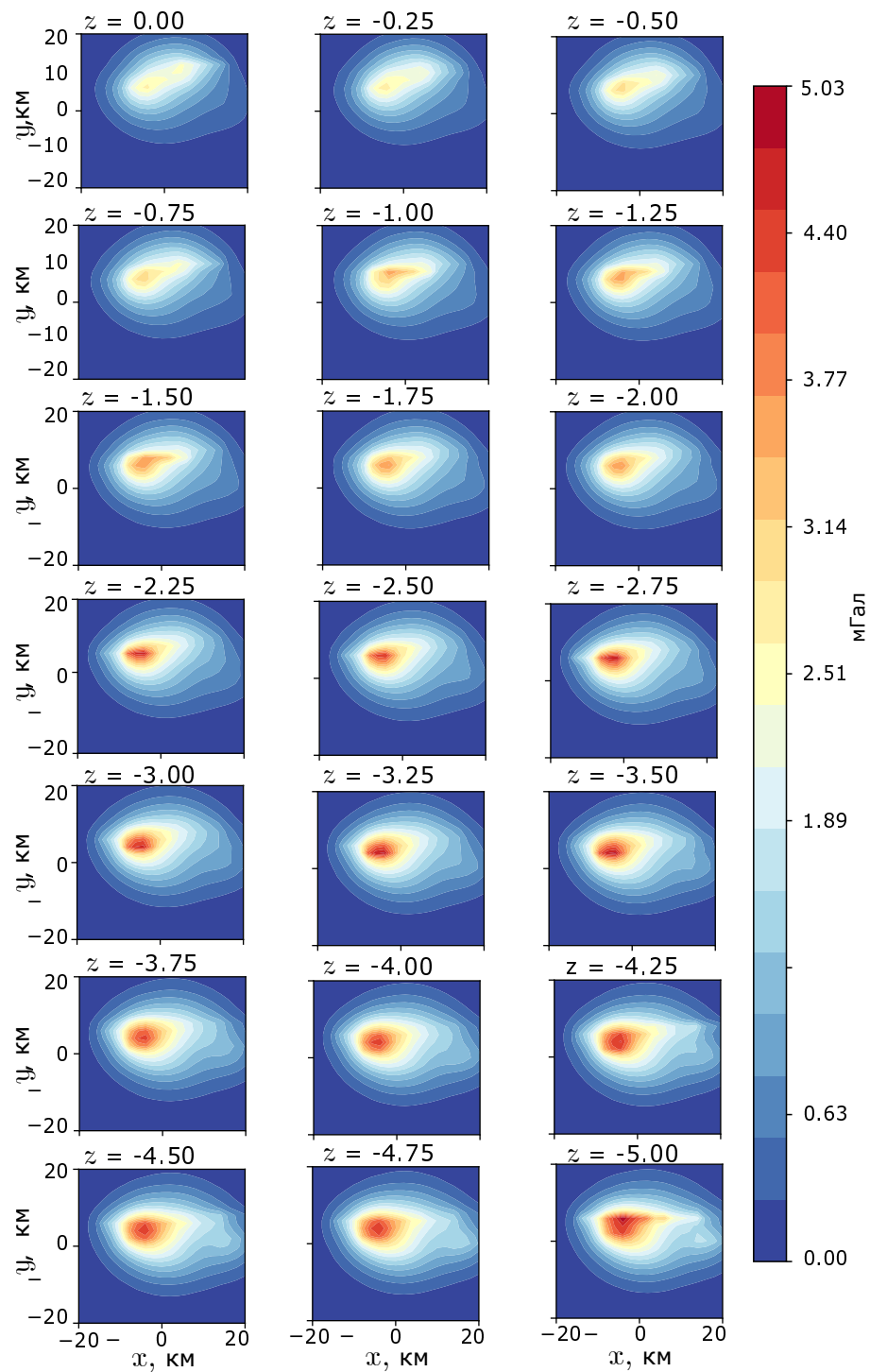


Рис. 3. Гравитационное поле (потенциал), создаваемое эталонным объектом, лежащим на глубине z , на поверхности наблюдения

Fig. 3. The gravitational field (potential) created by a reference object lying at a depth of z on the observation surface

