

## Оптимизация сетки для рациональных аппроксимаций однонаправленного уравнения Гельмгольца в неоднородной среде

**М. С. Лытаев**

Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр РАН,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация

ORCID: 0000-0001-7082-4716, e-mail: [mikelytaev@gmail.com](mailto:mikelytaev@gmail.com)

**Аннотация:** Предложен алгоритм оптимизации расчетной сетки для конечно-разностных рациональных аппроксимаций двумерного однонаправленного уравнения Гельмгольца в неоднородной среде. Алгоритм совместно определяет продольный и поперечный шаги сетки, а также коэффициент распространения с учетом области значений неоднородного волнового числа. Рассмотрены два типа рациональной аппроксимации оператора распространения: классическая аппроксимация Паде и рациональная интерполяция на отрезке. Показано, что рациональная интерполяция позволяет использовать в 2–3 раза более разреженные сетки по сравнению с аппроксимацией Паде того же порядка при одинаковой допустимой погрешности, что для двумерного уравнения дает увеличение скорости вычислений в 6–9 раз. Преимущество возрастает с увеличением контраста волнового числа и угла распространения. Алгоритм протестирован на задачах тропосферного распространения радиоволн и подводной акустики. Показано, что игнорирование неоднородностей приводит к выбору сеток, которые оказываются значительно разреженнее допустимых, что ведет к неприемлемым ошибкам моделирования.

**Ключевые слова:** распространение волн, параболическое уравнение, оптимизация сетки, аппроксимация Паде, рациональная интерполяция, показатель преломления, подводная акустика, распространение радиоволн.

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 25–71–00028).

**Для цитирования:** Лытаев М.С. Оптимизация сетки для рациональных аппроксимаций однонаправленного уравнения Гельмгольца в неоднородной среде // Вычислительные методы и программирование. 2026. 27, № 2. 302–316. doi 10.26089/NumMet.v27r220.

---

## Mesh optimization for rational approximations of the one-way Helmholtz equation in inhomogeneous media

**Mikhail S. Lytaev**

St. Petersburg Federal Research Center of RAS,  
Saint Petersburg, Russia

ORCID: 0000-0001-7082-4716, e-mail: [mikelytaev@gmail.com](mailto:mikelytaev@gmail.com)

**Abstract:** A computational mesh optimization algorithm is proposed for finite-difference rational approximations of the two-dimensional one-way Helmholtz equation in an inhomogeneous medium. The algorithm jointly determines the longitudinal and transverse grid steps and the propagation coefficient, accounting for the range of the inhomogeneous wavenumber. Two types of rational approximation of the propagation operator are considered: the classical Padé approximation and



rational interpolation on an interval. Rational interpolation yields grids that are 2–3 times sparser than the Padé approximation of the same order for the same error tolerance, which for a two-dimensional equation yields a 6–9 times computational speedup. The advantage grows with the wavenumber contrast and propagation angle. The algorithm is tested on tropospheric radio wave propagation and underwater acoustics problems. Demonstrated, that ignoring the wavenumber variation leads to grids that are too sparse, resulting in unacceptable modeling errors.

**Keywords:** wave propagation, parabolic equation, mesh optimization, Padé approximation, rational interpolation, refractive index, underwater acoustics, radio wave propagation.

**Acknowledgements:** The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 25–71–00028).

**For citation:** M. S. Lytaev, “Mesh optimization for rational approximations of the one-way Helmholtz equation in inhomogeneous media,” Numerical Methods and Programming. 27 (2), 302–316 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r220.

**1. Введение.** Компьютерное моделирование распространения волновых полей в неоднородных средах является фундаментальной задачей математической физики, возникающей в радиофизике [1], вычислительной подводной акустике (ПА) [2], атмосферной акустике [3], медицинском ультразвуке [4], сейсмологии [5] и оптике [6]. Одним из наиболее эффективных и универсальных численных подходов является метод параболического уравнения (ПУ), первоначально предложенный М. А. Леонтовичем и В. А. Фоком [7] для задач тропосферного распространения радиоволн (РРВ). Метод ПУ и его широкоугольное обобщение — метод однонаправленного уравнения Гельмгольца [8] — стали незаменимым инструментом в прикладной волновой физике благодаря своей детерминистической природе и высокой вычислительной эффективности.

Современные реализации указанного метода базируются в основном на рациональной аппроксимации Паде псевдодифференциального оператора распространения [2, 9]. Точность и эффективность получаемой численной схемы критически зависят от нескольких вычислительных параметров: продольного шага сетки  $\Delta x$ , поперечного шага сетки  $\Delta z$ , коэффициента распространения  $\beta$  и порядка аппроксимации Паде. Выбор слишком грубой сетки приводит к неприемлемым ошибкам численной дисперсии, тогда как избыточно мелкая сетка ведет к нерациональному расходу вычислительных ресурсов. Увеличение скорости решения особенно важно в обратных задачах и задачах количественной оценки неопределенности, где прямая задача должна решаться многократно. На практике параметры сетки часто выбираются вручную, что подвержено ошибкам и препятствует интеграции моделей распространения волн в сложные программно-аппаратные комплексы.

Проблема автоматизированного выбора сетки для ПУ рассматривалась в серии работ. В работе [10] дисперсионный анализ конечно-разностной схемы Паде использован для формулировки задачи оптимизации для двумерного однородного случая. Далее [11] этот подход был расширен на трехмерный случай, включая метод расщепления, и выведена формула для оптимального коэффициента распространения. Метод решения задачи оптимизации расчетной сетки ПУ в неоднородной среде для аппроксимации Паде предложен в [12].

В последнее время рациональные аппроксимации, отличные от аппроксимации Паде, вызывают все больший интерес в сообществе метода ПУ. В [13] впервые показано, что рациональная интерполяция оператора однонаправленного уравнения Гельмгольца на отрезке является более точной по сравнению с локальной аппроксимацией Паде. В работе [14] показано, что алгоритм адаптивной аппроксимации Антуласа–Андерсона (adaptive Antoulas–Anderson, ААА) обеспечивает устойчивые рациональные аппроксимации для упруго-жидкостного ПУ, преодолевая неустойчивости, возникающие при использовании аппроксимации Паде. В работе [15] использован рациональный интерполянт ААА–Лоусона для трехмерного векторного оператора распространения в неоднородной среде. Эти работы подтверждают, что рациональные аппроксимации на отрезке являются жизнеспособной и часто превосходящей альтернативой локальной аппроксимации Паде.

В данной работе впервые предложен алгоритм автоматического оптимального выбора коэффициента распространения  $\beta$  и шагов сетки  $\Delta x$  и  $\Delta z$ , учитывающий пространственную неоднородность волнового

числа  $k(x, z)$ . Алгоритм разработан как для классической аппроксимации Паде, так и для метода рациональной интерполяции. Впервые количественно показано, что рациональная интерполяция оператора распространения на отрезке позволяет в 6–9 раз сократить время расчетов за счет более разреженной сетки.

Статья организована следующим образом. Раздел 2 описывает однонаправленное уравнение Гельмгольца и два типа рациональной аппроксимации оператора распространения. В разделе 3 проанализированы ошибки аппроксимации для обоих методов. Задача оптимального выбора вычислительных параметров поставлена и решена в разделе 4. В разделе 5 представлены численные результаты, демонстрирующие работу предложенного алгоритма в различных сценариях тропосферного РРВ и ПА.

**2. Однонаправленное уравнение Гельмгольца и его численное решение.** Рассмотрим двумерное скалярное уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2(x, z) \psi = 0, \tag{1}$$

где  $\psi(x, z)$  — волновое поле,  $x$  — продольная координата,  $z$  — поперечная координата,  $k(x, z) = 2\pi f/c(x, z)$  — локальное волновое число,  $f$  — частота,  $c(x, z)$  — скорость распространения волн и  $\lambda = c/f$  — длина волны.

Волновое поле генерируется начальным условием  $\psi(0, z) = \psi_0(z)$ , где  $\psi_0$  представляет источник излучения. Функция  $\psi$  удовлетворяет граничным условиям на нижней границе (например, импедансным) и верхней границе (например, прозрачным). Волна распространяется преимущественно в положительном направлении оси  $x$ .

Область значений  $k(x, z)$  принципиально различается для двух рассматриваемых областей применения. При тропосферном РРВ показатель преломления  $n = 3 \cdot 10^8/c(x, z) \approx 1$  с высокой точностью (коэффициент преломления отклоняется от единицы на величину порядка  $10^{-4}$ ), так что  $k_{\min} \approx k_{\max}$ . В ПА скорость звука варьируется от  $c \approx 1500$  м/с (вода) до  $c \approx 1700\text{--}2000$  м/с (морское дно), поэтому  $k_{\min}/k_{\max}$  может быть меньше 0.75 — значительно больший относительный разброс.

