



Конечно-разностная схема расщепления для численного моделирования течения крови в артериях

Г. В. Кривовичев

Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики–процессов управления,
Санкт-Петербург, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-1135-1469, e-mail: g.krivovichev@spbu.ru

Р. В. Пухаленко

Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики–процессов управления,
Санкт-Петербург, Российская Федерация
ORCID: 0009-0004-0083-2373, e-mail: ruslanpuhalenko@gmail.com

Аннотация: Работа посвящена построению схемы расщепления для численного решения одномерных уравнений, описывающих течение крови. Такие уравнения получаются посредством осреднения системы уравнений гидродинамики по поперечному сечению сосуда. Предложена нелинейная неявная схема с конечно-разностными аппроксимациями второго порядка по пространственной переменной. Показана безусловная устойчивость схемы по начальным условиям. Для практической реализации предлагается применять метод расщепления, при котором расчеты на каждом слое по времени проводятся в два этапа. Это позволяет свести задачу к последовательному решению линейных систем с трехдиагональными матрицами. При решении тестовой задачи с известным аналитическим решением показано, что на практике достигается второй порядок сходимости. Проведены численные эксперименты по сравнению предложенной схемы с известными явными разностными схемами второго порядка, в ходе которых исследовались течения в модельных сосудистых системах. Показано, что предложенная схема обладает большей вычислительной эффективностью и позволяет проводить расчеты с меньшим числом шагов и за меньшее время.

Ключевые слова: уравнения гемодинамики, схема расщепления, устойчивость.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25–21–00471 (<https://rscf.ru/project/25-21-00471/>).

Для цитирования: Кривовичев Г.В., Пухаленко Р.В. Конечно-разностная схема расщепления для численного моделирования течения крови в артериях // Вычислительные методы и программирование. 2026. 2, № 2. 119–134. doi 10.26089/NumMet.v27r209.



Finite-difference splitting scheme for numerical modeling of blood flow in arteries

Gerasim V. Krivovichev

Saint-Petersburg State University,
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,
Saint-Petersburg, Russia

ORCID: 0000-0002-1135-1469, e-mail: g.krivovichev@spbu.ru

Ruslan V. Pukhalenko

Saint-Petersburg State University,
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,
Saint-Petersburg, Russia

ORCID: 0009-0004-0083-2373, e-mail: ruslanpuhalenko@gmail.com

Abstract: The paper is devoted to the construction of a splitting scheme for solution of one-dimensional equations describing blood flow dynamics. Such equations are obtained by averaging the system of hydrodynamic equations over the vessel cross-section. A nonlinear implicit scheme with second-order finite-difference approximations on spatial variable is proposed. Unconditional stability of the scheme with respect to initial conditions is demonstrated. For practical implementation, it is proposed to apply a splitting method, where computations at each time level are performed in two stages. This approach reduces the problem to the sequential solution of linear systems with tridiagonal matrices. The second-order convergence is demonstrated in practice on a test problem with a known analytical solution. Results of the numerical experiments on simulating flows in model vascular systems are presented and compared with the ones obtained using known explicit second-order difference schemes. It is shown that the proposed scheme has higher computational efficiency and requires fewer steps and less computation time.

Keywords: hemodynamic equations, splitting scheme, stability.

Acknowledgements: The study is supported by grant No. 25–21–00471 (<https://rscf.ru/project/25-21-00471/>) of Russian Science Foundation.

For citation: G. V. Krivovichev and R. V. Pukhalenko, “Finite-difference splitting scheme for numerical modeling of blood flow in arteries,” *Numerical Methods and Programming*, 27 (2), 119–134 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r209.

1. Введение. Математические модели течения крови в последние годы используются для диагностики и анализа последствий различных операций и заболеваний, моделирования влияния патологий и разработки новых медицинских устройств [1–5]. Для моделирования течений в больших сосудистых системах, как правило, используются одномерные модели, полученные осреднением уравнений гидродинамики [6, 7]. При этом численные решения получающихся начально-краевых задач хорошо согласуются с осредненными решениями пространственных моделей [8].

