

Численное моделирование задач глобальной электрической цепи с неклассическими граничными условиями

И. Г. Милешин

Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Саров,
Саров, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-4668-6568, e-mail: komrad.mileshin@yandex.ru

А. В. Калинин

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Российская Федерация
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
Нижний Новгород, Российская Федерация

ORCID: 0009-0006-0055-2886, e-mail: avk@mm.unn.ru

А. А. Тюхтина

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Российская Федерация

ORCID: 0000-0001-5723-9256, e-mail: tyukhtina@iee.unn.ru

Аннотация: В работе рассматриваются подходы к решению задач, возникающих при моделировании глобальной электрической цепи Земли. Для этих задач формулируются нестандартные стационарные эллиптические краевые постановки с неклассическими граничными условиями. Для численного решения поставленных задач используется параллельный алгоритм на основе метода конечных элементов. Приводятся результаты расчетов для модельной задачи. Также для представленных задач рассмотрены вопросы эффективности MPI распараллеливания.

Ключевые слова: глобальная электрическая цепь, ионосферный потенциал, метод конечных элементов, HYPRE.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта № 23–71–30008 Российского научного фонда.

Для цитирования: Милешин И.Г., Калинин А.В., Тюхтина А.А. Численное моделирование задач глобальной электрической цепи с неклассическими граничными условиями // Вычислительные методы и программирование. 2026. 27, № 2. 290–301. doi 10.26089/NumMet.v27r219.



Numerical simulation of global electrical circuit problems with non-classical boundary conditions

Ivan G. Mileschin

Sarov Branch of Moscow State University,
Sarov, Russia

ORCID: 0000-0002-4668-6568, e-mail: komrad.mileschin@yandex.ru

Alexey V. Kalinin

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russia

National Research University “Higher School of Economics”,
Nizhny Novgorod, Russia

ORCID: 0009-0006-0055-2886, e-mail: avk@mm.unn.ru

Alla A. Tyukhtina

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russia

ORCID: 0000-0001-5723-9256, e-mail: tyukhtina@iee.unn.ru

Abstract: This paper examines approaches to solving problems arising in modeling the Earth’s global electrical circuit. For these problems, nonstandard stationary elliptic boundary-value formulations with nonclassical boundary conditions are formulated. A parallel algorithm based on the finite element method is presented for the numerical solution of these problems. Calculation results for the model problem are presented, and the efficiency of MPI parallelization for the presented problems is discussed.

Keywords: global electrical circuit, ionospheric potential, finite element method, HYPRE.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23–71–30008).

For citation: I. G. Mileschin, A. V. Kalinin, and A. A. Tyukhtina, “Numerical simulation of global electrical circuit problems with non-classical boundary conditions,” *Numerical Methods and Programming*, 27 (2), 290–301 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r219.

1. Введение. В работе рассматриваются задачи, возникающие при моделировании глобальной электрической цепи Земли с неклассическими граничными условиями [1]. Основные физические аспекты для рассматриваемых задач приведены в [2, 3].

В модели глобальной электрической цепи Земли в качестве границ рассматриваются поверхности Земли и верхнего слоя атмосферы. Атмосфера является проводящей средой с неоднородной проводимостью [4]. Возможна постановка неклассических граничных условий следующих видов [5, 6]:

- 1) равенство потенциалов во всех точках границы, разделяющих атмосферу и ионосферу;
- 2) равенство потенциалов в эквипотенциальных точках на границе, разделяющей атмосферу и ионосферу.

Математическое моделирование электрических процессов в атмосфере требует суперкомпьютерных вычислений и эффективного распараллеливания, так как моделирование осуществляется в шаровом слое порядка 70 км в толщину. Токи и проводимость считаются заданными. Одна из двумерных постановок подробно рассматривалась в работе [7]. В частности, равенство потенциалов в магнитосопряженных точках тяжело реализовать с помощью существующих пакетов, поэтому целесообразно написание собственного сеточного генератора и “решателя” для данной задачи. При данном подходе возможно использование стороннего решателя СЛАУ. Подход к численному решению основан на методе конечных элементов с использованием структурированных восьмиугольных сеток. Целью нашей работы является эффективное

распараллеливание численного метода с использованием технологии MPI, подбор параметров итерационного решателя, а также сравнение результатов моделирования для задач с различными граничными условиями.

2. Постановка задачи. Рассмотрим квазиэлектрическое приближение для системы уравнений Максвелла. Оно имеет следующий вид [8]:

$$\nabla \times \mathbf{H}(x, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(x, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, t) = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(x, t) = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(x, t) = 4\pi \tilde{\rho}(x). \quad (4)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{J} — плотность тока, \mathbf{D} — электрическая индукция, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{B} — магнитная индукция, $\tilde{\rho}$ — плотность электрических зарядов, c — скорость света в вакууме. Область Ω представляет собой шаровой слой с границей Γ , состоящей из двух компонент связности Γ_1 и Γ_2 , которые являются сферами в \mathbb{R}^3 , Γ_1 — поверхность Земли, Γ_2 — поверхность, соответствующая верхнему слою атмосферы. Будем считать, что для всех точек границы задан вектор единичной внешней нормали ν . Вид расчетной области представлен на рис. 1.

Рассмотрим материальные соотношения для неизвестных функций:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^{\text{ext}}. \quad (7)$$

Как правило, при моделировании электромагнитных процессов в атмосфере диэлектрическую проницаемость ε и магнитную проницаемость μ полагают постоянными и равными 1:

$$\varepsilon(x) \equiv 1, \quad \mu(x) \equiv 1. \quad (8)$$

В атмосфере удельная проводимость $\sigma(x, t)$ имеет вид

$$\sigma(x, t) = \sigma_0 e^{(|x|-R_0)/h},$$

где R_0 — радиус Земли, h , σ_0 — некоторые положительные постоянные. Плотность сторонних токов \mathbf{J}^{ext} будем считать известной заданной функцией.