За подробной постановкой задачи тропосферного РРВ следует обратиться к монографии [1]. Аналогично, постановка задачи распространения акустических волн в подводной среде описана в [2]. Эти две, вообще говоря разные с физической точки зрения задачи, имеют почти идентичную математическую постановку, что позволяет нам рассматривать их совместно в данной работе.

**2.1. Поперечная дискретизация.** Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + H\psi = 0, \quad H\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2(x, z) \psi. \tag{2}$$

Поперечный лапласиан  $\partial^2/\partial z^2$  дискретизируется по схеме Нумерова [16]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx D_{\Delta z} u = \frac{1}{\Delta z^2} \delta^2 (1 + \alpha \delta^2)^{-1} u,$$

где  $\delta^2 u_j = u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}$  и  $\alpha = 0$  для схемы 2-го порядка,  $\alpha = 1/12$  для схемы 4-го порядка.

**2.2. Фурье-анализ и факторизация.** Подставим фурье-представление поля

$$\psi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(x, k_z) e^{ik_z z} dk_z$$

в (2). Тогда поперечный оператор действует на каждую фурье-компоненту через свой спектральный символ  $\zeta(k_z)$ :

$$e^{-ik_z z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{ik_z z} = -k_z^2, \quad e^{-ik_z z} D_{\Delta z} e^{ik_z z} = -\frac{1}{\Delta z^2} \left( 4 \sin^2 \frac{k_z \Delta z}{2} + 16\alpha \sin^4 \frac{k_z \Delta z}{2} \right). \tag{3}$$

Непрерывный символ обозначим  $\zeta = -k_z^2$ , а дискретный символ обозначим  $\zeta_{\Delta z}$ . Уравнение Гельмгольца в спектральной области принимает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + (k^2(x, z) + \zeta) \tilde{\psi} = 0. \tag{4}$$



Раскладывая (4) на прямо- и обратно-распространяющиеся компоненты [2, 8] и пренебрегая обратной волной, вводим медленно меняющуюся огибающую  $u(x, z) = e^{-i\beta x} \psi(x, z)$ . Тогда можно записать пошаговое решение в виде

$$\tilde{u}(x + \Delta x, k_z) = P(\xi) \tilde{u}(x, k_z),$$

где

$$P(\xi) = \exp\left(i\tilde{\beta} \left(\sqrt{1 + \xi} - 1\right)\right), \quad \tilde{\beta} = \beta\Delta x$$

и

$$\xi = \frac{k^2(x, z) + \zeta}{\beta^2} - 1. \tag{5}$$

Здесь  $\beta$  — коэффициент распространения, свободный параметр, далее оптимизируемый алгоритмом.

Для непрерывного оператора  $\zeta = -k_z^2$  и  $\xi = (k^2 - k_z^2)/\beta^2 - 1$ , где  $k_z = k \sin \theta$  для угла распространения  $\theta$ . Для дискретного оператора

$$\xi_d = \frac{k^2(x, z) + \zeta_{\Delta z}}{\beta^2} - 1 = -\frac{4}{\beta^2 \Delta z^2} \left( \sin^2 \frac{k_z \Delta z}{2} + 4\alpha \sin^4 \frac{k_z \Delta z}{2} \right) + \frac{k^2(x, z)}{\beta^2} - 1. \tag{6}$$

**2.3. Рациональная аппроксимация оператора распространения.** Оператор распространения  $P(\xi)$  аппроксимируется рациональной функцией вида

$$P(\xi) \approx \tilde{P}(\xi) = c_0 \frac{1 + \tilde{a}_1 \xi + \dots + \tilde{a}_m \xi^m}{1 + \tilde{b}_1 \xi + \dots + \tilde{b}_n \xi^n} = c_0 \prod_{l=1}^p \frac{1 + a_l \xi}{1 + b_l \xi},$$

где  $c_0, a_l, b_l$  — коэффициенты рациональной аппроксимации порядка  $[m/n]$ ,  $p = \max(m, n)$ . Коэффициенты могут быть получены различными методами, указанными в следующих разделах.

После применения обратного преобразования Фурье шаг распространения сводится к решению  $p$  трехдиагональных систем:

$$\begin{cases} (1 + b_1 L) v_1 = (1 + a_1 L) u^j, \\ \vdots \\ (1 + b_l L) v_l = (1 + a_l L) v_{l-1}, & l = 2, \dots, p-1, \\ \vdots \\ (1 + b_p L) u^{j+1} = (1 + a_p L) v_{p-1} \end{cases}$$

с поперечным оператором

$$Lu = \frac{1}{\beta^2} D_{\Delta z} u + \left( \frac{k^2(x, z)}{\beta^2} - 1 \right) u.$$

Таким образом, ошибка на каждом шаге имеет два источника: 1) *ошибка рациональной аппроксимации*, обусловленная аппроксимацией  $P(\xi)$ , и 2) *ошибка поперечной дискретизации*, обусловленная  $\zeta \neq \zeta_{\Delta z}$ , т. е.  $\xi \neq \xi_d$ .

**2.4. Рациональная интерполяция на отрезке.** Классическим подходом является использование рациональной аппроксимации Паде [2] функции  $P(\xi)$  в точке  $\xi = 0$ . Обычно используются аппроксимации Паде порядка  $[p - 1/p]$ , которые являются L-устойчивыми [17] и обеспечивают затухание вертикально распространяющихся и эванесцентных волн.

Аппроксимация Паде наиболее точна вблизи  $\xi = 0$ , при этом ошибка монотонно возрастает с увеличением  $|\xi|$ , как это показано на рис. 1. В неоднородной среде переменная  $\xi$  варьируется в широком диапазоне, который может быть далек от нуля (табл. 1), что делает аппроксимацию Паде неоптимальной.

Альтернативой является определение коэффициентов  $a_l, b_l, c_0$  путем аппроксимации  $P(\xi)$  непосредственно на требуемом промежутке  $[\xi_a, \xi_b]$  с помощью рациональной интерполяции [13, 18]. Ключевое преимущество рациональной интерполяции состоит в том, что ошибка аппроксимации распределяется почти равномерно по  $[\xi_a, \xi_b]$ , тогда как аппроксимация Паде концентрирует точность вблизи  $\xi = 0$  за счет больших ошибок на концах промежутка. Для того же порядка  $[m/n]$  это позволяет использовать большее  $\tilde{\beta}$  (и, следовательно, больший  $\Delta x$ ) при заданной допустимой погрешности.

**3. Анализ ошибок аппроксимации.** Далее будем оценивать зависимость абсолютной ошибки рациональной аппроксимации на каждом шаге по продольной координате  $\Delta x$  от  $\xi$  и  $\tilde{\beta}$ :

$$R(\xi, \tilde{\beta}) = \left| P(\xi) - c_0 \prod_{l=1}^p \frac{1 + a_l \xi}{1 + b_l \xi} \right|.$$

Поведение этой ошибки существенно зависит от способа определения коэффициентов  $a_l, b_l$ .

**3.1. Ошибка аппроксимации Паде.** Поскольку аппроксимация Паде является локальной в окрестности  $\xi = 0$ , ошибка монотонно возрастает с  $|\xi|$  (рис. 1). Для каждого  $\tilde{\beta}$  и порога точности  $R_0$  монотонность гарантирует существование границ  $\xi^- < 0 < \xi^+$  таких, что  $R(\xi) \leq R_0$  для всех  $\xi \in [\xi^-, \xi^+]$ . Область точности  $[\xi^-, \xi^+]$  является свойством самой аппроксимации, не зависящим от задачи. Это позволяет вычислить границы заранее и табулировать.