За исключением весьма упрощенных случаев, задачи для одномерных моделей гемодинамики можно решить только численно. Для дискретизации уравнений по пространству используются методы конечных разностей, конечных элементов и конечных объемов. Как отмечается в [9, 10], схемы с конечно-разностными аппроксимациями являются наиболее простыми и удобными для практической реализации. При расчетах часто используются явные схемы второго порядка. Вычисления по явным схемам на текущем временном слое во внутренних узлах сеток для каждого из сосудов можно проводить независимо, отдельно выполняя расчеты в граничных узлах после получения значений во внутренних узлах. Из-за этого алгоритмы расчетов по таким схемам обладают высоким параллелизмом.

Конечно-разностные схемы применяются к решению задач гемодинамики в большом числе работ. В [11] для расчетов используются схемы Лакса–Вендроффа и Мак–Кормака. В работах [12, 13] схема Лакса–Вендроффа применяется для моделирования процессов в системе коронарных артерий, в [14, 15] —



для исследования в модели артериальной системы. В [16] разработан пакет программ для моделирования процессов гемодинамики, основанный на применении схемы Лакса–Вендроффа. В работе [10] для проведения расчетов предлагается использовать схему Лакса–Фридрикса.

Поскольку описываемые выше схемы являются явными, при практическом применении они требуют выполнения ограничения на шаг по времени. Из-за этого некоторые авторы используют неявные схемы. В работе [17] предложена неявная схема с весами и регуляризирующими членами для уменьшения влияния нефизических численных эффектов. В [18, 19] представлены неявные схемы, построенные на основе θ -метода. В [20] предложена неявная схема с конечно-элементными аппроксимациями по пространству. Работа [21] посвящена разработке неявной схемы, в которой для аппроксимации по пространству используется метод коллокации по подобластям.

Основная сложность при практической реализации неявных схем связана с необходимостью решения на каждом временном слое глобальной системы нелинейных алгебраических уравнений, состоящей из дискретизованных уравнений динамики в каждом сосуде и дискретизованных условий в точках сочленений и ветвлений сосудов. В случае явных схем, как уже отмечалось выше, такая проблема отсутствует, и расчеты во внутренних узлах сеток для каждого из сосудов можно проводить независимо.

В настоящей работе предлагается конечно-разностная схема для системы одномерных уравнений гемодинамики, построенная на основе неявного метода. Предлагаемый подход не требует решения глобальной системы уравнений на каждом временном слое. Схема основана на методе расщепления, что позволяет вместо нелинейной системы последовательно решать две линейные системы с трехдиагональными матрицами. При этом сохраняется достоинство явных схем, связанное с независимыми расчетами в каждом из сосудов в текущий момент времени. Показана безусловная устойчивость чисто неявной схемы по начальным условиям. В ходе тестовых расчетов установлено, что достигается теоретический (второй) порядок сходимости, и продемонстрирована эффективность по сравнению с известными явными схемами второго порядка. Данная работа является развитием подхода, предложенного в [22].

2. Уравнения гемодинамики. Одномерные уравнения, полученные посредством осреднения уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости по поперечному сечению сосуда, в случае игнорирования вязкости крови (что допустимо при рассмотрении процессов в артериях [23]) имеют вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(AU)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{U^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где t — время, z — пространственная переменная, $A = A(t, z)$ — площадь поперечного сечения, $U = U(t, z)$ — средняя скорость потока, $\rho = \text{const}$ — плотность, $P = P(t, z)$ — среднее давление. Для замыкания системы (1) используется уравнение состояния $P = P(A)$. Для артерий в большинстве работ применяется соотношение вида [24]:

$$P - P_{\text{ext}} = P_{\text{dia}} + \frac{\beta}{A_{\text{dia}}} (\sqrt{A} - \sqrt{A_{\text{dia}}}), \quad (2)$$

где P_{ext} — внешнее давление, A_{dia} и P_{dia} — площадь и давление во время диастолы, $\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} E l$, E — модуль Юнга, l — толщина стенки сосуда. Далее предполагается, что для конкретного сосуда эти параметры являются постоянными.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(0, L)$, где L — длина сосуда. Скалярное произведение в нем задается следующим образом: $(v, w) = \int_0^L v(z)w(z)dz$. Определим дифференциальный