Учитывая уравнения (1)–(4), материальные соотношения (5)–(7), и условия на константы (8), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(x, t) &= \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}(x, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E}(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Исходя из того, что область Ω односвязна, с учетом (9) получим: существует функция $\phi(x, t)$ такая, что

$$\mathbf{E}(x, t) = -\nabla \phi(x, t). \quad (10)$$

Функция $\phi(x, t)$ называется скалярным электрическим потенциалом.

Подставив (10) в (1), получим следующее уравнение:

$$\nabla \times \mathbf{H}(x, t) = -\frac{4\pi}{c} \sigma \nabla \phi(x, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{\text{ext}}(x, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t}. \quad (11)$$

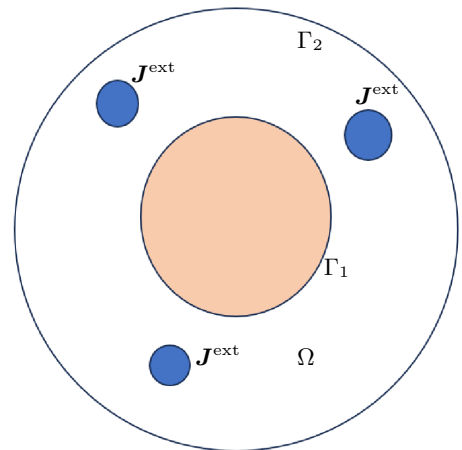


Рис. 1. Схематичный разрез модели земного шара. Границами атмосферы Ω являются поверхность Земли Γ_1 и нижняя граница ионосферы Γ_2 . Облака являются источниками тока

Fig. 1. Schematic section of the globe model. The boundaries of the atmosphere Ω are the Earth surface Γ_1 and the lower boundary of the ionosphere Γ_2 . The clouds are current sources



Применим оператор дивергенции к левой и правой частям уравнения (11) и, учитывая, что данное преобразование не является эквивалентным переходом, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \Delta \phi(x, t)}{\partial t} = -4\pi \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi(x, t)) + 4\pi \nabla \cdot (\mathbf{J}^{\text{ext}}(x, t)), \quad (12)$$

$$\oint_{\Gamma_1} \left(\frac{\nabla \partial \phi(x, t)}{\partial t} + 4\pi \sigma \nabla \phi(x, t) \right) \boldsymbol{\nu} d\Gamma_1 = 4\pi \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{J}^{\text{ext}}(x, t)) \boldsymbol{\nu} d\Gamma_1. \quad (13)$$

Исходя из того, что область Ω — шаровой слой, для того чтобы переход от (11) к (12) был равносильным, необходимо выполнение интегральных равенств для потоков:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{f} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \\ \oint_{\Gamma_i} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma_i = 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Эти соотношения являются следствием теоремы Стокса. В данном случае возможно лишь использование уравнения (13).

Для завершения постановки задачи необходимо ввести начальное условие: $\phi|_{t=0} = \phi_0$.

3. Граничное условие в виде неизвестного ионосферного потенциала. Учитывая, что проводимость Земли значительно превышает проводимость приземных слоев атмосферы и что проводимость атмосферы с изменением высоты возрастает по экспоненциальному закону, будем считать границы рассматриваемой области Ω идеальными проводниками, что соответствует заданию на границе Γ следующего условия для тангенциальной компоненты напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E}_\tau(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (14)$$

Из (14) следует, что

$$\nabla \phi \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (15)$$

$\boldsymbol{\tau}$ — касательный вектор к области, следовательно, из (15) получаем, что $\phi = \text{const}$ на Γ .

Принимая во внимание тот факт, что между приземными слоями атмосферы и ионосферой существует устоявшаяся разность потенциалов, можно считать, что задано следующее граничное условие:

$$\phi(x, t) = C, \quad x \in \Gamma_2, \quad \phi(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma_1.$$

Здесь C — неизвестная константа, которую принято называть ионосферным потенциалом.

4. Граничное условие в магнитосопряженных точках. Рассмотрим теперь формулировку начально-краевой задачи с условиями в магнитосопряженных точках. Поверхность Γ_1 снова рассматривается как идеальный проводник, т.е. граничное условие на Γ_1 имеет следующий вид:

$$\phi(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma_1. \quad (16)$$

На верхней границе атмосферы Γ_2 граничное условие можно задать, если учесть тот факт, что на больших высотах ток течет вдоль силовых линий геомагнитного поля. Предполагается, что поверхность Γ_2 симметрична относительно некоторой плоскости, пересекающей Ω . Такая плоскость называется геомагнитным экватором. Каждая пара симметричных точек, лежащих на одной линии геомагнитного поля, называется магнитосопряженными точками. Определим отображение $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ таким образом, что $\xi(\Gamma_2) = \Gamma_2^*$. Каждой точке поверхности Γ_2 соответствует магнитосопряженная точка. Граничное условие будет иметь следующий вид:

$$\phi(x, t) = \phi(\xi(x), t), \quad x \in \Gamma_2, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} + 4\pi \sigma \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) (x, t) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} + 4\pi \sigma \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) (\xi(x), t) = 0, \quad x \in \Gamma_2. \quad (18)$$

Таким образом, граничные условия представлены формулами (16)–(18).