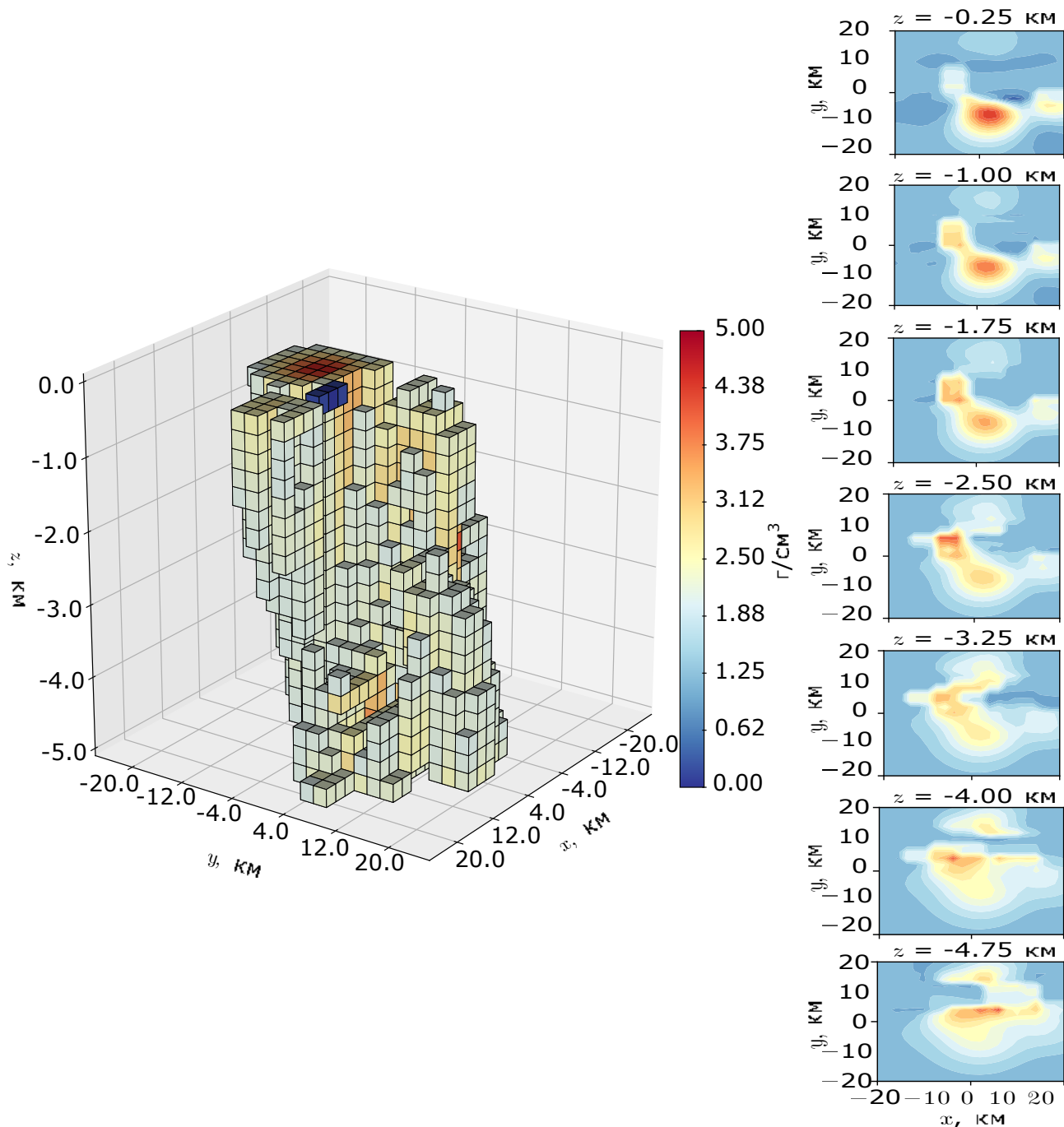


Рис. 4. Результат решения обратной задачи методом дискретного потенциала

Fig. 4. The result of solving the inverse problem by the discrete potential method

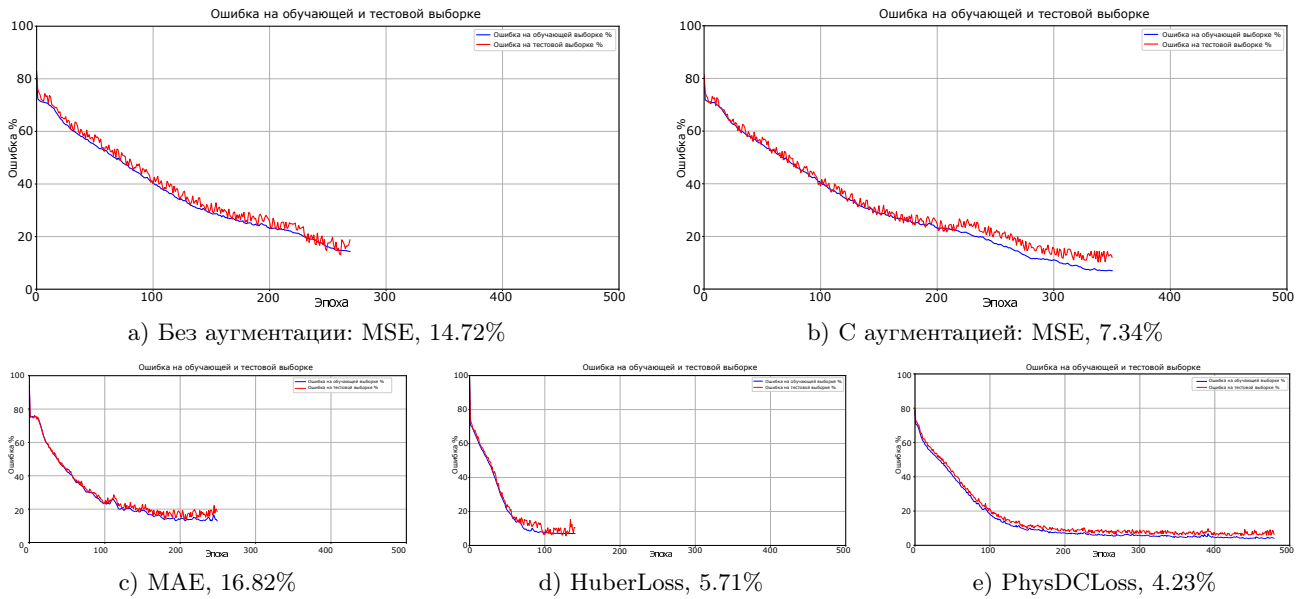


Рис. 5. Сводное сравнение кривых сходимости для разных функций потерь: а) панель соответствует обучению без аугментации поворотами; б)–е) панели соответствуют обучению с аугментацией

