УДК 519.6

СХЕМА ГОРНЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНО-МАТРИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ

В. С. Муха[1], **К. С. Корчиц**[1]

В статье рассматривается схема Горнера для расчета многомерно-матричных полиномов многомерно-матричного аргумента и анализируется ее вычислительная сложность.

Ключевые слова: схема Горнера, многомерно-матричные полиномы, вычислительная сложность.

1. Введение. Многомерно-матричные полиномы. В настоящее время для решения многих многомерных задач находит применение многомерно-матричный подход, использующий в качестве переменных понятие многомерной матрицы [1, 2]. Одним из приемов решения нелинейных многомерных задач является аппроксимация имеющихся многомерных зависимостей многомерно-матричными полиномиальными рядами. При этом возникает необходимость разработки эффективных схем расчета значений многомерно-матричных полиномов многомерно-матричного аргумента, как это имеет место при расчете значений ортогональных полиномов векторной переменной [3, 4]. В данной статье для этих целей предложена схема Горнера и анализируется ее вычислительная сложность.

Пусть y — p-мерная матрица, а x — q-мерная матрица (см. приложение 2):

$$y = (y_{i_1,i_2,\dots,i_p}), \quad i_1 = \overline{1,m_1}, \quad \dots, \quad i_p = \overline{1,m_p},$$
$$x = (x_{j_1,j_2,\dots,j_q}), \quad j_1 = \overline{1,n_1}, \quad \dots, \quad j_q = \overline{1,n_q}.$$

Однородный p-мерно-матричный полином k-й степени q-мерно-матричной переменной x имеет следующее представление [3, 4]:

$$y = {}^{0,kq}(c_k x^k), \tag{1}$$

где x^k — $(0,0)$-свернутая k-я степень матрицы x, $c_k = (c_{\alpha,\beta})$ — $(p+kq)$-мерная матрица коэффициентов. Мультииндекс α этой матрицы содержит p индексов. Мультииндекс β состоит из k мультииндексов, каждый из которых содержит q индексов. Матрица c_k должна быть симметричной при $k \geqslant 2$ относительно k своих последних мультииндексов.

Произвольный p-мерно-матричный полином m-й степени q-мерно-матричной переменной x является суммой однородных полиномов (1)

$$y = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(c_k x^k), \tag{2}$$

где по определению принято $x^0 = 1$.

Если в (2) $p = 0$, $q = 0$, то мы имеем известный скалярный полином скалярной переменной x:

$$y = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m. \tag{3}$$

Если в (2) $p = 1$, $q = 1$, то мы имеем векторный полином $y = (y_1, y_2, \dots, y_{m_1})$ векторной переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$:

$$y = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,k}(b_k x^k),$$

где b_k — $(k+1)$-мерные симметричные при $k \geqslant 2$ относительно своих k последних индексов матрицы.

2. Схема Горнера для многомерно-матричного полинома. Для расчета скалярного полинома скалярной переменной (3) известна схема Горнера [5], при использовании которой уменьшается алгоритмическая сложность и повышается точность расчетов. В связи с этим представляется целесообразной

[1] Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (БГУИР), кафедра информационных технологий автоматизированных систем, ул. П. Бровки, 6, г. Минск, Беларусь; e-mail: mukha@gw.bsuir.unibel.by

разработка такой же схемы для многомерно-матричного полинома (2). Для этого запишем его в развернутой форме:

$$y(x) = c_0 + {}^{0,q}(c_1 x) + {}^{0,2q}(c_2 x^2) + \dots + {}^{0,(m-1)q}(c_{m-1} x^{m-1}) + {}^{0,mq}(c_m x^m) \tag{4}$$

и представим в виде

$$y(x) = {}^{0,0}\Big(\big(b_1 + {}^{0,q}(b_2 x) + \dots + {}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2}) + {}^{0,(m-1)q}(b_m x^{m-1})\big)(x - x^{(0)})\Big) + b_0. \tag{5}$$