5. Обобщенная постановка задачи. Домножим (12) на некоторую пробную функцию ψ и проинтегрируем по пространству. Получим:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Delta \phi(x, t)}{\partial t} \psi d\Omega = - \int_{\Omega} 4\pi \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi(x, t)) \psi d\Omega + 4\pi \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{J}^{\text{ext}}(x, t)) \psi d\Omega. \quad (19)$$

Воспользуемся тождеством векторного анализа:

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (20)$$

Применив тождество (20) и преобразовав (19), получим:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{\partial \nabla \phi(x, t)}{\partial t} \nabla \psi d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \nabla \phi(x, t)}{\partial t} \psi \right) d\Omega = \\ = -4\pi \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi(x, t) \psi) d\Omega + 4\pi \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi(x, t) \nabla \psi d\Omega + \\ + 4\pi \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{J}^{\text{ext}}(x, t) \psi) d\Omega - 4\pi \int_{\Omega} \mathbf{J}^{\text{ext}}(x, t) \nabla \psi d\Omega. \end{aligned}$$

Воспользуемся граничными условиями и теоремой Гаусса–Остроградского. Тогда получим общую для двух задач интегральную постановку. Отличия будут лишь в используемых пространствах. Итоговая постановка имеет вид

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \nabla \phi(x, t)}{\partial t} \nabla \psi d\Omega + \int_{\Omega} 4\pi \sigma \nabla \phi(x, t) \nabla \psi d\Omega = 4\pi \int_{\Omega} \mathbf{J}^{\text{ext}}(x, t) \nabla \psi d\Omega. \quad (21)$$

В стационарном случае (21) будет иметь вид

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi(x, t) \nabla \psi d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{J}^{\text{ext}}(x, t) \nabla \psi d\Omega. \quad (22)$$

Функции ϕ, ψ в зависимости от выбранного граничного условия принадлежат соответствующим гильбертовым пространствам. Описание пространств, доказательство теоремы существования и единственности, а также сходимость метода Галеркина подробно изложены в [9, 10].

6. Особенности применения метода конечных элементов для численного решения задач. В рассматриваемых задачах $\sigma_0 = 5 \cdot 10^{-14}$ См/м, $r_0 = 6370000$ м, $r_1 = 6440000$ м, $r_s = 5000$ м, $\max |\mathbf{J}^{\text{ext}}| = 2 \cdot 10^{-9}$ См · В/м². Экспоненциальный рост проводимости и локализованность внутри области сторонних токов с малыми значениями приводит к необходимости выполнения нелинейной замены переменных для упрощения численной реализации.

Сделаем нелинейную замену переменных следующего вида:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad (23)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad (24)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (25)$$

Как известно, якобиан в сферических координатах (23)–(25) равен

$$J = r^2 \sin \theta. \quad (26)$$

Сделаем вторую замену переменных следующего вида:

$$\rho = \sigma_0 e^{(r-r_0)/r_s}. \quad (27)$$

Выразив r из (27), получим:

$$r = \ln(\rho/\sigma_0) \cdot r_s + r_0. \quad (28)$$



В новых переменных якобиан (26) с учетом (27) будет равен

$$J_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\sigma_0}{\rho} r_s. \tag{29}$$

Полученные значения (26)–(29) будут в дальнейшем использованы для вычисления интегралов. Также будем пользоваться тем фактом, что в сферических координатах градиент имеет вид

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right). \tag{30}$$

Перейдя к координатам ρ, θ, φ , получим из (30):

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\rho}{r_s}, \frac{1}{\ln(\rho/\sigma_0)r_s + r_0} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{(\ln(\rho/\sigma_0)r_s + r_0) \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right). \tag{31}$$

В новых переменных ρ, θ, φ шаровой слой будет представлять собой область $[\sigma_0, \sigma_0 e^{(r_1-r_0)/r_s}] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, в которой точки вида $(\rho, \theta, \varphi), (\rho, \theta, 2\pi - \varphi)$ являются эквивалентными.

Особого внимания заслуживают стационарные задачи. Следуя концепции метода конечных элементов, будем искать решение задачи в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(\rho, \theta, \varphi). \tag{32}$$

По переменным θ, φ выберем равномерное разбиение. По переменной ρ выберем разбиение, соответствующее равномерному разбиению по r . Таким образом, в указанных переменных рассматриваемая область разбивается на параллелепипеды. Учет граничных условий и эквивалентность точек с равной φ -координатой учитывается с помощью специальных алгоритмов нумерации неизвестных (в магнито-сопряженных узлах находится одна и та же степень свободы, для задачи с неизвестным ионосферным потенциалом во всех узлах, находящихся на Γ_2 , находится одна и та же степень свободы). Функции ϕ_i трилинейные и в тех ячейках, где они не равны нулю, имеют следующий вид:

$$\phi_i(\rho, \theta, \varphi) = a\rho + b\theta + c\varphi + d\rho\theta + e\rho\varphi + f\theta\varphi + g\rho\theta\varphi + h. \tag{33}$$

В (22) воспользуемся (31), вместо ϕ будем подставлять (32), а вместо ψ будем последовательно подставлять функции ϕ_j , которые имеют вид (33).

В итоге получим СЛАУ вида:

$$Au = f,$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial \rho} \frac{\partial \phi_j}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{r_s} \right)^2 + \left(\frac{1}{\ln(\rho/\sigma_0)r_s + r_0} \right)^2 \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{(\ln(\rho/\sigma_0)r_s + r_0) \sin \theta} \right)^2 \frac{\partial \phi_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \varphi} \right] (\ln(\rho/\sigma_0)r_s + r_0)^2 \sin \theta \frac{\sigma_0}{\rho} r_s d\Omega,$$

$$f_i = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial \rho} \frac{\rho}{r_s} \cdot J_1^{\text{ext}} + \frac{1}{\ln(\rho/\sigma_0)r_s + r_0} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \cdot J_2^{\text{ext}} + \frac{1}{(\ln(\rho/\sigma_0)r_s + r_0) \sin \theta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \varphi} \cdot J_3^{\text{ext}} \right] (\ln(\rho/\sigma_0)r_s + r_0)^2 \sin \theta \frac{\sigma_0}{\rho} r_s d\Omega. \tag{34}$$

Нелинейные преобразования необходимы для того, чтобы была возможность использования итерационных решателей СЛАУ, так как применение прямых решателей накладывает сильные ограничения на количество неизвестных. Полученная СЛАУ (34), несмотря на использование неклассических граничных условий, является сильно разреженной. Для работы с разреженными матрицами и для решения СЛАУ используется библиотека HYPRE [11].