Fig. 5. Summary comparison of convergence curves for different loss functions: а) panel corresponds to training without rotation augmentation; б)–е) panels correspond to training with augmentation

4.3. Характеристики расчетов. Время обучения на одну эпоху с использованием видеокарты NVIDIA GeForce RTX 4060 (ноутбук) для различных функций потерь представлено в табл. 1.

Таблица 1. Сравнение времени обучения и минимальной относительной L_2 -ошибки на тестовой выборке для разных функций потерь

Table 1. Comparison of training time and minimum relative L_2 error on the test set for different loss functions

Функция потерь Loss Function	Время обучения модели Model learning time	Минимальная относительная L_2 -ошибка, % Minimum relative L_2 error, %
MSE (без поворота)	6 ч 43 мин	14.72
MSE (с поворотом)	7 ч 12 мин	7.34
MAE	3 ч 23 мин	16.82
HuberLoss	5 ч 45 мин	5.71
PhysDCLoss	12 ч 34 мин	4.23

Различие между PhysDCLoss и HuberLoss по табл. 1 составляет около 1.5 процентных пункта (4.23% против 5.71%). Это различие получено без оценки статистической значимости (без повторных запусков с различной инициализацией и без формальных статистических критериев) и поэтому интерпретируется лишь как наблюдаемый численный зазор в проведенных экспериментах, а не как статистически подтвержденное превосходство.

5. Обсуждение. Проведенное исследование демонстрирует работоспособность и перспективность предложенного нейросетевого подхода к совместной инверсии гравитационных и магнитных данных. Основная идея метода заключается в использовании единой нейросетевой архитектуры для восстановления пространственно согласованных распределений плотности и намагниченности, что позволяет учитывать структурные связи между источниками различных потенциальных полей.