оператор $\mathcal{C}(w) = \frac{\partial(wU)}{\partial z}$, $w \in \mathcal{H}$. Тогда первое уравнение из (1) примет вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathcal{C}(A) = 0. \quad (3)$$

По аналогии с [25] предположим, что $U(t, 0) = U(t, L) = 0$. Интегрируя (3) по $z \in [0, L]$, получим:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}, 1 \right) + (\mathcal{C}(A), 1) = 0,$$

откуда в силу условия на U следует закон сохранения $V(t) = V(0)$, где объем $V(t) = \int_0^L A(t, z)dz$.

В работе [26] показано, что для модели (1) выполняется закон сохранения энергии $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$. Полная механическая энергия задается следующим образом:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\rho}{2} \int_0^L A(t, z) U^2(t, z) dz + \int_0^L \Psi(A(t, z)) dz,$$

где $\Psi(A) = \int_A^{A_{\text{dia}}} \psi(\xi) d\xi$, а функция $\psi(\xi) = \frac{\beta}{A_{\text{dia}}} (\sqrt{\xi} - \sqrt{A_{\text{dia}}})$. Как можно заметить, $\Psi''(A) > 0, \forall A > 0$.

3. Неявная схема. Рассмотрим равномерную сетку по времени, построенную с шагом Δt и узлами $t_k, k = \overline{0, M}$ и сетку по пространству с узлами $z_i, i = \overline{0, n+1}$, построенную с шагом h . Введем в рассмотрение пространство сеточных функций H со скалярным произведением

$$(v, w) = h \sum_{i=0}^{n+1} v_i w_i$$

и определим сеточный оператор $C(w)$ следующим образом:

$$C(w) = \frac{U_{i+1}^* w_{i+1} - U_{i-1}^* w_{i-1}}{2h}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \forall w \in H,$$

где в случае $U^* = U$ реализуется чисто неявная схема. Используя в качестве U^* иные функции, будем получать другие схемы.

Для аппроксимации (3) используем схему с весами:

$$\frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t} + C(\sigma A^{k+1} + (1 - \sigma) A^k) = 0, \quad \sigma \in [0, 1],$$

где $A^k = (A_1^k, \dots, A_n^k)$, $A_i^k \approx A(t_k, z_i)$. Как и в [22], будем рассматривать случай $\sigma = \frac{1}{2}$ (схему Кранка–Николсон):

$$\frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t} + C\left(\frac{A^{k+1} + A^k}{2}\right) = 0. \tag{4}$$

Для построения аппроксимации второго уравнения из (1) умножим его на A и получим:

$$\frac{\partial(AU)}{\partial t} - U \frac{\partial A}{\partial t} + AC\left(\frac{U}{2}\right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Дискретизация (5) осуществляется следующим образом:

$$\frac{A^{k+1} U^{k+1} - A^k U^k}{\Delta t} - U^{k+1} \frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t} + A^{k+1} C\left(\frac{U^{k+1}}{2}\right) + \frac{A^{k+1}}{\rho} \frac{\partial P(A^{k+1})}{\partial z} = 0.$$

Используя (2) и конечно-разностные приближения

$$\frac{\partial P(A_i^{k+1})}{\partial z} \approx \chi(A_i^{k+1}) = \frac{\beta}{A_{\text{dia}}} \frac{\sqrt{A_{i+1}^{k+1}} - \sqrt{A_{i-1}^{k+1}}}{2h}, \quad i = \overline{1, n},$$

получим итоговую разностную схему для уравнения (5):

$$\frac{A^{k+1} U^{k+1} - A^k U^k}{\Delta t} - U^{k+1} \frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t} + A^{k+1} C\left(\frac{U^{k+1}}{2}\right) + \frac{A^{k+1}}{\rho} \chi(A^{k+1}) = 0. \tag{6}$$

4. Анализ устойчивости чисто неявной схемы. По аналогии со многими работами, будем исследовать только устойчивость по начальным условиям. При теоретическом анализе будем предполагать, что $U_0^k = U_1^k = U_n^k = U_{n+1}^k = 0, \forall k$ (т.е. сосуд “запаян” на концах на длину ячейки сетки). Также будем считать, что численное решение обладает свойством $A_i^k > 0, \forall k$. Получим сеточные аналоги законов сохранения, гарантирующие устойчивость схемы по начальным условиям.