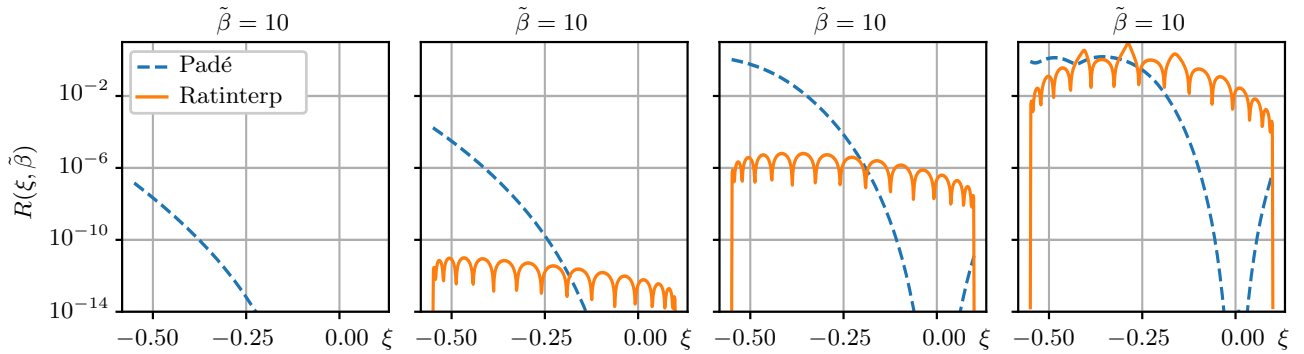


Рис. 1. Ошибка аппроксимации  $R(\xi, \tilde{\beta})$  для аппроксимации Паде и рациональной интерполяции порядка [7/8] на промежутке  $[-0.55, 0.1]$  для различных значений  $\tilde{\beta}$

Fig. 1. Approximation error  $R(\xi, \tilde{\beta})$  for Padé approximation and rational interpolation of order [7/8] on the interval  $[-0.55, 0.1]$  for different values of  $\tilde{\beta}$

**3.2. Ошибка рациональной интерполяции.** При использовании рациональной интерполяции аппроксимация строится для заданного промежутка  $[\xi_a, \xi_b]$ , а дискретизация в узлах Чебышева распределяет ошибку равномерно по этому промежутку. На рис. 1 сравниваются ошибки аппроксимации Паде и рациональной интерполяции на промежутке  $[-0.55; 0.1]$  для различных значений  $\tilde{\beta}$ . С ростом  $\tilde{\beta}$  ошибка аппроксимации Паде на концах промежутка быстро возрастает, тогда как ошибка рациональной интерполяции остается почти равномерной. При больших  $\tilde{\beta}$  ошибка аппроксимации Паде на концах промежутка может превышать ошибку рациональной интерполяции на несколько порядков.

Точность рациональной интерполяции также зависит от промежутка аппроксимации. На рис. 2 показана ошибка для различных промежутков  $[\xi_a, 0.1]$  при  $\tilde{\beta} = 50$ . По мере расширения промежутка максимальная ошибка возрастает, что отражает возросшую сложность аппроксимации оператора распространения на более широком диапазоне. Тем не менее распределение ошибки остается близким к равномерному для всех промежутков.

Таким образом, для заданного порога ошибки  $R_0$  и промежутка  $[\xi_a, \xi_b]$  использование рациональной интерполяции допускает выбор большего  $\tilde{\beta}$  (и, следовательно, большего шага  $\Delta x$ ) по сравнению с аппроксимацией Паде. Заметим, что промежуток  $[\xi_a, \xi_b]$  теперь является *входным* параметром аппроксимации, определяемым физическими параметрами и выбором  $\beta$ , а не результатом анализа ошибок.

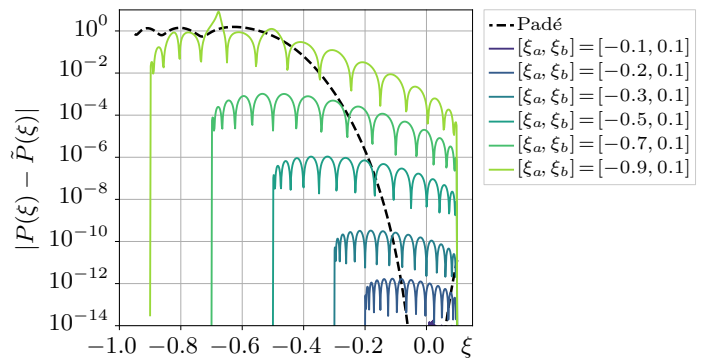


Рис. 2. Зависимость точности рациональной интерполяции от промежутка аппроксимации для порядка [7/8] при  $\tilde{\beta} = 50$ . Ошибка аппроксимации Паде не зависит от промежутка

Fig. 2. Dependence of rational interpolation accuracy on the approximation interval for order [7/8] at  $\tilde{\beta} = 50$ . Padé approximation error independent on interval



**3.3. Ошибка поперечной дискретизации.** Из (5) и (6) следует, что разность между непрерывным и дискретным  $\xi$  составляет

$$\Delta\xi = \xi - \xi_d = \frac{\zeta - \zeta_{\Delta z}}{\beta^2},$$

где  $\zeta$  и  $\zeta_{\Delta z}$  — спектральные символы, определенные в (3). В явном виде:

$$|\Delta\xi| = \frac{1}{\beta^2} \left| k_z^2 - \frac{1}{\Delta z^2} \left( 4 \sin^2 \frac{k_z \Delta z}{2} + 16\alpha \sin^4 \frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right|. \quad (7)$$

Влияние этой ошибки дискретизации на оператор распространения оценивается через

$$|P(\xi + \Delta\xi) - P(\xi)| \approx |P'(\xi)| \cdot |\Delta\xi|,$$

$$|P'(\xi)| = \frac{\tilde{\beta}}{2\sqrt{1+\xi}}.$$

Максимум  $|P'|$  на  $[\xi^-, \xi^+]$  достигается при  $\xi = \xi^-$ . Требуя, чтобы эта ошибка дискретизации оператора распространения не превышала  $R_0$ , получим следующую оценку:

$$|\Delta\xi| \leq \frac{2R_0\sqrt{1+\xi^-}}{\tilde{\beta}}. \quad (8)$$

С учетом (7) и (8) максимально допустимое  $\Delta z$  находится методом бисекции. На рис. 3

показана ошибка поперечной дискретизации как функция  $k_z$  для схем 2-го и 4-го порядка. Схема 4-го порядка улучшает точность приблизительно на два порядка без дополнительных вычислительных затрат.

**4. Алгоритм оптимизации.** Из (5) видно, что переменная  $\xi$  принимает значения в диапазоне

$$\xi \in \left[ \frac{k_{\min}^2 - k_{z,\max}^2}{\beta^2} - 1, \frac{k_{\max}^2}{\beta^2} - 1 \right], \quad (9)$$

где  $k_{\min} = \min_{x,z} k(x,z)$ ,  $k_{\max} = \max_{x,z} k(x,z)$  и  $k_{z,\max}$  — максимальное поперечное волновое число, определяемое источником и геометрией задачи.

Важно отметить, что в неоднородной среде диапазон  $\xi$  зависит не только от максимального угла распространения  $\theta_{\max}$  (через  $k_{z,\max}$ ), но и от отношения  $k_{\min}/k_{\max}$ . В тропосферных приложениях  $k_{\min} \approx k_{\max}$ , поэтому диапазон, по существу, составляет  $[-\sin^2 \theta_{\max}, 0]$ . В ПА слагаемое  $k_{\min}^2/\beta^2 - 1$  может быть значительно более отрицательным (для  $c_{\text{дно}} = 2000$  м/с  $k_{\min}/k_{\max} \approx 0.75$ ), что резко расширяет диапазон  $\xi$ . Это проиллюстрировано в табл. 1.

Таблица 1. Диапазон  $\xi$  для различных углов распространения и сред:  $\xi \in [\xi_{\min}, 0]$ ,

где  $\xi_{\min} = (k_{\min}/k_{\max})^2 - 1 - \sin^2 \theta_{\max}$  (при  $\beta = k_{\max}$ )

Table 1. Range of  $\xi$  for various propagation angles and media:  $\xi \in [\xi_{\min}, 0]$ ,

where  $\xi_{\min} = (k_{\min}/k_{\max})^2 - 1 - \sin^2 \theta_{\max}$  (assuming  $\beta = k_{\max}$ )

$\theta_{\max}$	$\sin^2 \theta_{\max}$	$\xi_{\min}$		
		РРВ ( $k_{\min} \approx k_{\max}$ )	ПА ( $c_{\text{дно}} = 1700$ )	ПА ( $c_{\text{дно}} = 2000$ )
5°	0.008	-0.008	-0.229	-0.445
10°	0.030	-0.030	-0.252	-0.468
20°	0.117	-0.117	-0.338	-0.554
30°	0.250	-0.250	-0.471	-0.688
45°	0.500	-0.500	-0.721	-0.937

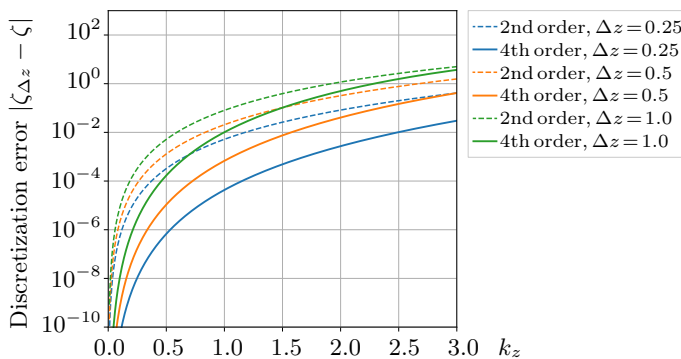


Рис. 3. Ошибка дискретизации поперечного оператора для схем 2-го и 4-го порядка при различных значениях  $\Delta z$