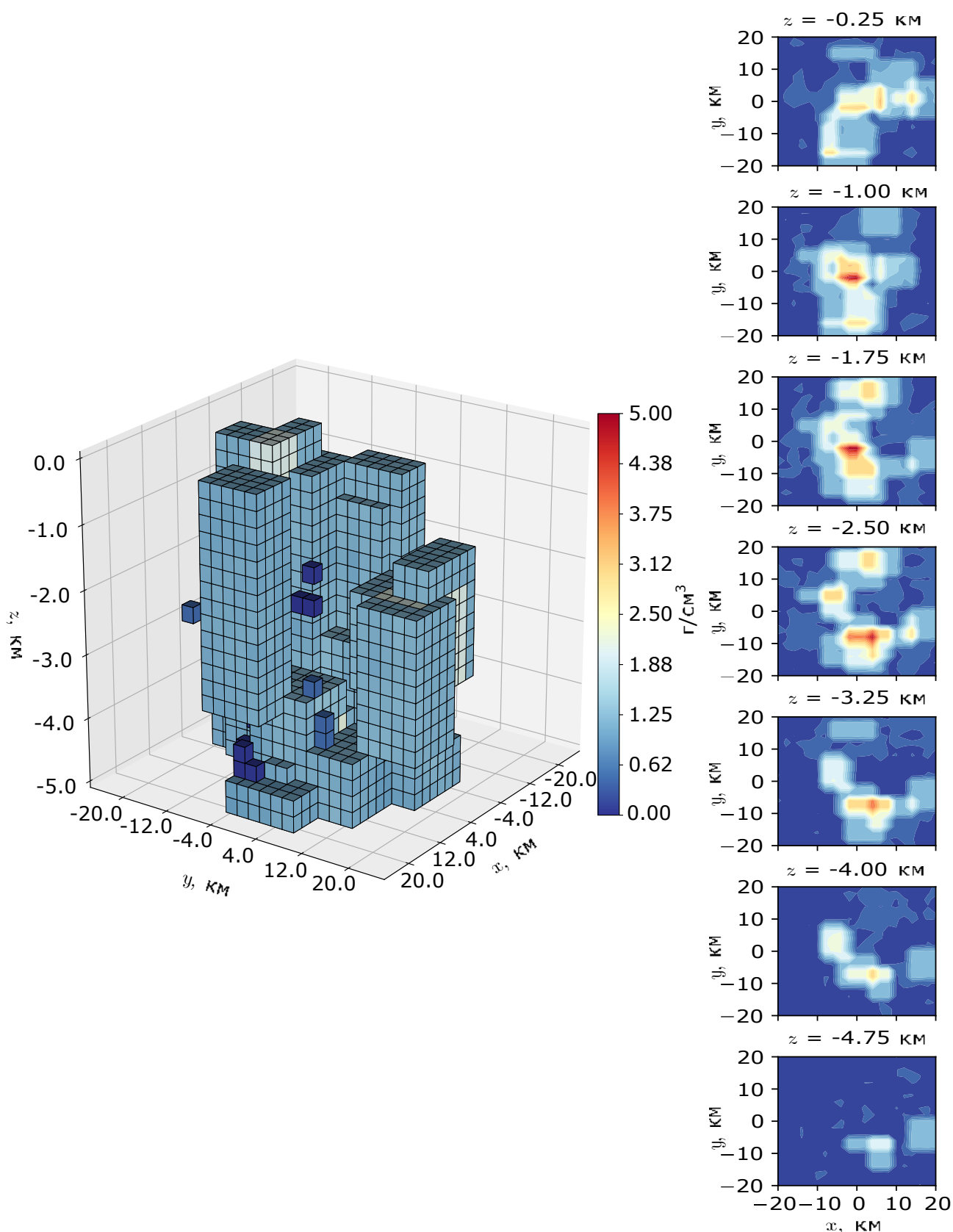


Рис. 6. Восстановленная плотность ρ при использовании функции потерь с физической невязкой

Fig. 6. The restored density ρ obtained with the loss containing a physics residual

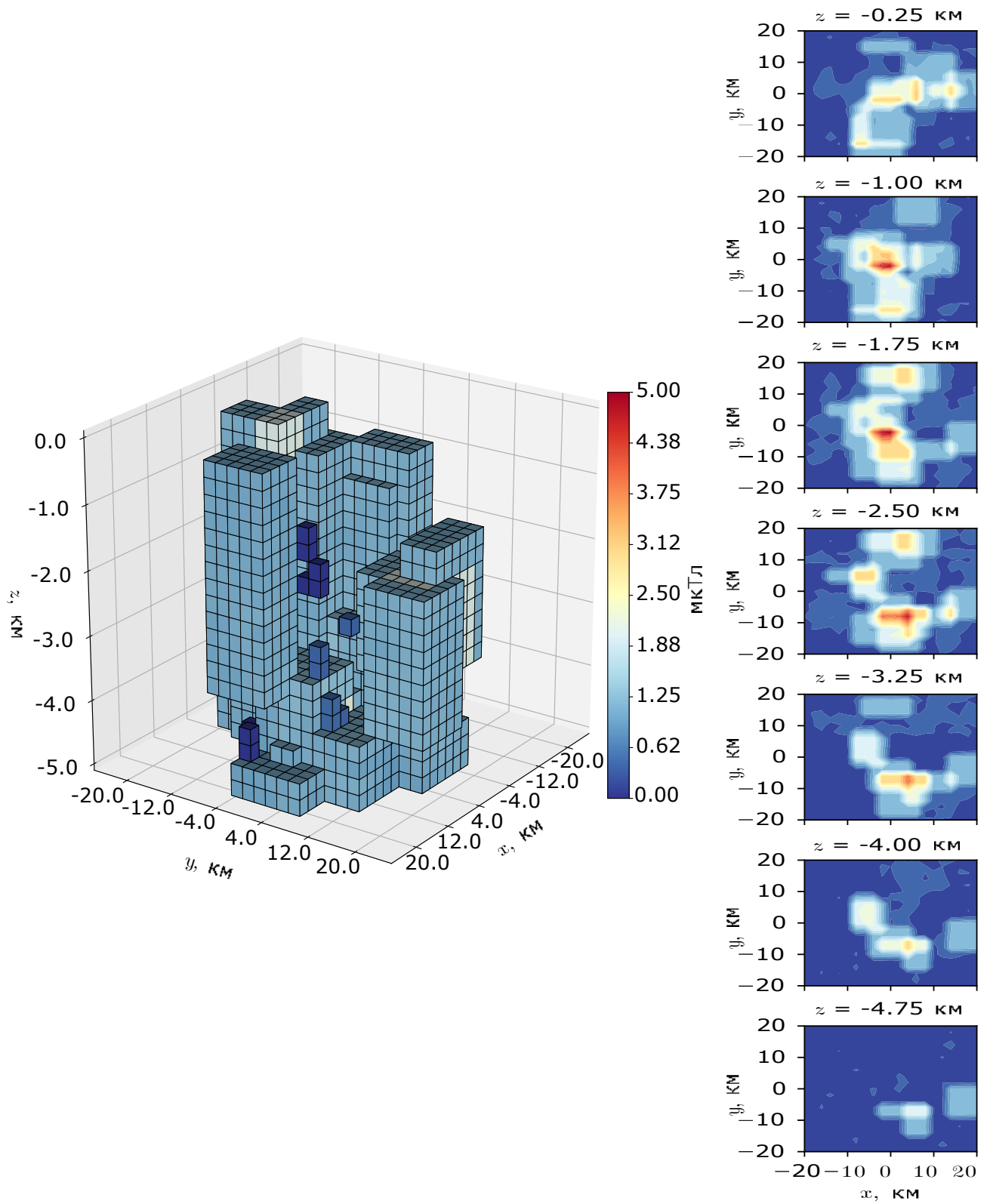


Рис. 7. Восстановленная намагниченность m при использовании функции потерь с физической невязкой