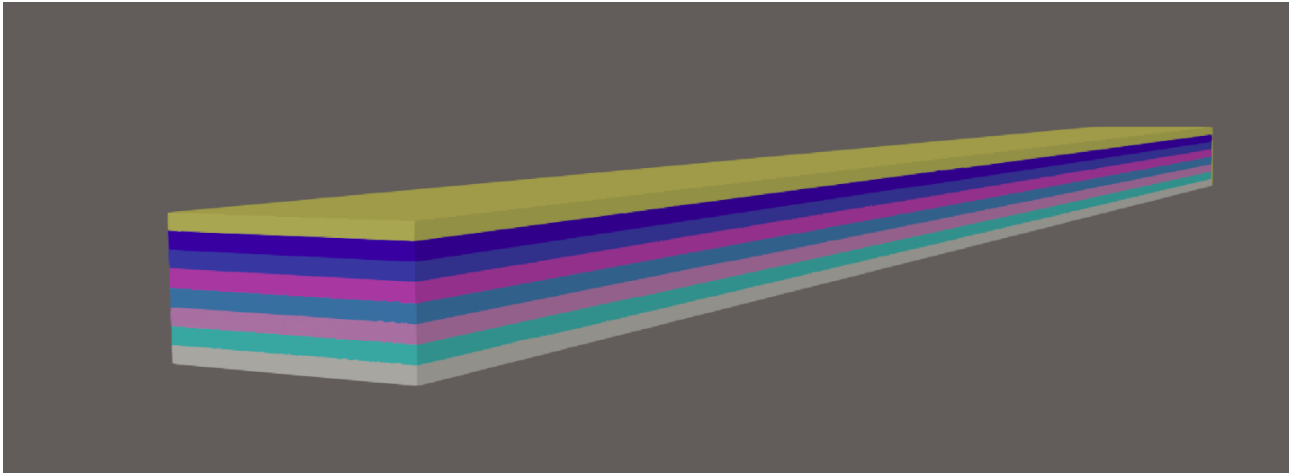


Рис. 2. Декомпозиция расчетной задачи на 8 MPI процессов.
 Различные цвета соответствуют различным процессам

Fig. 2. Decomposition of the computational problem into 8 MPI processes.
 Different colors correspond to different processes

7. Распараллеливание с помощью MPI и параметры решателя. Сборка конечно-элементной матрицы и правой части выглядит следующим образом:

- 1) цикл по ячейкам сетки;
- 2) цикл по узлам ячейки;
- 3) цикл по квадратурным точкам;
- 4) сборка вкладов в локальную матрицу (или правую часть);
- 5) учет вклада локальной матрицы (или правой части) в глобальную.

Использование собственного сеточного генератора, основанного на декартовой решетке, позволяет выполнить декомпозицию области таким образом, чтобы каждый MPI процесс хранил определенные строки матрицы и компоненты вектора правой части. Данный алгоритм можно организовать следующим образом.

Пусть N — общее количество неизвестных в СЛАУ, m — количество MPI процессов. Первые $m - 1$ процессов получают одинаковое количество неизвестных $n_i = N/m$. Последний процесс получает количество неизвестных $n_m = N - \sum_{i=1}^{m-1} n_i$.

На i -м процессе номера неизвестных в глобальной системе (от 1 до N) лежат в промежутке:

- 1) для $i < m$ от $\frac{N}{m}(i - 1) + 1$ до $\frac{N}{m}i$;
- 2) для $i = m$ от $\frac{N}{m}(i - 1) + 1$ до N .

Внутри процесса эти же неизвестные нумеруются локально от 1 до n_i . Алгоритм сборки глобальной матрицы на каждом процессе будет выглядеть следующим образом.

1. Сгенерировать сетку (разбиение области).
2. Собрать локальные матрицы только для тех ячеек, где хотя бы один номер неизвестного элемента (в глобальной нумерации) попадает в интервал, закрепленный за данным процессом.
3. Внести вклад в глобальную матрицу, которая хранится на этом процессе: хранятся только те строки, чьи локальные номера от 1 до n_i .

Декомпозиция области представлена на рис. 2. Декомпозиция на последнем MPI процессе из-за использования неклассических граничных условий имеет вид, представленный на рис. 3.

Для решения СЛАУ используется PCG с предобуславливателем AMG из библиотеки HYPRE. Были подобраны следующие значения параметров, которые оказались применимыми сразу для двух представленных задач: $\text{relax} = 6$, $\text{interp} = 18$, $\text{coarsen} = 8$.