Fig. 3. Transverse operator discretization error for the 2nd and 4th order schemes at various  $\Delta z$  values

Для того чтобы аппроксимация Паде была точной во всем диапазоне (9), необходимо  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}] \subseteq [\xi^-, \xi^+]$ , где  $[\xi^-, \xi^+]$  — область точности, определенная в разделе 3.1. Это дает следующие оценки:

$$\beta \leq \sqrt{\frac{k_{\min}^2 - k_{z,\max}^2}{\xi^- + 1}}, \quad \beta \geq \sqrt{\frac{k_{\max}^2}{\xi^+ + 1}}. \quad (10)$$

Допустимое  $\beta$  существует, только если нижняя граница не превышает верхнюю. Среди всех допустимых значений выбирается наименьшее  $\beta$ , поскольку продольный шаг  $\Delta x = \tilde{\beta}/\beta$  максимален при минимальном  $\beta$ . Для рациональной интерполяции ограничение на  $\beta$  неявное: промежуток  $[\xi_a, \xi_b]$  вычисляется из  $\beta$  через (9), а ошибка измеряется непосредственно.

Алгоритм 1 перебирает заранее вычисленную таблицу параметров-кандидатов  $(\tilde{\beta}, R_0)$  и выбирает комбинацию, максимизирующую  $\Delta x \cdot \Delta z$  (минимизирующую вычислительные затраты) при условии, что накопленная ошибка  $\lceil x_{\max}/\Delta x \rceil \cdot R_0 < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданный допуск на суммарную ошибку рациональной аппроксимации, накопленную по всей дистанции распространения  $x_{\max}$ .

---

Алгоритм 1. Оптимизация сетки для неоднородного ПУ (аппроксимация Паде)

Algorithm 1. Grid optimization for the inhomogeneous PE (Padé approximation)

---

- 1: **input**  $k_{\min}, k_{\max}, k_{z,\max}, \varepsilon, x_{\max}$ , Padé order  $[m/n]$ , transverse discretization order  $\alpha$
  - 2: **output** optimal  $\beta, \Delta x, \Delta z$
  - Precomputation (once for a given Padé order):
  - 3: **for**  $\tilde{\beta} \in \mathcal{B}, R_0 \in \mathcal{R}$  **do**
  - 4:     Compute  $\xi^-(\tilde{\beta}, R_0)$  and  $\xi^+(\tilde{\beta}, R_0)$  by bisection on  $R(\xi, \tilde{\beta}) = R_0$
  - 5: **end for**
  - 6: Store lookup table  $\{(\tilde{\beta}, R_0) \mapsto (\xi^-, \xi^+)\}$
  - Optimization (for each problem instance):
  - 7:  $(\beta^*, \Delta x^*, \Delta z^*) \leftarrow (\text{NaN}, 0, 0)$
  - 8: **for**  $(\tilde{\beta}, R_0)$  in the table **do**
  - 9:     Compute  $\beta_{\max}, \beta_{\min}$  from (10)
  - 10:     **if**  $\beta_{\min} > \beta_{\max}$  **then continue end if**
  - 11:      $\beta \leftarrow \beta_{\min}, \Delta x \leftarrow \tilde{\beta}/\beta$
  - 12:     **if**  $\lceil x_{\max}/\Delta x \rceil \cdot R_0 > \varepsilon$  **then continue end if**
  - 13:     Compute  $\Delta \xi_{\max}$  from (8); find  $\Delta z$  by bisection on (7)
  - 14:     **if**  $\Delta x \cdot \Delta z > \Delta x^* \cdot \Delta z^*$  **then**
  - 15:          $(\beta^*, \Delta x^*, \Delta z^*) \leftarrow (\beta, \Delta x, \Delta z)$
  - 16:     **end if**
  - 17: **end for**
  - 18: **return**  $\beta^*, \Delta x^*, \Delta z^*$
- 

Предвычисленная таблица использует сетки  $\mathcal{B} = \{0.01, 0.05, 0.1, \dots, 50000\}$  ( $\sim 50$  значений) и  $\mathcal{R} = \{10^{-10}, \dots, 10^{-5}\}$  (6 значений), всего  $\sim 300$  записей. Таблица зависит только от порядка рациональной аппроксимации и может использоваться повторно для различных задач. Цикл оптимизации выполняет только элементарные арифметические операции и не более одного поиска методом бисекции на каждую запись, завершаясь за доли секунды. Предложенный алгоритм реализован в библиотеке PyWaveProp с открытым исходным кодом [19].

При использовании рациональной интерполяции логика оптимизации несколько изменяется. Для аппроксимации Паде область точности  $[\xi^-, \xi^+]$  является свойством аппроксимации (определяется  $\tilde{\beta}$  и  $R_0$ ) и может быть вычислена заранее. Для рациональной интерполяции промежуток аппроксимации  $[\xi_a, \xi_b]$  является входным параметром, определяемым физическими параметрами и выбором  $\beta$ .

Алгоритм 2 перебирает значения-кандидаты  $\beta$  и  $\tilde{\beta}$ . Для каждого кандидата промежуток  $[\xi_a, \xi_b]$  вычисляется из (9), рациональная интерполяция выполняется на этом промежутке, и результирующая ошибка измеряется непосредственно. Вычислительная стоимость каждой рациональной интерполяции пренебрежимо мала, поэтому подход с вычислением “на лету” завершается менее чем за секунду.



Алгоритм 2. Оптимизация сетки для неоднородного ПУ (рациональная интерполяция)  
 Algorithm 2. Grid optimization for the inhomogeneous PE (rational interpolation)

```

1: input  $k_{\min}, k_{\max}, k_{z,\max}, \varepsilon, x_{\max}, \text{order } [m/n], \text{ transverse discretization order } \alpha$ 
2: output Optimal  $\beta, \Delta x, \Delta z$ 
3:  $(\beta^*, \Delta x^*, \Delta z^*) \leftarrow (\text{NaN}, 0, 0)$ 
4: for all  $\beta \in \mathcal{B}, \tilde{\beta} \in \mathcal{B}$  do
5:    $\xi_a \leftarrow (k_{\min}^2 - k_{z,\max}^2)/\beta^2 - 1, \xi_b \leftarrow k_{\max}^2/\beta^2 - 1$ 
6:    $\Delta x \leftarrow \tilde{\beta}/\beta$ 
7:   Compute rational interpolation coefficients  $a_l, b_l, c_0$  on  $[\xi_a, \xi_b]$ 
8:    $R_0 \leftarrow \max_{\xi \in [\xi_a, \xi_b]} |P(\xi) - \tilde{P}(\xi)|$ 
9:   if  $\lceil x_{\max}/\Delta x \rceil \cdot R_0 > \varepsilon$  then
10:     continue
11:   end if
12:   Compute  $\Delta \xi_{\max}$  from (8); find  $\Delta z$  by bisection on (7)
13:   if  $\Delta x \cdot \Delta z > \Delta x^* \cdot \Delta z^*$  then
14:      $(\beta^*, \Delta x^*, \Delta z^*) \leftarrow (\beta, \Delta x, \Delta z)$ 
15:   end if
16: end for
17: return  $\beta^*, \Delta x^*, \Delta z^*$ 
    
```

**5. Численные результаты.** Все результаты получены с использованием разработанной автором библиотеки PyWaveProp [19]. Во всех примерах используется схема Нумерова 4-го порядка ( $\alpha = 1/12$ ).

**5.1. Тропосферное распространение радиоволн.** Рассмотрим  $f = 3$  ГГц ( $\lambda = 0.1$  м),  $c \approx 3 \times 10^8$  м/с, характерные неоднородности коэффициента преломления тропосферы несут существенны при оптимизации сетки, так что считаем  $k_{\min} \approx k_{\max} \approx k_0$ . Табл. 2 содержит оптимальные параметры сетки, вычисленные предложенным алгоритмом для рациональных аппроксимаций порядка [7/8] и  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Для малых углов распространения ( $\theta_{\max} \leq 5^\circ$ ), характерных для дальнего волноводного распространения, алгоритм допускает очень большие шаги ( $\Delta x \approx 300\text{--}1100 \lambda$  для аппроксимации Паде,  $800\text{--}2000 \lambda$  для рациональной интерполяции). Сетка быстро сгущается с увеличением угла. Рациональная интерполяция позволяет использовать в 1.8–3.0 более разреженную сетку по продольной координате  $x$ , чем аппроксимация Паде. Выигрыш для сетки по поперечной координате  $z$  достигает 2.4.