Fig. 7. The restored magnetization m obtained with the loss containing a physics residual

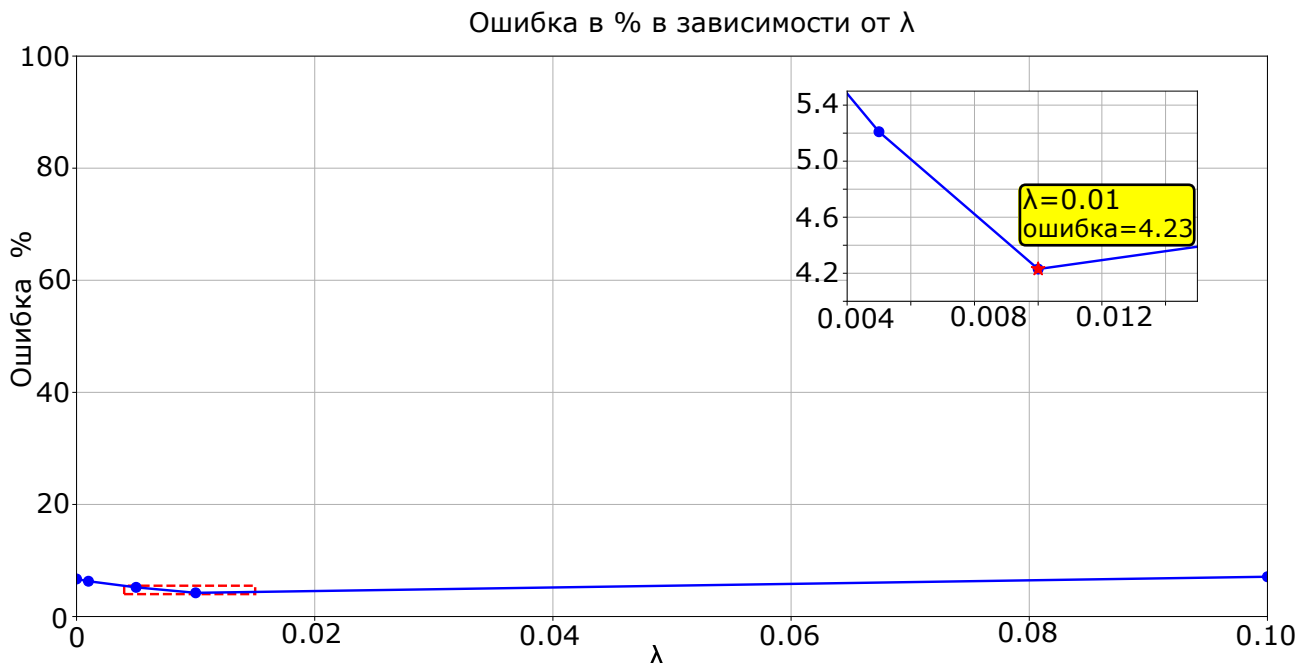


Рис. 8. Зависимость относительной L_2 -ошибки на валидационной выборке от значения весового коэффициента λ в функции потерь с физической невязкой; итоговая ошибка на тестовой выборке декларируется после фиксации λ

Fig. 8. The dependence of the relative L_2 error on the validation set on the weighting factor λ in the loss with a physics residual; the final test-set error is reported after λ is fixed

Одним из ключевых аспектов предложенной методики является выбор архитектуры нейронной сети. В работе в качестве базовой модели использована сверточная архитектура типа U-Net, которая показала хорошую способность к восстановлению трехмерных структур. Вместе с тем это лишь один из возможных вариантов. Перспективными альтернативами могут служить более современные архитектуры, такие как Vision Transformer, Residual U-Net или гибридные модели с attention-механизмами. Выбор конкретной архитектуры обычно подбирается под конкретную задачу, она существенно влияет на качество аппроксимации сложных нелинейных зависимостей между наблюдаемыми полями и распределениями источников, а также на устойчивость обучения.

Важным элементом методики является формирование обучающего датасета. В условиях ограниченной доступности реальных геофизических данных с достоверно известной трехмерной структурой источников генерация синтетических моделей остается стандартной практикой. Примененный в работе стохастический алгоритм генерации рудных тел на основе комбинаций прямоугольных призм позволил получить набор разнообразных геометрических конфигураций. Однако остается ряд нерешенных вопросов. Во-первых, реальные геологические сценарии часто включают более сложные формы тел, переменные значения плотности и намагниченности внутри одного объекта, а также наличие нескольких типов рудных тел с различными физическими свойствами. Во-вторых, построение универсальных датасетов, способных охватывать широкий диапазон плотностей и намагниченностей, значительно усложняет задачу и требует дополнительных исследований по балансировке классов и увеличению разнообразия моделей.