Раскроем скобки в (5). Для иллюстрации выполним это для отдельного слагаемого в (5):

$$\begin{aligned} {}^{0,0}\big({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})(x - x^{(0)})\big) &= {}^{0,0}\big({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})x\big) + {}^{0,0}\big({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})x^{(0)}\big) = \\ &= {}^{0,(m-2)q}\big(b_{m-1} x^{m-1}\big) + {}^{0,(m-2)q}\big(b_{m-1}\, {}^{0,0}(x^{m-2} x^{(0)})\big). \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая симметричность матрицы b_{m-1} относительно последних мультииндексов, можно показать (см. приложение 1), что

$${}^{0,(m-2)q}\big(b_{m-1}\, {}^{0,0}(x^{m-2} x^{(0)})\big) = {}^{0,(m-2)q}\big(b_{m-1}\, {}^{0,0}(x^{(0)} x^{m-2})\big) = {}^{0,(m-1)q}\big({}^{0,q}(b_{m-1} x^{(0)}) x^{m-2}\big),$$

и вместо (6) получим

$${}^{0,0}\big({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})(x - x^{(0)})\big) = {}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-1}) + {}^{0,(m-1)q}\big({}^{0,q}(b_{m-1} x^{(0)}) x^{m-2}\big).$$

Этот результат позволяет нам после раскрытия скобок в (5) приравнять коэффициенты полиномов (4) и (5) при одинаковых степенях x. В итоге получим соотношения

$$c_m = b_m, \quad c_{m-1} = -{}^{0,q}(b_m x^{(0)}) + b_{m-1}, \quad \dots, \quad c_j = -{}^{0,q}(b_{j+1} x^{(0)}) + b_j, \quad \dots, \quad c_0 = -{}^{0,q}(b_1 x^{(0)}) + b_0.$$

Отсюда получаем алгоритм: $b_m = c_m$, $b_j = c_j + {}^{0,q}(b_{j+1} x^{(0)})$, $j = m-1, m-2, \dots, 0$. Если учесть, что в конце расчетов по данному алгоритму мы получаем коэффициент b_0 и что $y(x^{(0)}) = b_0$, то становится ясно, что мы получили алгоритм расчета значения многомерно-матричного полинома (2) при значении аргумента $x^{(0)}$. Ввиду произвольности $x^{(0)}$ верхний индекс в обозначении аргумента можно опустить. В итоге получаем следующий алгоритм расчета значения полинома (2) при любом x:

$$b_m = c_m, \quad b_j = c_j + {}^{0,q}(b_{j+1} x), \quad j = m-1, m-2, \dots, 0, \quad y(x) = b_0. \tag{7}$$

Это и есть схема Горнера для многомерно-матричного полинома (2).

Схема Горнера реализована в пакете программ “Анализ многомерных данных” для расчета значений скалярного полинома векторной переменной произвольной степени [6, 7].

3. Вычислительная сложность. Определим вычислительную сложность скалярного полинома векторной переменной при расчете по общей схеме (2) и по схеме Горнера (7). В этом случае в формулах (2) и (7) имеем $p = 0$, $q = 1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е.

$$y = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,k}(c_k x^k), \tag{8}$$

$$b_m = c_m, \quad b_j = c_j + {}^{0,1}(b_{j+1} x), \quad j = m-1, m-2, \dots, 0, \quad y(x) = b_0. \tag{9}$$

Будем исходить из того, что для вычисления произведения (суммы) n чисел требуется n умножений (сложений) в предположении, что расчет произведения начинается с единицы, а суммы — с нуля.