Обычно в качестве значения коэффициента распространения  $\beta$  выбирают  $k_0$ . Из табл. 2 видно, что такой выбор является оптимальным только при использовании аппроксимации Паде на малых углах распространения. С ростом  $\theta_{\max}$  оптимальное значение  $\beta$  уменьшается. Для рациональной интерполяции оптимальное значение  $\beta$  еще более значительно отличается от  $k_0$ .

**5.2. Подводная акустика.** Данный пример демонстрирует, как влияет неоднородность среды на размеры сетки. Рассмотрим  $f = 500$  Гц ( $\lambda = 3$  м), скорость звука в воде  $c_w = 1500$  м/с, скорость звука в

Таблица 2. Оптимальная сетка для задачи тропосферного РРВ ( $f = 3$  ГГц,  $n \approx 1$ , порядок [7/8],  $\varepsilon = 10^{-3}$ ):  
 аппроксимация Паде и рациональная интерполяция  
 Table 2. Optimal grid for tropospheric propagation ( $f = 3$  GHz,  $n \approx 1$ , order [7/8],  $\varepsilon = 10^{-3}$ ):  
 Padé approximation vs rational interpolation

$\theta_{\max}$	$x_{\max}$	Padé			Rational interpolation			Ratio	
		$\beta/k_0$	$\Delta x/\lambda$	$\Delta z/\lambda$	$\beta/k_0$	$\Delta x/\lambda$	$\Delta z/\lambda$	$\Delta x$	$\Delta z$
$3^\circ$	100 km	0.999	1114.9	1.790	0.700	2046.3	2.157	1.8	1.2
$5^\circ$	10 km	0.997	319.1	0.606	0.600	795.8	1.103	2.5	1.8
$10^\circ$	10 km	0.991	80.3	0.085	0.850	187.2	0.206	2.3	2.4
$20^\circ$	1 km	0.952	16.7	0.037	0.950	50.3	0.070	3.0	1.9
$30^\circ$	1 km	0.933	11.9	0.019	0.600	21.2	0.024	1.8	1.3
$45^\circ$	1 km	0.831	3.8	0.004	0.700	9.1	0.009	2.4	2.0

Таблица 3. Оптимальная сетка для ПА ( $f = 500$  Гц,  $c_{\text{дно}} = 1700$  м/с, порядок [7/8],  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $x_{\text{max}} = 10$  км):  
 аппроксимация Паде, рациональная интерполяция и предположение однородности  
 Table 3. Optimal grid for UWA ( $f = 500$  Hz,  $c_{\text{sed}} = 1700$  m/s, order [7/8],  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $x_{\text{max}} = 10$  km):  
 Padé approximation, rational interpolation, and homogeneous assumption

$\theta_{\text{max}}$	Padé		Rat. interp.		Homo. Padé		Homo. Rat. interp.	
	$\Delta x/\lambda$	$\Delta z/\lambda$	$\Delta x/\lambda$	$\Delta z/\lambda$	$\Delta x/\lambda$	$\Delta z/\lambda$	$\Delta x/\lambda$	$\Delta z/\lambda$
5°	11.9	1.430	25.3	1.667	478.4	1.667	1005.2	1.667
10°	10.4	0.485	23.0	0.973	112.4	1.667	231.5	1.667
20°	7.2	0.157	16.2	0.287	16.7	0.202	53.1	0.505
30°	5.6	0.081	10.7	0.125	11.9	0.103	23.1	0.198
45°	2.1	0.020	5.6	0.048	3.9	0.044	9.8	0.068

морском дне  $c_{\text{дно}} = 1700$  м/с,  $x_{\text{max}} = 10$  км,  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Табл. 3 показывает результаты работы алгоритмов оптимизации сетки с учетом морского дна (т.е.  $k_{\text{min}} \neq k_{\text{max}}$ ). Также для сравнения показаны результаты оптимизации в предположении однородной среды ( $k_{\text{min}} = k_{\text{max}}$ ).

При малых углах разница в густоте сетки для случаев однородной и неоднородной сред достигает 40 раз. При больших углах вклад угловой составляющей в диапазон  $\xi$  начинает доминировать и расхождение уменьшается, но все равно сетка для однородной среды примерно в 2 раза более разрежена.

Использование сетки, полученной в предположении однородности, приводит к ошибкам дисперсии, значительно превышающим заданный допуск, поскольку рациональная аппроксимация вычисляется за пределами своей области точности.

**5.3. Распределение поля: корректная и некорректная сетки.** Для демонстрации практических последствий игнорирования неоднородности вычислим акустическое поле в слоистом мелководном волноводе при  $f = 1500$  Гц ( $\lambda = 1$  м). Глубина водного слоя составляет 200 м при  $c_{\text{в}} = 1500$  м/с. Под водным слоем расположен верхний слой морского дна толщиной 100 м ( $c_{\text{дно1}} = 1700$  м/с), за ним следует полубесконечный слой со скоростью звука  $c_{\text{дно2}} = 1800$  м/с). Оба донных слоя имеют плотность  $\rho = 1.5$  г/см<sup>3</sup> и поглощение 0.05 дБ/λ. Узкий гауссов пучок (ширина 1°) расположен на глубине 50 м с углом наклона  $-45^\circ$  (круто вниз), что дает  $\theta_{\text{max}} = 46^\circ$ . Дистанция распространения  $x_{\text{max}} = 1$  км и  $\varepsilon = 0.1$ .

Выполнены четыре расчета с использованием библиотеки PyWaveProp [19]: 1) эталонное решение на мелкой сетке ( $\Delta x = 0.78\lambda$ ,  $\Delta z = 0.011\lambda$ ), 2) оптимальная сетка для аппроксимации Паде с учетом неоднородностей морского дна ( $\Delta x = 2.4\lambda$ ,  $\Delta z = 0.034\lambda$ ), 3) оптимальная сетка для рациональной интерполяции с учетом неоднородностей морского дна ( $\Delta x = 6.5\lambda$ ,  $\Delta z = 0.121\lambda$ ) и 4) оптимальная сетка для аппроксимации Паде без учета неоднородностей ( $\Delta x = 5.7\lambda$ ,  $\Delta z = 0.048\lambda$ ).

Сетка для рациональной интерполяции **в 3 раза разреженнее** сетки для аппроксимации Паде при сохранении точности. Примечательно, что сетка рациональной интерполяции даже несколько разреженнее сетки Паде, полученной в предположении однородности (6.5λ против 5.7λ), но, в отличие от последней, она корректно учитывает вариацию волнового числа и дает точные результаты.

На рис. 4 показано двумерное распределение поля для всех четырех случаев. Эталонное решение, оптимизация аппроксимации Паде и оптимизация рациональной интерполяции визуально неразличимы, что подтверждает сохранение точности на обеих оптимизированных сетках. Решение в предположении однородности, однако, демонстрирует видимое искажение структуры пучка: интерференционная картина отличается, а поле в слоях морского дна заметно затухает.

Зависимость ошибки от дистанции показана на рис. 5, где представлены потери при распространении на глубине 150 м как функция дистанции. Кривые оптимизации аппроксимации Паде и рациональной интерполяции следуют эталону на всей дистанции 1 км. Поле, рассчитанное в предположении однородности, отклоняется и затухает, подтверждая, что ошибка дисперсии накапливается на каждом шаге распространения.