Отдельное внимание в работе было уделено анализу функций потерь. Численные эксперименты подтвердили, что выбор функционала потерь существенно влияет на устойчивость, скорость обучения и точность реконструкции. Функция Хьюбера демонстрирует большую устойчивость к выбросам по сравнению с MSE и MAE. Наименьшая ошибка в проведенных синтетических экспериментах получена при использовании функции потерь с физической невязкой прямой задачи, которая дополнительно учитывает уравнения модели. Вместе с тем применение такого функционала приводит к заметному увеличению времени обучения по сравнению с классическими функциями потерь. Это связано с необходимостью вычисления дополнительных членов невязки прямых задач на каждом шаге оптимизации. Вопрос оптимального баланса между точностью и вычислительной стоимостью физической регуляризации требует дальнейшего изучения.



Еще одним важным аспектом является вычислительная эффективность метода. После завершения этапа обучения нейронная сеть обеспечивает практически мгновенное за 0.2 с восстановление трехмерной модели по новым синтетическим данным, заданным на той же сетке (один прямой проход). Однако сам процесс обучения, особенно при использовании функции потерь с физической невязкой, остается ресурсоемким. Перспективными направлениями ускорения расчетов являются: использование смешанной точности (mixed precision), распределенное обучение на нескольких GPU, оптимизация матричных операций прямых задач и применение методов аппроксимации (например, surrogate-моделей) для быстрого вычисления членов $R(\hat{\rho}, \hat{m})$.

Несмотря на полученные положительные результаты, предложенный подход имеет ряд ограничений. В частности, в работе рассматривалась упрощенная модель индуцированной намагниченности с фиксированным направлением вектора. В реальных условиях возможны остаточная намагниченность и пространственные вариации направления магнитного момента. Кроме того, использовались только скалярные характеристики полей, в то время как современные системы позволяют получать полные векторные и тензорные данные.

Для более полной статистической проверки метода необходимы дополнительные серии экспериментов: факторный план “функция потерь × аугментация”, несколько запусков с различной случайной инициализацией, тесты на зашумленных данных и разных шагах дискретизации, а также сравнение с распространенными пакетами и постановками классической инверсии, включая SimPEG, UBC-GIF, Gramian- и cross-gradient-подходы. Эти исследования выходят за рамки настоящей работы и рассматриваются как направление дальнейшего развития.

6. Выводы. Предложен и реализован нейросетевой подход к совместной инверсии гравитационных и магнитных полей, ориентированный на восстановление трехмерной структуры рудных тел. Метод основан на использовании сверточной архитектуры типа U-Net и обучении на синтетическом датасете, сформированном с помощью стохастической генерации трехмерных моделей источников по формулам прямых задач.

Численные эксперименты показали, что выбор функции потерь существенно влияет на качество восстановления. В рамках рассмотренной синтетической выборки и одного детально проанализированного тестового объекта наименьшая ошибка получена при использовании функции потерь с физической невязкой прямой задачи, которая дополнительно учитывает уравнения модели. При этом применение такого функционала увеличивает время обучения, но в проведенных экспериментах улучшает точность и физическую согласованность реконструкции. Кроме того, предложенный подход демонстрирует высокую вычислительную эффективность на этапе применения модели в рамках заданной дискретизации: восстановление по новому синтетическому примеру сводится к одному прямому проходу через сеть.

Важным элементом методики является использование синтетического датасета. Стохастический алгоритм генерации позволил сформировать разнообразный набор геометрических конфигураций форм плотностей источников, что увеличивает обобщающую способность модели. Совместная обработка гравитационных и магнитных данных обеспечивает заметное снижение неопределенности решения по сравнению с раздельной интерпретацией.

Сравнение результатов нейросетевой инверсии с решениями, полученными методом дискретного потенциала, показало, что в рассмотренном тестовом примере предложенный подход корректно восстанавливает основные геометрические характеристики рудного тела при меньших временных затратах на этапе применения.

Полученные результаты подтверждают перспективность применения методов глубокого обучения как инструмента для быстрого восстановления модельных трехмерных распределений источников после предварительного обучения на фиксированной сетке. Область применимости методов ограничена синтетическими данными, сеткой 21^3 , фиксированным направлением индуцированной намагниченности, использованием скалярных характеристик полей и отсутствием проверки на реальных полевых данных.

Дальнейшее развитие работы должно быть связано с расширением модели на более сложные геофизические сценарии (учет остаточной намагниченности, переменных физических параметров, полных векторных и тензорных данных), переходом к более высоким разрешениям, созданием универсальных датасетов с переменными плотностями и намагниченностями, а также разработкой гибридных алгоритмов, объединяющих быстрые нейросетевые методы с классическими регуляризирующими подходами. В такой постановке нейронная сеть может служить для получения качественного начального приближения, которое затем уточняется итерационными методами с оценкой погрешности.

Таким образом, предложенный метод формирует основу для разработки интеллектуальных систем комплексной интерпретации геофизических данных; его практическое использование в задачах геолого-разведки требует дальнейшей адаптации к более высоким разрешениям, реальным шумам наблюдений и более сложным геологическим моделям.