Скалярно умножим (4) на единицу:

$$\left(\frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t}, 1\right) + \left(C\left(\frac{A^{k+1} + A^k}{2}\right), 1\right) = 0. \quad (7)$$

В связи с тем, что

$$(C(w), 1) = \frac{U_{n+1}^* w_{n+1} + U_n^* w_n}{2} - \frac{U_1^* w_1 + U_0^* w_0}{2}, \quad \forall w \in H,$$

а $U^* = U^{k+1}$, с учетом сделанного выше предположения приходим к равенству $\left(C\left(\frac{A^{k+1} + A^k}{2}\right), 1\right) = 0$.

Тогда из (7) получим сеточный аналог закона сохранения массы:

$$(A^k, 1) = (A^0, 1). \quad (8)$$

Домножим скалярно (6) на U^{k+1} и последовательно преобразуем слагаемые:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A^{k+1}U^{k+1} - A^kU^k}{\Delta t}, U^{k+1}\right) &= \left(\frac{A^{k+1}U^{k+1} - A^kU^k}{\Delta t}U^{k+1}, 1\right) = \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \left(2A^{k+1}(U^{k+1})^2 - 2A^kU^kU^{k+1} + A^k(U^k)^2 - A^k(U^k)^2 + A^k(U^{k+1})^2 - A^k(U^{k+1})^2, 1\right) = \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \left(A^{k+1}(U^{k+1})^2 - A^k(U^k)^2 + A^k(U^{k+1} - U^k)^2 + (U^{k+1})^2(A^{k+1} - A^k), 1\right). \end{aligned}$$

С учетом этого представления получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A^{k+1}U^{k+1} - A^kU^k}{\Delta t} - \frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t}U^{k+1}, U^{k+1}\right) &= \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\left(A^{k+1}(U^{k+1})^2 - A^k(U^k)^2, 1\right) + \left(A^k(U^{k+1} - U^k)^2, 1\right) - \left(A^{k+1} - A^k, (U^{k+1})^2\right)\right). \quad (9) \end{aligned}$$

Рассмотрим аппроксимацию уравнения (3) следующего вида:

$$\frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t} + C(A^{k+1}) = 0. \quad (10)$$

Скалярно умножая (10) на $(U^{k+1})^2$, получим:

$$\left(\frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t}, (U^{k+1})^2\right) + (C(A^{k+1}), (U^{k+1})^2) = 0.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} (C(A^{k+1}), (U^{k+1})^2) &= -h \sum_{i=2}^{n-1} A_i^{k+1} U_i^{k+1} \frac{(U_{i+1}^{k+1})^2 - (U_{i-1}^{k+1})^2}{2h} = -(U^{k+1}A^{k+1}, C(U^{k+1})) = \\ &= -(U^{k+1}, A^{k+1}C(U^{k+1})), \end{aligned}$$

и принимая во внимание (9), приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A^{k+1}U^{k+1} - A^kU^k}{\Delta t} - \frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t}U^{k+1} + A^{k+1}C\left(\frac{U^{k+1}}{2}\right), U^{k+1}\right) &= \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \left(A^{k+1}(U^{k+1})^2 - A^k(U^k)^2, 1\right) + \frac{\Delta t}{2} \left(A^k\left(\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}\right)^2, 1\right). \end{aligned}$$

Таким образом, из (6) следует, что:

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(A^{k+1}(U^{k+1})^2 - A^k(U^k)^2, 1\right) + \frac{\Delta t}{2} \left(A^k\left(\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}\right)^2, 1\right) + \frac{1}{\rho} (A^{k+1}\chi(A^{k+1}), U^{k+1}) = 0.$$

Отсюда вытекает неравенство:

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(A^{k+1} (U^{k+1})^2 - A^k (U^k)^2, 1 \right) + \frac{1}{\rho} \left(A^{k+1} \chi(A^{k+1}), U^{k+1} \right) \leq 0. \quad (11)$$

Скалярно умножив (10) на сужение функции $\Psi'(A)$ на пространственную сетку при $A = A^{k+1}$, приходим к равенству:

$$\left(\frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t} + C(A^{k+1}), \Psi'(A^{k+1}) \right) = \left(\frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t} \Psi'(A^{k+1}) + C(A^{k+1}) \Psi'(A^{k+1}), 1 \right) = 0. \quad (12)$$

Используя формулу Тейлора в окрестности A_i^{k+1} , получим:

$$\Psi(A_i^k) = \Psi(A_i^{k+1}) + \Psi'(A_i^{k+1})(A_i^k - A_i^{k+1}) + \frac{\Psi''(\theta_i)}{2}(A_i^k - A_i^{k+1})^2,$$

откуда

$$\Psi(A_i^{k+1}) = \Psi(A_i^k) + \Psi'(A_i^{k+1})(A_i^{k+1} - A_i^k) - \frac{\Psi''(\theta_i)}{2}(A_i^k - A_i^{k+1})^2.$$

Учитывая, что $\Psi''(A) > 0$, приходим к неравенству:

$$\Psi'(A^{k+1})(A^{k+1} - A^k) \geq \Psi(A^{k+1}) - \Psi(A^k). \quad (13)$$

Поскольку $\chi(A_i^{k+1}) \approx \frac{\partial P(A_i^{k+1})}{\partial z}$, находим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A^{k+1}}{\rho} \chi(A^{k+1}), U^{k+1} \right) &= \frac{h}{\rho} \sum_{i=1}^n \chi(A_i^{k+1}) A_i^{k+1} U_i^{k+1} = \frac{h}{\rho} \sum_{i=1}^n A_i^{k+1} U_i^{k+1} \frac{\beta}{A_{\text{dia}}} \frac{\sqrt{A_{i+1}^{k+1}} - \sqrt{A_{i-1}^{k+1}}}{2h} = \\ &= \frac{h}{\rho} \sum_{i=1}^n A_i^{k+1} U_i^{k+1} \frac{\beta}{A_{\text{dia}}} \frac{\left(\sqrt{A_{i+1}^{k+1}} - \sqrt{A_{\text{dia}}} \right) - \left(\sqrt{A_{i-1}^{k+1}} - \sqrt{A_{\text{dia}}} \right)}{2h} = \\ &= -\frac{h}{\rho} \sum_{i=1}^n \frac{\beta}{A_{\text{dia}}} \left(\sqrt{A_{i+1}^{k+1}} - \sqrt{A_{\text{dia}}} \right) \frac{A_{i+1}^{k+1} U_{i+1}^{k+1} - A_{i-1}^{k+1} U_{i-1}^{k+1}}{2h} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\beta}{A_{\text{dia}}} \left(\sqrt{A^{k+1}} - \sqrt{A_{\text{dia}}} \right), C(A^{k+1}) \right) = \\ &= -\frac{1}{\rho} \left(P(A^{k+1}) - P_{\text{ext}} - P_{\text{dia}}, C(A^{k+1}) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя (12)–(13) и соотношение $\Psi'(A) = P(A) - P_{\text{ext}} - P_{\text{dia}}$, получим:

$$\left(\frac{\Psi(A^{k+1}) - \Psi(A^k)}{\Delta t} + C(A^{k+1}) \Psi'(A), 1 \right) = \left(\frac{\Psi(A^{k+1}) - \Psi(A^k)}{\Delta t} + C(A^{k+1})(P(A^{k+1}) - P_{\text{ext}} - P_{\text{dia}}), 1 \right) \leq 0.$$

Таким образом, справедливо неравенство:

$$\left(\frac{\Psi(A^k) - \Psi(A^{k+1})}{\Delta t}, 1 \right) \geq \left(C(A^{k+1}), P(A^{k+1}) - P_{\text{ext}} - P_{\text{dia}} \right). \quad (15)$$