Начнем с общей схемы (8). Для расчета x^k требуется kn^k умножений, для расчета $y_k = {}^{0,k}(c_k x^k)$ необходимо n^k умножений и n^k сложений, а для расчета $y = \sum\limits_{k=0}^{m} y_k$ — $(m+1)$ сложений. В итоге для расчета полинома по общей схеме (8) требуется выполнить $N_{\text{ум. общ.}}$ умножений и $N_{\text{сл. общ.}}$ сложений [8]:

$$N_{\text{ум. общ.}} = \sum_{k=0}^{m} kn^k + \sum_{k=0}^{m} n^k = \frac{n + (mn - m - 1)n^{m+1}}{(1-n)^2} + \frac{1 - n^{m+1}}{1-n},$$

$$N_{\text{сл. общ.}} = \sum_{k=0}^{m} n^k + (m+1) = \frac{1 - n^{m+1}}{1-n} + m + 1.$$

В схеме Горнера (9) матрица b_j — j-мерная. На отдельной итерации расчет

$$d_j = {}^{0,1}(b_{j+1}x) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{i_1,i_2,\ldots,i_j,\nu} x_\nu$$

требует n^{j+1} умножений и n^{j+1} сложений, а расчет $b_j = c_j + d_j$ требует n^j сложений. Суммируя по всем итерациям $j = \overline{0, m-1}$, получаем, что для расчета полинома по схеме Горнера (9) требуется выполнить $N_{\text{ум. Гор.}}$ умножений и $N_{\text{сл. Гор.}}$ сложений:

$$N_{\text{ум. Гор.}} = \sum_{j=0}^{m-1} n^{j+1} = n\,\frac{1-n^m}{1-n},$$

$$N_{\text{сл. Гор.}} = \sum_{j=0}^{m-1} n^{j+1} + \sum_{j=0}^{m-1} n^j = n\,\frac{1-n^m}{1-n} + \frac{1-n^m}{1-n} = (n+1)\,\frac{1-n^m}{1-n}.$$

В таблице приведено число умножений для схемы Горнера (верхние числа) и для общей схемы (нижние числа) для значений $n = \overline{1, 10}$ и $m = \overline{1, 4}$. Таблица показывает выигрыш от использования схемы Горнера. Например, для полинома четвертой степени от 10 переменных число умножений по схеме Горнера примерно в пять раз меньше, чем по общей схеме. С возрастанием n и m выигрыш возрастает.

	n									
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
2	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110
	6	17	34	57	86	121	162	209	262	321
3	3	14	39	84	155	258	399	584	819	1110
	10	49	142	313	586	985	1534	2257	3178	4321
4	4	30	120	340	780	1554	2800	4680	7380	11110
	15	129	547	1593	3711	7465	13539	22737	35983	54321

4. Приложение 1. Теорема. *Если x_i — q-мерные матрицы вида $x_i = (x_{i,j})$, где j — q-мультииндекс, $i = \overline{1, m}$, и $c_m = (c_{\alpha,j_1,j_2,\ldots,j_m})$, где α — p-мультииндекс, $j_1, j_2, \ldots, j_m$ — q-мультииндексы, причем c_m — симметричные при $m \geqslant 2$ относительно m своих последних q-мультииндексов матрицы, то выполняются равенства*

$$\begin{aligned} {}^{0,mq}\bigl(c_m\,{}^{0,0}(x_1 x_2 \ldots x_m)\bigr) &= {}^{0,mq}\bigl(c_m\,{}^{0,0}(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m})\bigr) = \\ &= {}^{0,(m-s)q}\Bigl({}^{0,sq}\bigl(c_m\,{}^{0,0}(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s})\bigr)\,{}^{0,0}(x_{i_{s+1}} x_{i_{s+2}} \ldots x_{i_m})\Bigr), \end{aligned} \tag{10}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — любая перестановка чисел $(1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство. Обозначим выражение в левой части (10) через v и раскроем его:

$$v = {}^{0,mq}\bigl(c_m\,{}^{0,0}(x_1 x_2 \ldots x_m)\bigr) = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_m} c_{\alpha,j_1,j_2,\ldots,j_m} x_{1,j_1} x_{2,j_2} \ldots x_{m,j_m}. \tag{11}$$