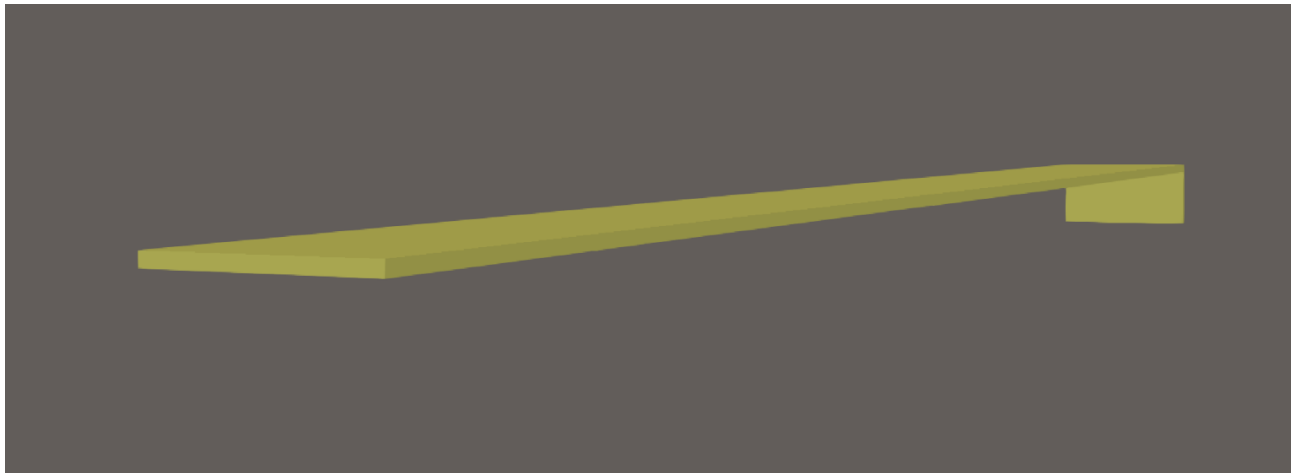


Рис. 3. Декомпозиция области на последнем процессе

Fig. 3. Domain decomposition on last process

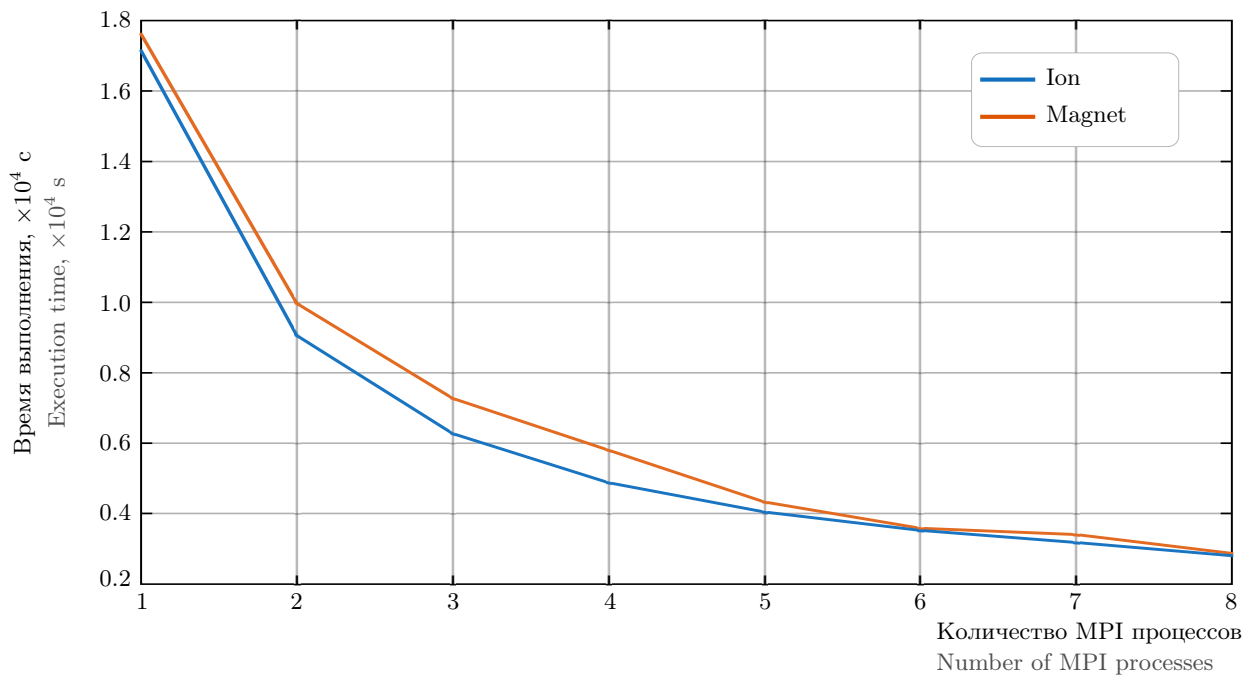


Рис. 4. Зависимость времени выполнения от количества MPI процессов

Fig. 4. Dependence of execution time on the number of MPI processes

Зависимость времени выполнения программы от количества запущенных MPI процессов для каждой из задач, в которых используются сетки содержали 8 миллионов ячеек, представлена на рис. 4.

8. Тестовая задача. Рассмотрим задачу в шаровом слое с радиусами, соответствующими радиусу Земли и радиусу ионосферы. Для этой задачи $r \in [6370000, 6440000]$ м, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Здесь 6440000 м – расстояние от центра Земли до условной границы, разделяющей атмосферу и ионосферу. Проводимость атмосферы неоднородна и имеет вид

$$\sigma(r) = \sigma_0 e^{(r-r_0)/r_s} \text{ СМ/м}, \quad r_s = 5000 \text{ м}, \quad r_0 = 6370000 \text{ м}, \quad \sigma_0 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ СМ/м}.$$

Сторонние токи $\mathbf{J}^{\text{ext}}(r, \theta, \varphi)$ локализованы внутри рассматриваемой области. Пусть $\Omega_1 = \{(r, \theta, \varphi), r_2 \leq r \leq r_3, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$, $r_2 = 1000$ м, $r_3 = 1700$ м, $\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = \pi/4$, $\varphi_1 = \pi/6$, $\varphi_2 = \pi/4$.