Список литературы

1. Hu Y., Wei X., Wu X., et al. A deep learning-enhanced framework for multiphysics joint inversion // *Geophysics*. 2023. **88**, N 1. K13–K26. doi [10.1190/geo2021-0589.1](https://doi.org/10.1190/geo2021-0589.1).
2. Vatankhah S., Huang X., Renaut R.A., et al. Joint Gramian inversion of gravity, magnetic and gravity gradient tensor data for the modelling of Mesoproterozoic iron oxide deposits, southeast Missouri, USA // *Geophysical Journal International*. 2023. **235**, N 2. 1064–1085. doi [10.1093/gji/ggad290](https://doi.org/10.1093/gji/ggad290).
3. Liu S., Wan X., Jin S., et al. Fast 3D joint inversion of gravity and magnetic data based on cross-gradient constraint // *Geodesy and Geodynamics*. 2023. **14**, N 4. 331–346. doi [10.1016/j.geog.2022.12.003](https://doi.org/10.1016/j.geog.2022.12.003).
4. Gallardo L.A., Meju M.A. Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2004. **109**, N B3. doi [10.1029/2003JB002716](https://doi.org/10.1029/2003JB002716).
5. Wei N., Yang D., Wang Z., Lu Y. Joint 3D inversion of gravity and magnetic data using deep learning neural networks // *Proceedings of the Second International Meeting for Applied Geoscience & Energy*, Houston, Texas, USA, August 28 – September 1, 2022. ASME, 2022. pp. 1457–1461. doi [10.1190/image2022-3751223.1](https://doi.org/10.1190/image2022-3751223.1).
6. Zhou Z., Wang J., Meng X., Fang Y. 3-D joint inversion of gravity and magnetic data based on a deep learning network with automatic recognition of structural similarity // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2023. **61**. 1–16. doi [10.1109/TGRS.2023.3330988](https://doi.org/10.1109/TGRS.2023.3330988).
7. Li Y., Lu W., Jia Z., Song C. Two-stage deep learning for 3D joint inversion of gravity and magnetic // *Proceedings of the Third International Meeting for Applied Geoscience & Energy*, Houston, Texas, USA, August 27 – September 1, 2023. ASME, 2023. pp. 1030–1034. doi [10.1190/image2023-3900861.1](https://doi.org/10.1190/image2023-3900861.1).
8. Jiao J., Dong S., Zhou S., et al. 3-D gravity and magnetic joint inversion based on deep learning combined with measurement data constraint // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2024. **62**. 1–14. doi [10.1109/TGRS.2023.3339303](https://doi.org/10.1109/TGRS.2023.3339303).
9. Bai Z., Wang Y., Wang C., et al. Joint gravity and magnetic inversion using CNNs' deep learning // *Remote Sensing*. 2024. **16**, N 7. Article Number 1115. doi [10.3390/rs16071115](https://doi.org/10.3390/rs16071115).
10. Ван Я., Чурбанов Д.В., Аргун Р.Л. и др. Структурный двухуровневый нейросетевой подход к совместной инверсии гравитационных и магнитных полей // *Вычислительные методы и программирование*. 2025. **26**, № 3. 322–339. doi [10.26089/NumMet.v26r322](https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r322).
11. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function // *Mathematics of Control, Signals, and Systems*. 1989. **2**, N 4. 303–314. doi [10.1007/BF02551274](https://doi.org/10.1007/BF02551274).
12. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: convolutional networks for biomedical image segmentation // *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention — MICCAI 2015. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 9351. Cham: Springer, 2015. pp. 234–241. doi [10.1007/978-3-319-24574-4_28](https://doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4_28).
13. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // *Journal of Computational Physics*. 2019. **378**. 686–707. doi [10.1016/j.jcp.2018.10.045](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045).
14. NVIDIA Deep Learning Performance. <https://docs.nvidia.com/deeplearning/performance/mixed-precision-training/index.html>. Cited September 19, 2026.
15. Loshchilov I., Hutter F. Decoupled weight decay regularization // *International Conference on Learning Representations (ICLR)*. 2019. <https://openreview.net/forum?id=Bkg6RiCqY7>. Cited September 19, 2026.
16. Stepanova I.E., Kolotov I.I., Levashov A.N., Gorbachev A.V. On finding stable approximate solutions of linear inverse problems of gravimetry in the discrete potential theory: a local version // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2025. **61**, N 1. 126–141. doi [10.1134/S1069351325700089](https://doi.org/10.1134/S1069351325700089).



Информация об авторах

Александр Викторович Горбачев — аспирант; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 1, стр. 2, 119992, Москва, Российская Федерация.

Андрей Николаевич Левашов — аспирант; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 1, стр. 2, 119992, Москва, Российская Федерация.

Дмитрий Владимирович Чурбанов — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр.; Московский физико-технический институт, кафедра высшей математики, Институтский пер., 9, 141700, Долгопрудный, Российская Федерация.

Инна Эдуардовна Степанова — д.ф.-м.н., профессор РАН, гл. науч. сотр.; Институт физики Земли имени О. Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская, 10, 123242, Москва, Российская Федерация.