**5.4. Влияние скорости звука в морском дне.** Табл. 4 показывает, как оптимальная сетка зависит от скорости звука в морском дне при  $f = 500$  Гц,  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$ . С ростом  $c_{\text{дно}}$  от 1500 м/с (однородная среда) до 2000 м/с шаг  $\Delta x$  уменьшается в 20 раз как для аппроксимации Паде, так и для рациональной интерполяции. Наиболее резкое падение происходит между 1500 и 1600 м/с, что указывает на то, что

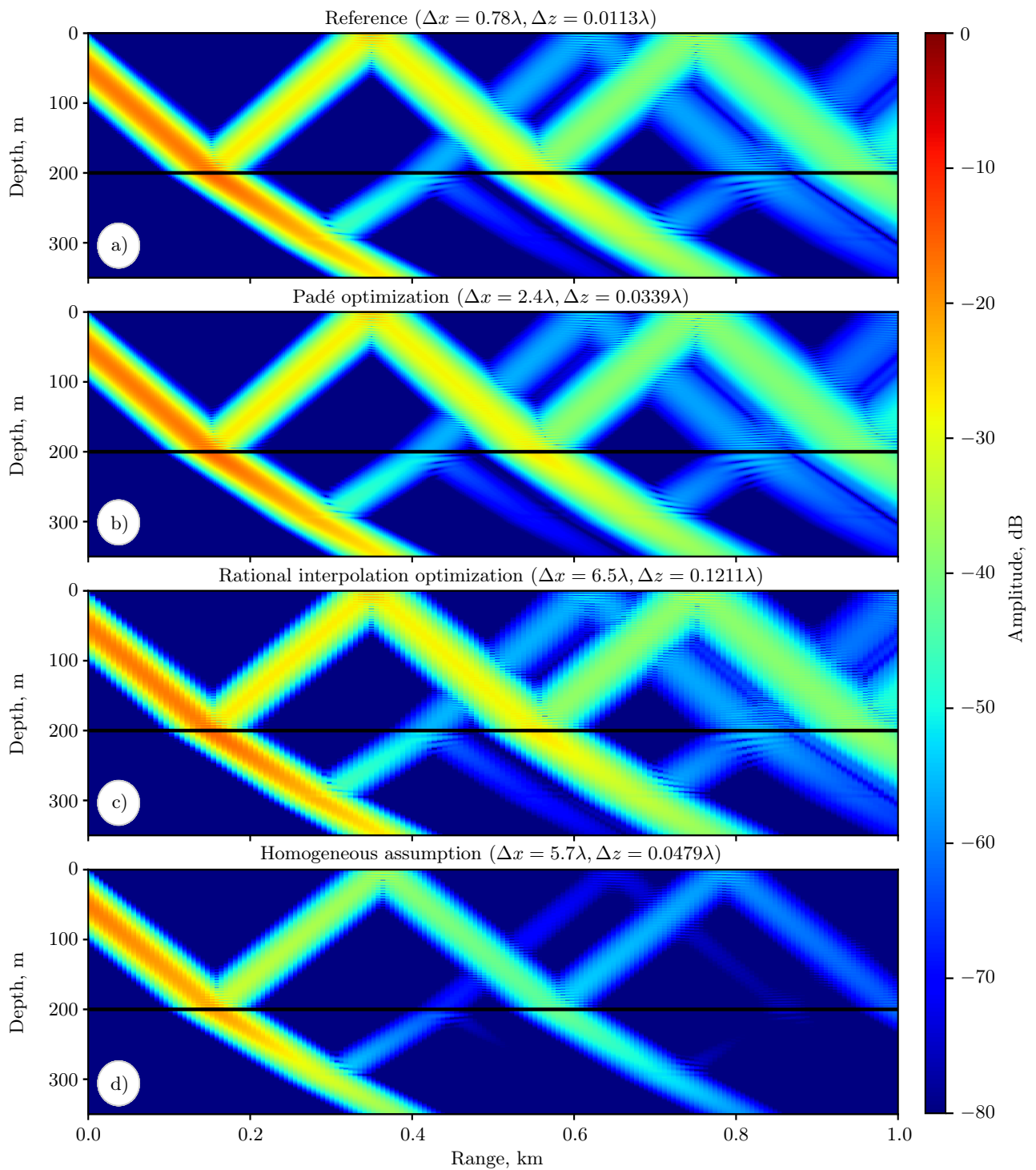


Рис. 4. Амплитуда акустического поля (дБ) в слоистом волноводе ( $f = 1500$  Гц, скорость звука от 1500 до 1800 м/с, дистанция 1 км, пучок под углом  $-45^\circ$ , черная линия обозначает морское дно): а) эталон (мелкая сетка); б) оптимизация аппроксимации Паде ( $\Delta x = 2.4\lambda$ ); в) оптимизация рациональной интерполяции ( $\Delta x = 6.5\lambda$ ); д) предположение однородности (некорректная сетка)

Fig. 4. Acoustic field amplitude (dB) in a layered waveguide ( $f = 1500$  Hz, sound speed varies from 1500 to 1800 m/s, range 1 km,  $-45^\circ$  beam, the black line marks the sea bottom): a) reference (fine grid); b) Padé optimization ( $\Delta x = 2.4\lambda$ ); c) Rat. interp. optimization ( $\Delta x = 6.5\lambda$ ); d) homogeneous assumption (incorrect grid)

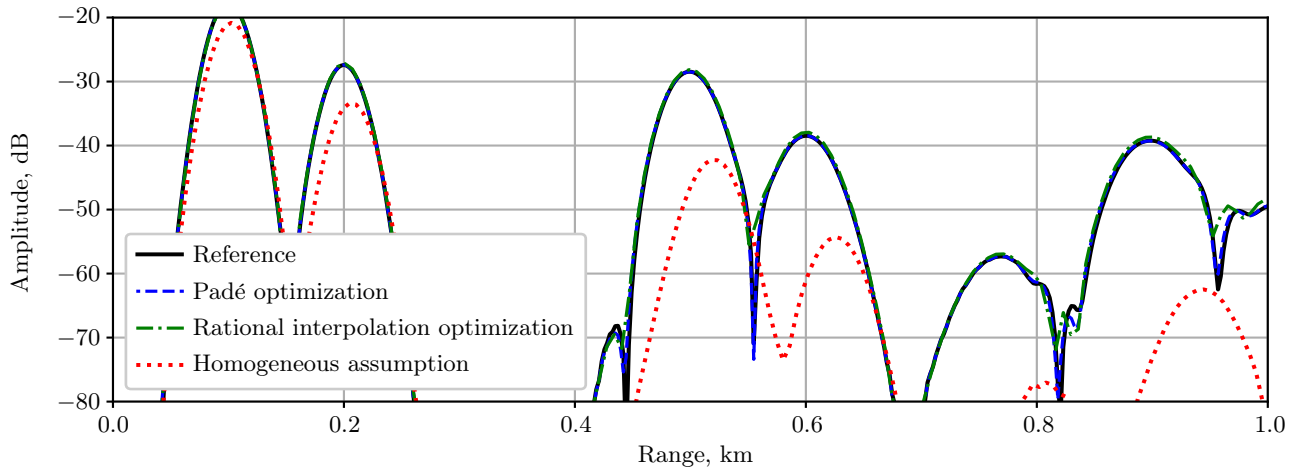


Рис. 5. Потери при распространении на глубине 150 м в зависимости от дистанции  
 Fig. 5. Transmission loss at 150 m depth vs range

Таблица 4. Зависимость оптимальной сетки от  $c_{\text{дно}}$  ( $f = 500$  Гц,  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$ ,  $x_{\text{max}} = 10$  км,  $\varepsilon = 10^{-3}$ )  
 Table 4. Dependence of the optimal grid on  $c_{\text{sed}}$  ( $f = 500$  Hz,  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$ ,  $x_{\text{max}} = 10$  km,  $\varepsilon = 10^{-3}$ )

$c_{\text{дно}}$ (м/с)	$k_{\text{min}}/k_{\text{max}}$	Padé		Rational interpolation		Ratio	
		$\Delta x/\lambda$	$\Delta z/\lambda$	$\Delta x/\lambda$	$\Delta z/\lambda$	$\Delta x$	$\Delta z$
1500 (однор.)	1.000	112.4	1.667	231.5	1.667	2.1	1.0
1600	0.938	16.7	0.557	39.9	1.215	2.4	2.2
1700	0.882	10.4	0.485	23.0	0.973	2.2	2.0
1800	0.833	7.2	0.435	16.4	0.803	2.3	1.8
1900	0.789	5.6	0.403	12.9	0.682	2.3	1.7
2000	0.750	5.6	0.397	10.8	0.629	1.9	1.6

Таблица 5. Эффективность  $V$  для различных порядков (тропосферное РРВ):  
 аппроксимация Паде и рациональная интерполяция

Table 5. Efficiency  $V$  for various orders (tropospheric radio wave propagation):  
 Padé approximation vs rational interpolation

$\theta_{\text{max}}$	$x_{\text{max}}$	Order	$V$ (Padé)	$V$ (Rational interpolation)	Ratio
$3^\circ$	100 km	[1/2]	8.59	1.28	6.7
		[2/3]	$4.08 \cdot 10^{-1}$	$4.61 \cdot 10^{-2}$	8.8
		[5/6]	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$2.87 \cdot 10^{-3}$	5.4
		[7/8]	$4.01 \cdot 10^{-3}$	$1.81 \cdot 10^{-3}$	2.2
$10^\circ$	10 km	[2/3]	$4.35 \cdot 10^1$	6.21	7.0
		[5/6]	1.66	$3.75 \cdot 10^{-1}$	4.4
		[6/7]	1.35	$2.51 \cdot 10^{-1}$	5.4
		[7/8]	1.17	$2.07 \cdot 10^{-1}$	5.7
$20^\circ$	1 km	[2/3]	$1.81 \cdot 10^2$	$6.16 \cdot 10^1$	2.9
		[5/6]	$1.14 \cdot 10^1$	4.94	2.3
		[7/8]	$1.31 \cdot 10^1$	2.28	5.7



даже небольшой контраст волнового числа оказывает значительное влияние. Рациональная интерполяция позволяет использовать в 2–2.4 раза больший шаг  $\Delta x$ , чем аппроксимация Паде.