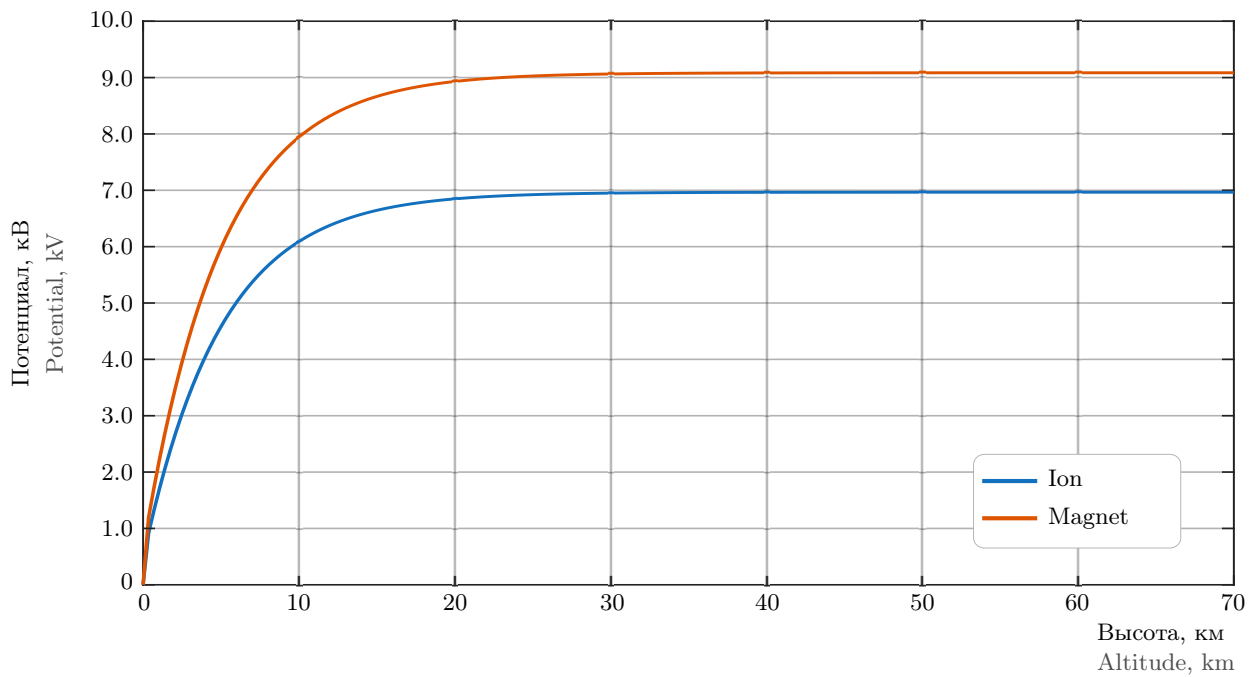


Рис. 5. Характерный вид решения вне облака
 Fig. 5. Typical view of the solution outside the cloud

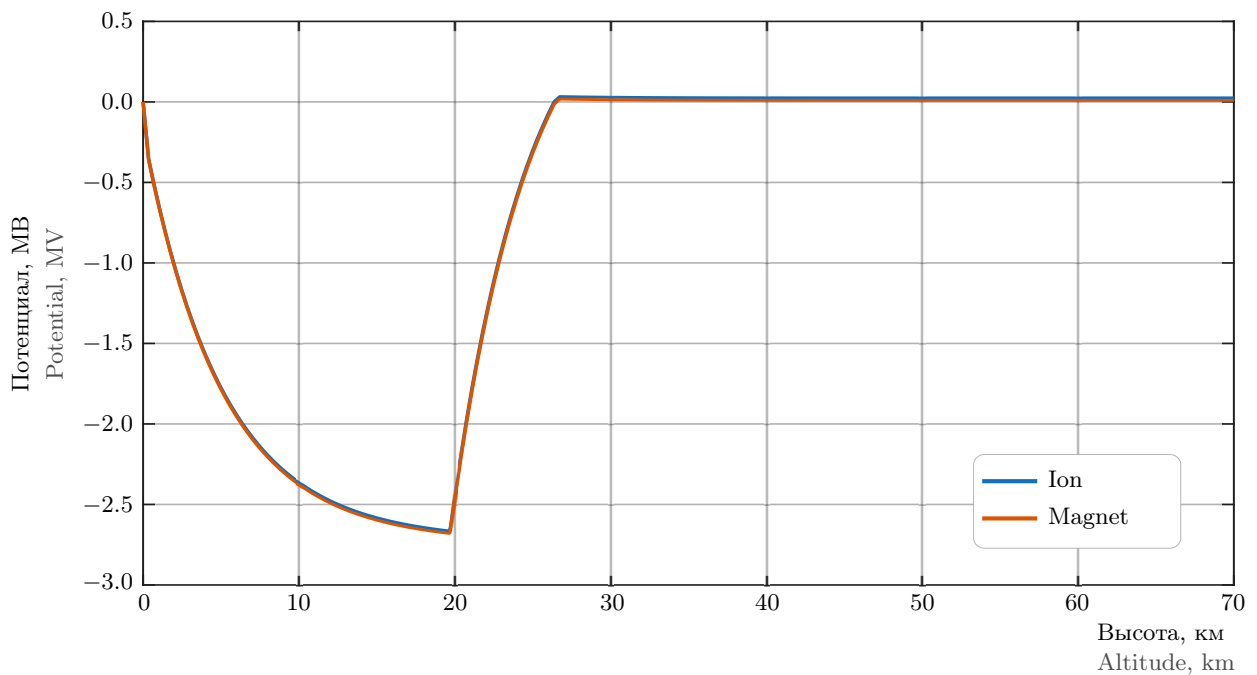


Рис. 6. Характерный вид решения внутри облака
 Fig. 6. Typical view of the solution inside the cloud

В этом случае функция сторонних токов имеет вид

$$J^{\text{ext}}(r, \theta) = \begin{cases} 0, & r \notin \Omega_1, \\ 2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{М}^2}, & r \in \Omega_1. \end{cases}$$

Вне облака численное решение задачи при $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ имеет характерный вид (рис. 5).
 Внутри облака численное решение задачи при $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ имеет характерный вид (рис. 6).