Поскольку $x_{1,j_1}, x_{2,j_2}, \ldots, x_{m,j_m}$ — скалярные величины, то в произведении их можно менять местами, т.е. записать, что $x_{1,j_1} x_{2,j_2} \ldots x_{m,j_m} = x_{i_1,j_{i_1}} x_{i_2,j_{i_2}} \ldots x_{i_m,j_{i_m}}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — любая перестановка чисел $(1, 2, \ldots, m)$. Тогда для правой части выражения (11) получим

$$\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_m} c_{\alpha,j_1,j_2,\ldots,j_m} x_{1,j_1} x_{2,j_2} \ldots x_{m,j_m} = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_m} c_{\alpha,j_1,j_2,\ldots,j_m} x_{i_1,j_{i_1}} x_{i_2,j_{i_2}} \ldots x_{i_m,j_{i_m}}. \tag{12}$$

В силу симметрии матрицы c_m мы имеем также равенство $c_{\alpha,j_1,j_2,\ldots,j_m} = c_{\alpha,j_{i_1},j_{i_2},\ldots,j_{i_m}}$, с учетом которого вместо (12) и (11) получим

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_m} c_{\alpha,j_1,j_2,\ldots,j_m} x_{1,j_1} x_{2,j_2} \ldots x_{m,j_m} = \\ &= \sum_{j_{i_1},j_{i_2},\ldots,j_{i_m}} c_{\alpha,j_{i_1},j_{i_2},\ldots,j_{i_m}} x_{i_1,j_{i_1}} x_{i_2,j_{i_2}} \ldots x_{i_m,j_{i_m}} = {}^{0,mq}\bigl(c_m\,{}^{0,0}(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m})\bigr), \end{aligned}$$

что и доказывает первое равенство в (10). Второе равенство в (10) получается по определению $(0,\mu)$-свернутого произведения многомерных матриц.

5. Приложение 2. Многомерной (p-мерной) $(n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p)$ матрицей

$$A = (a_{i_1,i_2,\ldots,i_p}), \quad i_\alpha = \overline{1,n_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{13}$$

называется система чисел или переменных $a_{i_1,i_2,\ldots,i_p}$, расположенных в точках p-мерного пространства, определяемого координатами $i_1, i_2, \ldots, i_p$ [2]. В случае различных $n_1, n_2, \ldots, n_p$ матрица A называется гиперпрямоугольной. Если $n_1 = n_2 = \cdots = n_p = n$, то матрица называется гиперквадратной, или p-мерной матрицей n-го порядка. Определение многомерной матрицы (13) естественным образом обобщает известные понятия скалярной величины, вектора и двумерной матрицы: скаляр, вектор и двумерная матрица являются нуль-, одно- и двумерными матрицами соответственно.

Важнейшим понятием теории многомерных матриц является (λ,μ)-свернутое произведение многомерных матриц. Пусть A — p-мерная матрица (13) и B — q-мерная матрица,

$$B = (b_{j_1,j_2,\ldots,j_q}), \quad j_\alpha = \overline{1,n_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,q}. \tag{14}$$

Для удобства представления многомерных матриц их индексы разбивают на мультииндексы

$$i = (i_1, i_2, \ldots, i_p) = (l, s, c), \quad j = (j_1, j_2, \ldots, j_q) = (c, s, m),$$

где $l = (l_1, l_2, \ldots, l_\kappa)$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_\lambda)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_\mu)$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$ — κ, λ, μ, ν — мультииндексы соответственно, причем $\kappa + \lambda + \mu = p$, $\mu + \lambda + \nu = q$. Тогда матрицы A и B (см. (13) и (14)) можно записать в виде

$$A = A_{(\kappa,\lambda,\mu)} = (a_{l,s,c}), \quad B = B_{(\mu,\lambda,\nu)} = (b_{c,s,m}),$$

где каждый из индексов мультииндексов l, s, c, m пробегает свой диапазон значений. Матрица D, определяемая выражением

$$D = {}^{\lambda,\mu}(A_{(\kappa,\lambda,\mu)} B_{(\mu,\lambda,\nu)}) = \Big(\sum_c a_{l,s,c} b_{c,s,m}\Big) = (d_{l,s,m}), \tag{15}$$

называется (λ,μ)-свернутым произведением матриц A и B. Индексы мультииндекса c, по которому осуществляется суммирование (кэлиевого мультииндекса), и индексы мультииндекса s, общего для множителей и произведения (скоттового мультииндекса), должны пробегать одинаковое число значений.