В силу (14), из (11) вытекает, что:

$$\frac{\rho}{2\Delta t} \left(A^{k+1} (U^{k+1})^2 - A^k (U^k)^2, 1 \right) \leq \left(P(A^{k+1}) - P_{\text{ext}} - P_{\text{dia}}, C(A^{k+1}) \right).$$

Откуда, применяя (15), приходим к неравенству:

$$\left(\frac{\rho}{2} A^{k+1} (U^{k+1})^2 + \Psi(A^{k+1}), 1 \right) \leq \left(\frac{\rho}{2} A^k (U^k)^2 + \Psi(A^k), 1 \right),$$

из которого следует априорная оценка

$$\left(\frac{\rho}{2} A^{k+1} (U^{k+1})^2 + \Psi(A^{k+1}), 1 \right) \leq \left(\frac{\rho}{2} A^0 (U^0)^2 + \Psi(A^0), 1 \right).$$

Данная вместе с (8) обеспечивает безусловную устойчивость чисто неявной схемы по начальным условиям.



5. Схема расщепления. Чисто неявная схема (4)–(6) при ее применении к моделированию течений в больших сосудистых системах на каждом слое по времени требует решения *глобальной* системы нелинейных алгебраических уравнений, в которую включены дискретизованные уравнения (1) для каждого сосуда и системы, получаемые при дискретизации условий на входах и выходах, в точках сочленений и бифуркаций. В то же время по явным схемам расчеты могут производиться *локально*, т.е. вычисления для получения решений во внутренних узлах сеток для разных сосудов могут выполняться независимо, а затем по значениям во внутренних узлах могут рассчитываться значения в граничных точках. Эта локальность позволяет производить расчеты по явным схемам в параллельном режиме.

Для возможности упрощения и проведения локальных расчетов предложим модификацию схемы (4), (6), основанную на методе расщепления по физическим процессам. При таком подходе в качестве U^* будем использовать U^k . В этом случае схема (4) станет линейной и сведется к системе линейных уравнений с трехдиагональной матрицей относительно значений A^{k+1} , для решения которой эффективно использовать метод прогонки. На фиксированном слое по времени эта система решается на первом этапе метода. При известных U^* и A^{k+1} схема (6) тоже является линейной и сводится к системе относительно значений U^{k+1} , которая также имеет трехдиагональную матрицу и решается на втором этапе метода. Указанный подход отвечает последовательному рассмотрению на одном шаге по времени двух процессов: расчету геометрической конфигурации сосуда при известном распределении скорости течения и расчету скорости в деформированном сосуде.

Для локальной реализации такой схемы важно, чтобы были известны значения искомым функций A_0^{k+1} , U_0^{k+1} , A_{n+1}^{k+1} , U_{n+1}^{k+1} в граничных узлах. Для их определения используем следующий подход [22]: сначала *спрогнозируем* значения в узлах z_0 и z_{n+1} посредством экстраполяции, а затем по этим значениям произведем расчет по схеме расщепления во внутренних узлах сетки. После этого значения в граничных узлах *корректируются* на основе уже полученных значений во внутренних узлах путем решения систем уравнений, получаемых при дискретизации условий в граничных узлах. Отметим, что использование экстраполяции будет вносить дополнительные численные неустойчивости, и выбор конкретного метода экстраполяции будет на это влиять. Как показано в [22], использование простейшей экстраполяции $A_0^{k+1} \approx A_0^k$, $U_0^{k+1} \approx U_0^k$, $A_{n+1}^{k+1} \approx A_{n+1}^k$, $U_{n+1}^{k+1} \approx U_{n+1}^k$ уже позволяет производить расчеты с большим значением Δt , чем в известных явных схемах. Используем этот же способ и в настоящей работе.