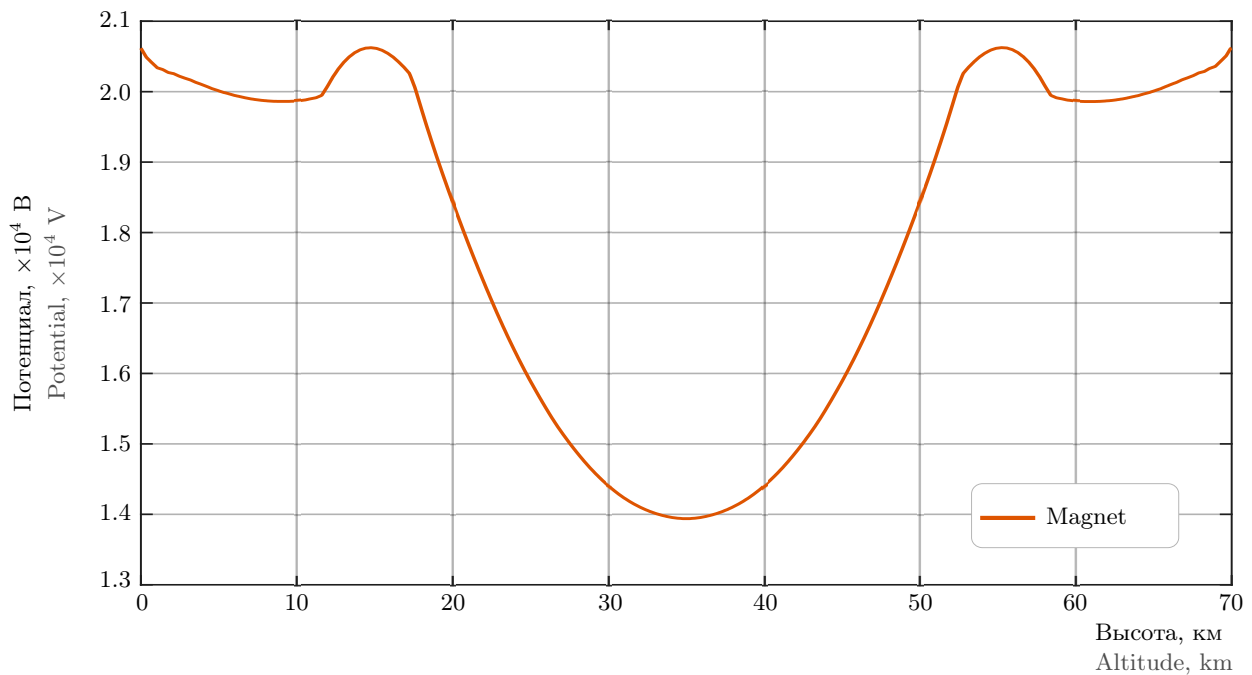


Рис. 7. Распределение потенциала на границе Γ_2 для магнитосопряженной задачи

Fig. 7. Potential distribution on the boundary Γ_2 for the magnet of the conjugate problem

На границе Γ_2 для магнитосопряженной задачи при фиксированном угле φ распределение потенциала имеет вид, представленный на рис. 7.

9. Выводы. Описаны особенности реализации и параметры решателя СЛАУ для моделирования задач атмосферного электричества с использованием метода конечных элементов.

Путем нелинейных замен удалось свести расчетную область к достаточно простому виду, что позволило использовать собственные алгоритмы генерации сетки для учета граничных условий, а также собственные методы декомпозиции области. Для представленных задач удалось применить итерационный решатель СЛАУ с параметрами, одинаковыми для каждой из задач.

Отдельно хотелось бы отметить, что моделирование задачи с граничным условием в магнитосопряженных точках оказалось значительно более трудоемким. Для достижения точности 10^{-5} в среднем требуется в 5 раз больше итераций решателя, чем для задачи с граничным условием в виде неизвестного ионосферного потенциала. Решения задач получаются качественно похожими, но количественно может наблюдаться существенная разница. Подробно эта зависимость исследована в работе [10].

Таким образом, применение итерационного решателя в сочетании с технологией параллелизации MPI позволило выполнять численное моделирование за приемлемое время для расчетных областей, содержащих до 12 миллионов узлов. Расчеты проводились на 8-ядерном процессоре AMD Ryzen 7 7435H с доступным объемом оперативной памяти 32 ГБ.

Использование сеток с миллионами неизвестных необходимо для корректного моделирования рассматриваемых процессов. При разбиении области менее чем на 100 ячеек по каждому направлению наблюдаются существенные скачки потенциала на верхней границе; при более мелком разбиении эта разница становится незначительной, составляет порядка 5%. Для задачи с граничными условиями в магнитосопряженных точках вычислялось среднее значение потенциала на верхней границе расчетной области.

Указанная особенность обусловлена большими скачками решения, достигающими 10^7 В, а также использованием конечных элементов первого порядка, для которых погрешность решения имеет первый порядок. При разбиении, соответствующем миллиону ячеек, размер ячейки по r -компоненте равен 700 м.

Отдельно стоит отметить, что применение прямого решателя на тех же доступных вычислительных ресурсах ограничило бы возможности расчета одним миллионом неизвестных, что не позволило бы выполнять численные исследования с приемлемым сеточным разрешением, необходимым для получения корректного значения потенциала на верхней границе.

Список литературы

1. Kalinin A.V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2017. **450**, N 1. 112–136. doi 10.1016/j.jmaa.2017.01.025.
2. Wilson C.T.R. Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms // Phil. Trans. Roy. Soc. Lon. A. 1921. **221**. 73–115.
3. Anisimov S.V., Bakastov S.S., Mareev E.A. Spatiotemporal structures of electric field and space charge in the surface atmospheric layer // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. 1994. **99**, N D5. 10603–10610. doi 10.1029/93JD03519.
4. Slyunyaev N.N., Mareev E.A., Kalinin A.V., Zhidkov A.A. Influence of large-scale conductivity inhomogeneities in the atmosphere on the global electric circuit // J. Atmos. Sci. 2014. **71**, N 11. 4382–4396.
5. Денисова Н.А. Модель глобальной электрической цепи с условиями в магнито-сопряженных точках верхней границы атмосферы в нестационарном случае // Геомагнетизм и аэронавигация. 2025. **65**, № 2. 214–228. doi 10.7868/S3034502225020072.
6. Kalinin A.V., Slyunyaev N.N., Mareev E.A., Zhidkov A.A. Stationary and nonstationary models of the global electric circuit: well-posedness, analytical relations, and numerical implementation // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2014. **50**, N 3. 314–322. doi 10.1134/S0001433814030074.
7. Милешин И.Г., Головизнин В.М., Хапаев М.М. Численное моделирование задачи атмосферного электричества с неизвестным ионосферным потенциалом // Вычислительные методы и программирование. 2023. **24**, № 3. 305–315. doi 10.26089/NumMet.v24r322.
8. Ogawa T. Fair-weather electricity // J. Geophys. Res. Atmos. 1985. **90**, N D4. 5951–5960. doi 10.1029/JD090iD04p05951.
9. Жидков А.А., Калинин А.В. Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 4. 123–129.
10. Kalinin A., Tyukhtina A., Mileshin I. Justification and implementation of the Galerkin method for solving non-classical mathematical problems of the atmospheric electricity theory // 24th International Conference Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies (MMST 2024), Nizhni Novgorod, Russia, November 18–21, 2024. Communications in Computer and Information Science. Vol. 2363. Cham: Springer Nature, 2025. pp. 198–212. doi 10.1007/978-3-031-80457-1_15.
11. HYPRE. <https://computing.llnl.gov/projects/hypre-scalable-linear-solvers-multigrid-methods/software/>. Cited May 7, 2026.