**5.5. Сравнение порядков рациональной аппроксимации.** Табл. 5 показывает метрику эффективности  $V = p/(\Delta x \cdot \Delta z)$  (меньше — лучше,  $\Delta x$  и  $\Delta z$  в длинах волн) для тропосферного случая при различных порядках и углах, сравнивая аппроксимацию Паде и рациональную интерполяцию. Эффективность  $V$  пропорциональна двумерной сетке и позволяет количественно сравнить время, требуемое на получение решения. Отметим, что время расчета поля методом ПУ линейно зависит от размеров двумерной сетки.

Табл. 6 содержит аналогичное сравнение для ПА ( $f = 500$  Гц,  $c_{\text{дно}} = 1700$  м/с,  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$ ). Примечательно, что порядки [1/1] и [1/2] оказываются неприменимыми в случае ПА. Для обоих методов эффективность монотонно улучшается с ростом порядка рациональной аппроксимации, но рациональная интерполяция стабильно достигает меньшего  $V$  (лучшей эффективности) на каждом порядке.

В целом можно утверждать, что увеличение порядка аппроксимации дает не только более точное, но и более быстрое решение. Особенно это заметно для неоднородной среды. Для наглядности эти результаты продублированы на рис. 6.

Таблица 6. Эффективность  $V$  для различных порядков (ПА,  $f = 500$  Гц,  $c_{\text{дно}} = 1700$  м/с,  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$ ,  $x_{\text{max}} = 10$  км,  $\varepsilon = 10^{-3}$ )  
 Table 6. Efficiency  $V$  for various orders (UWA,  $f = 500$  Hz,  $c_{\text{sed}} = 1700$  m/s,  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$ ,  $x_{\text{max}} = 10$  km,  $\varepsilon = 10^{-3}$ )

Order	Padé			Rational interpolation		
	$\Delta x/\lambda$	$\Delta z/\lambda$	$V$	$\Delta x/\lambda$	$\Delta z/\lambda$	$V$
[2/3]	0.3	0.116	$7.47 \cdot 10^1$	1.3	0.228	$1.00 \cdot 10^1$
[3/4]	1.7	0.173	$1.35 \cdot 10^1$	4.0	0.372	2.69
[4/5]	3.5	0.368	3.91	8.1	0.564	1.10
[5/6]	5.2	0.408	2.82	12.6	0.705	$6.74 \cdot 10^{-1}$
[6/7]	8.6	0.463	1.76	17.7	0.845	$4.69 \cdot 10^{-1}$
[7/8]	10.4	0.485	1.59	23.0	0.973	$3.58 \cdot 10^{-1}$

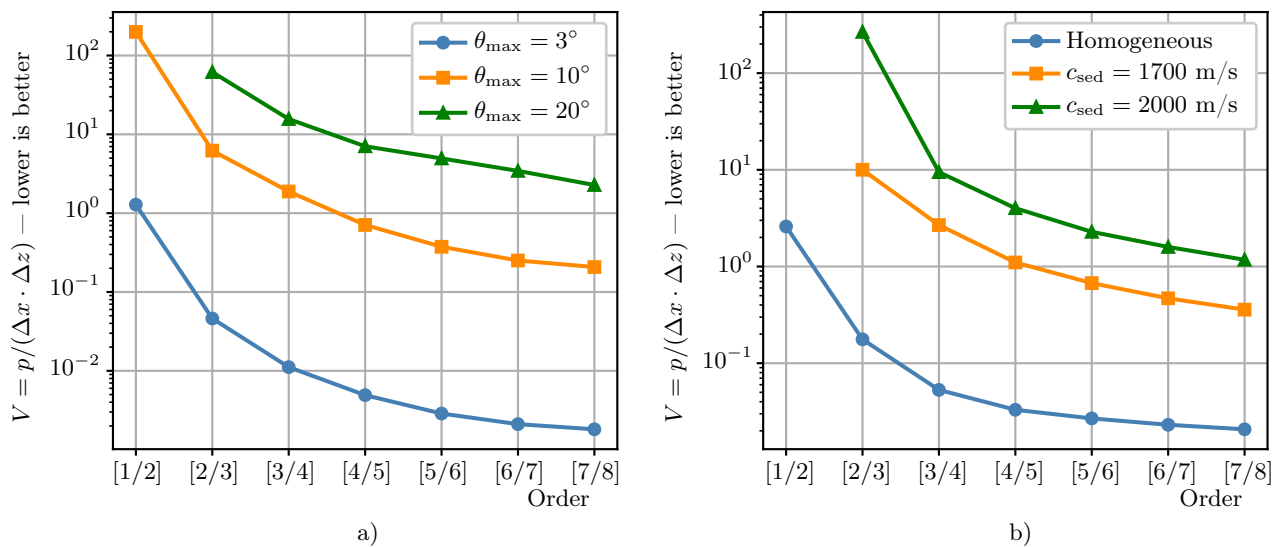


Рис. 6. Эффективность  $V$  в зависимости от порядка рациональной аппроксимации: а) тропосферный случай при различных углах; б) ПА при  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$  для различных скоростей в морском дне

Fig. 6. Efficiency  $V$  vs rational approximation order: a) tropospheric case at various angles; b) UWA at  $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$  for different sediment speeds

**6. Заключение.** Рациональная интерполяция на отрезке стабильно обеспечивает в 2–3 раза более разреженные сетки по сравнению с аппроксимацией Паде того же порядка при одинаковой допустимой погрешности. Это преимущество сохраняется для всех протестированных конфигураций: тропосферной и подводно-акустической сред, всех углов распространения, всех порядков аппроксимации и всех контрастов волнового числа. Улучшение обусловлено близким к равномерному распределением ошибки рациональной интерполяции по требуемому диапазону  $\xi$  по сравнению с локальной концентрацией точности метода Паде. Преимущество возрастает с шириной диапазона, т.е. с углом распространения и контрастом волнового числа.

Для подводной акустики вариация волнового числа между водой и морским дном является доминирующим фактором. Предположение однородности приводит к выбору сеток, которые в 10–40 раз разреженнее допустимых при малых углах распространения, что ведет к ошибкам моделирования, значительно превышающим заданный допуск.

Для тропосферного распространения радиоволн вариация волнового числа оказывает пренебрежимое влияние, и оптимизация определяется углом распространения.

Более высокие порядки рациональной аппроксимации более выгодны с вычислительной точки зрения, особенно в неоднородных средах. Рациональная интерполяция превосходит метод Паде на каждом протестированном порядке рациональной аппроксимации.

Продемонстрированный выигрыш в производительности особенно актуален для обратных задач и задач количественной оценки неопределенности, где требуется многократное решение прямой задачи. В дальнейшем планируется обобщить предложенный метод на трехмерный случай в декартовых и цилиндрических координатах.