References

1. Y. Hu, X. Wei, X. Wu, et al., “A deep learning-enhanced framework for multiphysics joint inversion,” *Geophysics* **88** (1), K13–K26 (2023). doi [10.1190/geo2021-0589.1](https://doi.org/10.1190/geo2021-0589.1).
2. S. Vatankhah, X. Huang, R. A. Renaut, et al., “Joint Gramian inversion of gravity, magnetic and gravity gradient tensor data for the modelling of Mesoproterozoic iron oxide deposits, southeast Missouri, USA,” *Geophys. J. Int.* **235** (2), 1064–1085 (2023). doi [10.1093/gji/ggad290](https://doi.org/10.1093/gji/ggad290).
3. S. Liu, X. Wan, S. Jin, et al., “Fast 3D joint inversion of gravity and magnetic data based on cross-gradient constraint,” *Geodesy and Geodynamics* **14** (4), 331–346 (2023). doi [10.1016/j.geog.2022.12.003](https://doi.org/10.1016/j.geog.2022.12.003).
4. L. A. Gallardo and M. A. Meju, “Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints,” *J. Geophys. Res.: Solid Earth* **109** (B3) (2004). doi [10.1029/2003JB002716](https://doi.org/10.1029/2003JB002716).
5. N. Wei, D. Yang, Z. Wang, and Y. Lu, “Joint 3D Inversion of Gravity and Magnetic Data Using Deep Learning Neural Networks,” in *Proceedings of the Second International Meeting for Applied Geoscience & Energy, Houston, Texas, USA, August 28 – September 1, 2022* (ASME, 2022), pp. 1457–1461. doi [10.1190/image2022-3751223.1](https://doi.org/10.1190/image2022-3751223.1).
6. Z. Zhou, J. Wang, X. Meng, and Y. Fang, “3-D Joint Inversion of Gravity and Magnetic Data Based on a Deep Learning Network With Automatic Recognition of Structural Similarity,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **61**, 1–16 (2023). doi [10.1109/TGRS.2023.3330988](https://doi.org/10.1109/TGRS.2023.3330988).
7. Y. Li, W. Lu, Z. Jia, and C. Song, “Two-Stage Deep Learning for 3D Joint Inversion of Gravity and Magnetic,” in *Proceedings of the Third International Meeting for Applied Geoscience & Energy, Houston, Texas, USA, August 27 – September 1, 2023* (ASME, 2023), pp. 1030–1034. doi [10.1190/image2023-3900861.1](https://doi.org/10.1190/image2023-3900861.1).
8. J. Jiao, S. Dong, S. Zhou, et al., “3-D Gravity and Magnetic Joint Inversion Based on Deep Learning Combined with Measurement Data Constraint,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **62**, 1–14 (2024). doi [10.1109/TGRS.2023.3339303](https://doi.org/10.1109/TGRS.2023.3339303).
9. Z. Bai, Y. Wang, C. Wang, et al., “Joint Gravity and Magnetic Inversion Using CNNs’ Deep Learning,” *Remote Sensing* **16** (7), Article Number 1115 (2024). doi [10.3390/rs16071115](https://doi.org/10.3390/rs16071115).
10. Y. Wang, D. V. Churbanov, R. L. Argun, et al., “A structural two-level neural network approach to joint inversion of gravitational and magnetic fields,” *Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programirovanie)* **26** (3), 322–339 (2025). doi [10.26089/NumMet.v26r322](https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r322).
11. G. Cybenko, “Approximation by superpositions of a sigmoidal function,” *Mathematics of Control, Signals, and Systems* **2** (4), 303–314 (1989). doi [10.1007/BF02551274](https://doi.org/10.1007/BF02551274).
12. O. Ronneberger, P. Fischer, and T. Brox, “U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation,” in *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention — MICCAI 2015, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 9351* (Springer, Cham, 2015), pp. 234–241. doi [10.1007/978-3-319-24574-4_28](https://doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4_28).
13. M. Raissi, P. Perdikaris, and G. E. Karniadakis, “Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems Involving Nonlinear Partial Differential Equations,” *J. Comput. Phys.* **378**, 686–707 (2019). doi [10.1016/j.jcp.2018.10.045](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045).
14. NVIDIA Deep Learning Performance. <https://docs.nvidia.com/deeplearning/performance/mixed-precision-training/index.html>. Cited September 19, 2026.
15. I. Loshchilov and F. Hutter, “Decoupled Weight Decay Regularization,” *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2019. <https://openreview.net/forum?id=Bkg6RiCqY7>. Cited September 19, 2026.

16. I. E. Stepanova, I. I. Kolotov, A. N. Levashov, and A. V. Gorbachev, “On Finding Stable Approximate Solutions of Linear Inverse Problems of Gravimetry in the Discrete Potential Theory: A Local Version,” *Izvestiya, Physics of the Solid Earth* **61** (1), 126–141 (2025). doi [10.1134/S1069351325700089](https://doi.org/10.1134/S1069351325700089).

Received
June 2, 2026

Accepted
August 14, 2026

Published
October 20, 2026

Information about the authors

Alexander V. Gorbachev — Graduate Student; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie Gory, 1, building 2, 119992, Moscow, Russia.

Andrey N. Levashov — Graduate Student; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie Gory, 1, building 2, 119992, Moscow, Russia.

Dmitry V. Churbanov — Ph. D., Senior Scientist; Moscow Institute of Physics and Technology, Department of Higher Mathematics, Institutsky pereulok, 9, 141700, Dolgoprudny, Russia.

Inna E. Stepanova — Doctor of Science, Professor of RAS, Chief Researcher; Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Bolshaya Gruzinskaya ulitsa, 10, 123242, Moscow, Russia.