Получена
27 марта 2026 г.

Принята
28 апреля 2026 г.

Опубликована
29 мая 2026 г.

Информация об авторах

Иван Геннадьевич Милешин — ассистент; Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Саров, Нижегородская обл., г. Саров, ул. Парковая, д. 8, 607328, Саров, Российская Федерация.

Алексей Вячеславович Калинин — д.ф.-м.н., профессор; 1) Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, пр-кт Гагарина, 23, 603022, Нижний Новгород, Российская Федерация; 2) Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, ул. Большая Печерская, 25/12, 603155, Нижний Новгород, Российская Федерация.

Алла Александровна Тюхтина — к.ф.-м.н., доцент; Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, пр-кт Гагарина, 23, 603022, Нижний Новгород, Российская Федерация.

References

1. A. V. Kalinin and N. N. Slyunyaev, “Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit,” Journal of Mathematical Analysis and Applications **450** (1), 112–136 (2017). doi 10.1016/j.jmaa.2017.01.025.



2. C. T. R. Wilson, “Investigations on Lightning Discharges and on the Electric Field of Thunderstorms,” *Phil. Trans. Roy. Soc. Lon. A* **221**, 73–115 (1921).
3. S. V. Anisimov, S. S. Bakastov, and E. A. Mareev, “Spatiotemporal structures of electric field and space charge in the surface atmospheric layer,” *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* **99** (D5), 10603–10610 (1994). doi [10.1029/93JD03519](https://doi.org/10.1029/93JD03519).
4. N. N. Slyunyaev, E. A. Mareev, A. V. Kalinin, and A. A. Zhidkov, “Influence of large-scale conductivity inhomogeneities in the atmosphere on the global electric circuit,” *J. Atmos. Sci.* **71** (11), 4382–4396 (2014).
5. N. A. Denisova, “Model of a Global Electric Circuit with Conditions at Magnetic Conjugate Points of the Upper Boundary of the Atmosphere in the Non-Stationary Case,” *Geomagnetism and Aeronomy* **65** (2), 214–228 (2025). doi [10.7868/S3034502225020072](https://doi.org/10.7868/S3034502225020072).
6. A. V. Kalinin, N. N. Slyunyaev, E. A. Mareev, and A. A. Zhidkov, “Stationary and nonstationary models of the global electric circuit: well-posedness, analytical relations, and numerical implementation,” *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **50** (3), 314–322 (2014). doi [10.1134/S0001433814030074](https://doi.org/10.1134/S0001433814030074).
7. I. G. Milesin, V. M. Goloviznin, and M. M. Khapaev, “Numerical simulation of atmospheric electricity problem with unknown ionosphere potential,” *Numerical Methods and Programming [Vychislitel’nye Metody i Programirovanie]* **24** (3), 305–315 (2023). doi [10.26089/NumMet.v24r322](https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r322).
8. T. Ogawa, “Fair-Weather Electricity,” *J. Geophys. Res. Atmos.* **90** (D4), 5951–5960 (1985). doi [10.1029/JD090iD04p05951](https://doi.org/10.1029/JD090iD04p05951).
9. A. A. Zhidkov and A. V. Kalinin, “Correctness of One Mathematical Problem of Atmospheric Electricity,” *Vestnik NNGU im. N.I. Lobachevskogo* № 4, 123–129 (2009).
10. A. Kalinin, A. Tyukhtina, and I. Milesin, “Justification and Implementation of the Galerkin Method for Solving Non-classical Mathematical Problems of the Atmospheric Electricity Theory,” in *24th International Conference Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies (MMST 2024), Nizhni Novgorod, Russia, November 18–21, 2024*. Communications in Computer and Information Science. Vol. 2363. (Springer Nature, Cham 2025), pp. 198–212. doi [10.1007/978-3-031-80457-1_15](https://doi.org/10.1007/978-3-031-80457-1_15).
11. HYPRE. <https://computing.llnl.gov/projects/hypre-scalable-linear-solvers-multigrid-methods/software/>. Cited May 7, 2026.

Received
 March 27, 2026

Accepted
 April 28, 2026

Published
 May 29, 2026

Information about the authors

Ivan G. Milesin — assistant; Sarov Branch of Moscow State University, Parkovaya ulitsa, 8, 607328, Sarov, Russia.

Alexey V. Kalinin — Dr. Sci., Professor; 1) National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Gagarina prospekt, 23, 603022, Nizhny Novgorod, Russia; 2) National Research University “Higher School of Economics”, Bol’shaya Pechorskaya ulitsa, 25/12, 603155, Nizhny Novgorod, Russia.

Alla A. Tyukhtina — Ph.D., Associate Professor; National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Gagarina prospekt, 23, 603022, Nizhny Novgorod, Russia.