### Список литературы

1. *Levy M.* Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. London: IET, 2000. doi [10.1049/PBEW045E](https://doi.org/10.1049/PBEW045E).
2. *Collins M.D., Siegmann W.L.* Parabolic wave equations with applications. Berlin: Springer, 2019. doi [10.1007/978-1-4939-9934-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-9934-7).
3. *Bommidala H., Colas J., Emmanuelli A., et al.* Three-dimensional effects of the wake on wind turbine sound propagation using parabolic equation // *Journal of Sound and Vibration*. 2025. **608**. Article Number 119036. doi [10.1016/j.jsv.2025.119036](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2025.119036).
4. *Юлдашев П.В., Сапожников О.А., Карзова М.М. и др.* Численные модели распространения нелинейных акустических волн в задачах медицинского ультразвука и в некоторых приложениях аэро- и подводной акустики // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* 2025. **80**, № 2. Article Number 2520301. doi [10.55959/MSU0579-9392.80.2520301](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80.2520301).
5. *Collins M.D., Siegmann W.L.* Parabolic equation techniques for seismology, seismo-acoustics, and arctic acoustics // *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*. 2021. **29**, N 02. Article Number 2130003. doi [10.1142/S2591728521300038](https://doi.org/10.1142/S2591728521300038).
6. *Bekker E.V., Sewell P., Benson T.M., Vukovic A.* Wide-angle alternating-direction implicit finite-difference beam propagation method // *Journal of Lightwave Technology*. 2009. **27**, N 14. 2595–2604. doi [10.1109/JLT.2009.2013219](https://doi.org/10.1109/JLT.2009.2013219).
7. *Leontovich M.A., Fock V.A.* Solution of the problem of propagation of electromagnetic waves along the Earth's surface by the method of parabolic equation // *Journal of Physics USSR*. 1946. **10**. 13–23.
8. *Fishman L., McCoy J.J.* Derivation and application of extended parabolic wave theories. I. The factorized Helmholtz equation // *Journal of Mathematical Physics*. 1984. **25**, N 2. 285–296. doi [10.1063/1.526149](https://doi.org/10.1063/1.526149).
9. *Лытаев М.С.* О применении конечно-разностной аппроксимации Паде псевдодифференциального параболического уравнения в задаче тропосферного распространения радиоволн // *Вычислительные методы и программирование*. 2020. **21**, № 4. 405–419. doi [10.26089/NumMet.v21r433](https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r433).
10. *Lytaev M.S.* Automated selection of the computational parameters for the higher-order parabolic equation numerical methods // *Computational Science and Its Applications — ICCSA 2020. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 12249. Cham: Springer Nature, 2020. pp. 296–311. doi [10.1007/978-3-030-58799-4\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-030-58799-4_22).
11. *Lytaev M.S.* Computational grid optimization for the 3D higher-order parabolic equation // *Computational Science and Its Applications — ICCSA 2023. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 13956. Cham: Springer Nature, 2023. pp. 170–185. doi [10.1007/978-3-031-36805-9\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-36805-9_12).



12. Lytaev M. Mesh optimization for the acoustic parabolic equation // Journal of Marine Science and Engineering. 2023. 11, N 3. Article Number 496. doi 10.3390/jmse11030496.
13. Lytaev M.S. Rational interpolation of the one-way Helmholtz propagator // Journal of Computational Science. 2022. 58. Article Number 101536. doi 10.1016/j.jocs.2021.101536.
14. Ramamurti A., Lingeitch J.F., Lighthall J.C., Collins M.D. Stable rational approximations for parabolic equation methods // arXiv preprint arXiv:2510.18622. 2025. doi 10.48550/arXiv.2510.18622.
15. Keefe L., McDaniel A., Cubillos M., et al. A vector Helmholtz electromagnetic wave propagator for inhomogeneous media // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2025. 73, N 8. 5823–5838. doi 10.1109/TAP.2025.3562744.
16. Lytaev M.S. Numerov–Padé scheme for the one-way Helmholtz equation in tropospheric radio-wave propagation // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2020. 19, N 12. 2167–2171. doi 10.1109/LAWP.2020.3026626.
17. Butcher J.C. Numerical methods for ordinary differential equations. Chichester: Wiley, 2016. doi 10.1002/9781119121534.
18. Pachón R., Gonnet P., van Deun J. Fast and stable rational interpolation in roots of unity and Chebyshev points // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2012. 50, N 3. 1713–1734. doi 10.1137/100797291. <http://www.jstor.org/stable/41582963>. Cited June 02, 2026.
19. Lytaev M.S. PyWaveProp: Python Library for Wave Propagation Modeling. 2026. <https://github.com/mikelytaev/wave-propagation>. Cited May 28, 2026.

Получена  
17 апреля 2026 г.

Принята  
25 мая 2026 г.

Опубликована  
5 июня 2026 г.

### Информация об авторе

Михаил Сергеевич Лытаев — к.т.н., ст. науч. сотр.; Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр РАН, 14-я линия В.О., д. 39, 199178, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

### References

1. M. Levy, *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation* (IET, London, 2000). doi 10.1049/PB EW045E.
2. M. D. Collins and W. L. Siegmann, *Parabolic Wave Equations with Applications* (Springer, Berlin, 2019). doi 10.1007/978-1-4939-9934-7.
3. H. Bommidala, J. Colas, A. Emmanuelli, et al., “Three-dimensional effects of the wake on wind turbine sound propagation using parabolic equation,” *Journal of Sound and Vibration* 608, Article Number 119036 (2025). doi 10.1016/j.jsv.2025.119036.
4. P. V. Yuldashev, O. A. Sapozhnikov, M. M. Karzova, et al., “Numerical Models of Nonlinear Acoustic Wave Propagation in Medical Ultrasound Problems and Certain Applications of Aeroacoustics and Underwater Acoustics,” *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya* 80 (2), Article Number 2520301 (2025). doi 10.55959/MSU0579-9392.80.2520301.
5. M. D. Collins and W. L. Siegmann, “Parabolic Equation Techniques for Seismology, Seismo-Acoustics, and Arctic Acoustics,” *J. Theor. Comput. Acoust.* 29 (02), Article Number 2130003 (2021). doi 10.1142/S2591728521300038.
6. E. V. Bekker, P. Sewell, T. M. Benson, and A. Vukovic, “Wide-Angle Alternating-Direction Implicit Finite-Difference Beam Propagation Method,” *J. Lightw. Technol.* 27 (14), 2595–2604 (2009). doi 10.1109/JLT.2009.2013219.
7. M. A. Leontovich and V. A. Fock, “Solution of the Problem of Propagation of Electromagnetic Waves along the Earth’s Surface by the Method of Parabolic Equation,” *J. Phys. USSR.* 10, 13–23 (1946).
8. L. Fishman and J. J. McCoy, “Derivation and application of extended parabolic wave theories. I. The factorized Helmholtz equation,” *J. Math. Phys.* 25 (2), 285–296 (1984). doi 10.1063/1.526149.
9. M. S. Lytaev, “On application of the finite-difference Padé approximation of the pseudo-differential parabolic equation to the tropospheric radio wave propagation problem,” *Numerical Methods and Programming [Vychislitel’nye Metody i Programirovanie]* 21 (4), 405–419 (2020). doi 10.26089/NumMet.v21r433.
10. M. S. Lytaev, “Automated Selection of the Computational Parameters for the Higher-Order Parabolic Equation Numerical Methods,” in *Computational Science and Its Applications — ICCSA 2020*. Lect. Notes Comput. Sci. Vol. 12249. (Springer Nature, Cham, 2020), pp. 296–311. doi 10.1007/978-3-030-58799-4\_22.

11. M. S. Lytaev, “Computational Grid Optimization for the 3D Higher-Order Parabolic Equation,” in *Computational Science and Its Applications — ICCSA 2023*. Lect. Notes Comput. Sci. Vol. 13956. (Springer Nature, Cham, 2023), pp. 170–185. doi 10.1007/978-3-031-36805-9\_12.
12. M. Lytaev, “Mesh Optimization for the Acoustic Parabolic Equation,” *J. Mar. Sci. Eng.* **11** (3), Article Number 496 (2023). doi 10.3390/jmse11030496.
13. M. S. Lytaev, “Rational interpolation of the one-way Helmholtz propagator,” *J. Comput. Sci.* **58**, Article Number 101536 (2022). doi 10.1016/j.jocs.2021.101536.
14. A. Ramamurti, J. F. Lingeitch, J. C. Lighthall, and M. D. Collins, “Stable rational approximations for parabolic equation methods,” arXiv preprint arXiv:2510.18622 (2025). doi 10.48550/arXiv.2510.18622.
15. L. Keefe, A. McDaniel, M. Cubillos, et al., “A Vector Helmholtz Electromagnetic Wave Propagator for Inhomogeneous Media,” *IEEE Trans. Antennas Propag.* **73** (8), 5823–5838 (2025). doi 10.1109/TAP.2025.3562744.
16. M. S. Lytaev, “Numerov–Padé Scheme for the One-Way Helmholtz Equation in Tropospheric Radio-Wave Propagation,” *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.* **19** (12), 2167–2171 (2020). doi 10.1109/LAWP.2020.3026626.
17. J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations* (Wiley, Chichester, 2016). doi 10.1002/9781119121534.
18. R. Pachón, P. Gonnet, and J. van Deun, “Fast and Stable Rational Interpolation in Roots of Unity and Chebyshev Points,” *SIAM J. Numer. Anal.* **50** (3), 1713–1734 (2012). doi 10.1137/100797291. <http://www.jstor.org/stable/41582963>. Cited June 02, 2026.
19. M. S. Lytaev, PyWaveProp: Python Library for Wave Propagation Modeling. 2026. <https://github.com/mikel-ytaev/wave-propagation>. Cited May 28, 2026.

*Received*  
April 17, 2026

*Accepted*  
May 25, 2026

*Published*  
June 5, 2026

#### Information about the author

*Mikhail S. Lytaev* — Ph.D., Senior Researcher; St. Petersburg Federal Research Center of RAS, 14-th Linia, V.I., No. 39, 199178, Saint Petersburg, Russia.