Важное место занимает $(0,\mu)$-свернутое произведение, когда скоттов мультииндекс s в определении (15) отсутствует ($\lambda = 0$). Известное в теории двумерных матриц произведение, обозначаемое через AB, соответствует $(0,1)$-свернутому многомерно-матричному произведению ${}^{0,1}(AB)$. В случае $(0,0)$-свернутого произведения мультииндексы s и c в определении (15) отсутствуют ($\lambda = 0$, $\mu = 0$), так что суммирование (свертывание) в (15) не выполняется. Например, если $x = (x_i)$, $i = \overline{1,n}$, $y = (y_j)$, $j = \overline{1,m}$, то произведение ${}^{0,0}(xy)$ определяется формулой

$${}^{0,0}(xy) = g = (x_i y_j) = (g_{i,j}), \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m},$$

т.е. представляет собой двумерную прямоугольную матрицу. Аналогично определяется $(0,0)$-свернутая k-я степень вектора $x = (x_i)$:

$${}^{0,0}x^k = {}^{0,0}\Big(x\,{}^{0,0}\big(x\,{}^{0,0}(x \ldots x)\big)\Big) = z = (x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}) = (z_{i_1,i_2,\ldots,i_k}),$$

представляющая собой k-мерную матрицу n-го порядка. Аналогично получаем $(0,0)$-свернутую k-ю степень q-мерной матрицы $x = (x_{j_1,j_2,\ldots,j_q})$, $j_1 = \overline{1,n_1}$, …, $j_q = \overline{1,n_q}$:

$${}^{0,0}x^k = z = (x_{j_1,j_2,\ldots,j_q} x_{j_{q+1},j_{q+2},\ldots,j_{2q}} \ldots x_{j_{(k-1)q+1},j_{(k-1)q+2},\ldots,j_{kq}}) = (z_{j_1,j_2,\ldots,j_{kq}}),$$

которая является kq-мерной гиперпрямоугольной матрицей размера $(n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_q \times \ldots \times n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_q)$.

Поскольку $(0,0)$-свернутое произведение многомерных матриц соответствует произведению скалярных величин, то вместо ${}^{0,0}(AB)$ целесообразно писать AB.

Многомерная матрица A, определенная в (13), называется симметричной относительно двух своих индексов i_α и i_β, если каждые два ее элемента, получающиеся один из другого перестановкой этих индексов, одинаковы, т.е. если

$$a_{i_1,\ldots,i_\alpha,\ldots,i_\beta,\ldots,i_p} = a_{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots,i_\alpha,\ldots,i_p}.$$

Эта матрица называется симметричной относительно нескольких индексов, если она симметрична относительно любой пары из них, и просто симметричной, если она симметрична относительно всех своих индексов. Аналогично определяются матрицы, симметричные относительно своих мультииндексов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Муха В.С.* Анализ многомерных данных. Минск: УП "Технопринт", 2004.
2. *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. Киев: Наукова думка, 1972.
3. *Муха В.С.* Многомерно-матричный подход к теории ортогональных систем полиномов векторной переменной // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2001. №2. 64–68.
4. *Муха В.С.* Системы полиномов векторной переменной, ортогональные с дискретным весом // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2004. № 1. 69–73.
5. *Вержбицкий В.М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). М.: Высшая школа, 2000.
6. *Муха В.С., Корчиц К.С.* Интегрированный в DELPHI пакет научных программ "Анализ многомерных данных" // Известия Белорусской инженерной академии. 2002. 1(13)/2. 246–248.
7. *Муха В.С.* Пакет научных программ "Анализ многомерных данных" // Труды Всероссийской научной конференции "Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB". М.: ИПУ РАН, 2002. 276–284.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.В., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
14.01.2005