6. Численные эксперименты. Данный раздел посвящен вычислительным экспериментам по решению тестовых задач. Целью расчетов является демонстрация сходимости и устойчивости предложенной схемы, а также ее эффективности по сравнению с известными явными схемами. Для сравнения были выбраны: схема Лакса–Вендроффа [11], схема Мак–Кормака [9] и схема Лакса–Фридрихса [10]. Расчеты производились на системе конфигурации Intel(R) Core(TM) i7-12700k F, 3.60 GHz, 32 GB RAM с использованием исследовательского программного обеспечения, написанного на языке пакета GNU Octave. Для явных схем шаг по времени выбирался из условия устойчивости [9]:

$$\Delta t \leq n_{\text{CFL}} \min_{s=1, S} \left(\frac{h}{\max_{i=1, n} (c_{s,i} + |U_{s,i}|)} \right),$$

где $c_{s,i} = \sqrt{\frac{A_{s,i}}{\rho} \frac{dP(A_{s,i})}{dA}}$ — скорость пульсовой волны, вычисленная в i -м узле сетки, разбивающей s -й сегмент модели сосудистой системы, S есть число сосудов, $n_{\text{CFL}} \in (0, 1)$ — число, позволяющее избегать границы интервала устойчивости по параметру Куранта–Фридрихса–Леви.

6.1. Задача с аналитическим решением. Для демонстрации на практике порядка сходимости по h рассмотрим задачу для неограниченного промежутка из [22], имеющую аналитическое решение, получаемое с помощью метода возмущений. В настоящей работе будем рассматривать только первое приближение.

Система (1) в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(AU)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\kappa}{\sqrt{A}} \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

где $\kappa = \frac{\beta}{2\sqrt{A_{\text{dia}}\rho U_c^2}}$, а U_c — характерная скорость течения.

Предположим, что начальные условия имеют следующий вид:

$$A(0, z) = A^0, \quad U(0, z) = \varepsilon \zeta(z), \tag{17}$$

где ε есть безразмерный малый параметр, $A^0 > 0$ — постоянная величина, $\zeta(z)$ — заданная ограниченная функция. Решение задачи (16)–(17) имеет вид [22]:

$$A(t, z) = A^0 + \varepsilon \frac{A^0}{2c} (\zeta(z - ct) - \zeta(z + ct)), \quad U(t, z) = \frac{\varepsilon}{2} (\zeta(z - ct) + \zeta(z + ct)),$$

где $c = \sqrt{\kappa(A^0)^{1/4}}$.

Для численного решения задачи рассматривался временной интервал $[0, T]$ и пространственный промежуток $[-L, L]$. На границах $z = -L$ и $z = L$ задаются значения U согласно аналитическому решению, а также ставятся неотражающие условия, гарантирующие выход возмущений за пределы вычислительной области:

$$l_{\pm}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \tag{18}$$

где $\mathbf{u} = (A, U)^T$, $l_{\pm}(\mathbf{u})$ — левые собственные векторы, отвечающие двум разным собственным значениям $\lambda_{\pm}(\mathbf{u})$ ($\lambda_+ > 0$, $\lambda_- < 0$) матрицы системы (16). При $z = -L$ используется l_+ , при $z = L$ — вектор l_- .

Для численной реализации производная по t в уравнении (18) аппроксимировалась следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_{k+1}, z_i) \approx \frac{\mathbf{u}_i^{k+1} - \mathbf{u}_i^k}{\Delta t}, \quad i = 0, n + 1. \tag{19}$$

Для нелинейных векторных функций l_{\pm} использовалась аппроксимация $l_{\pm}(\mathbf{u}_i^{k+1}) \approx l_{\pm}(\mathbf{u}_i^k)$.

Расчеты проводились при следующих значениях: $T = 1$, $L = 5$, $\varepsilon = 0.01$, $\kappa = 1$, $A^0 = \pi$, $\zeta(z) = \sin(2z)$. Норма погрешности Err вычислялась как сеточная L_2 -норма. Расчеты производились при использовании сетки по времени из $2 \cdot 10^3$ узлов и пространственных сеток с $h = 1/(1.5)^s$, $s = \overline{0, 8}$. На рис. 1 представлен график логарифма нормы погрешности в момент времени $t = T$ при разных значениях h . Как можно видеть, в широком диапазоне значений шага наклон соответствующей кривой близок к наклону прямой с угловым коэффициентом, равным двум. Это свидетельствует о близости порядка сходимости по h к двум, что согласуется с используемыми центрально-разностными аппроксимациями производных по z .

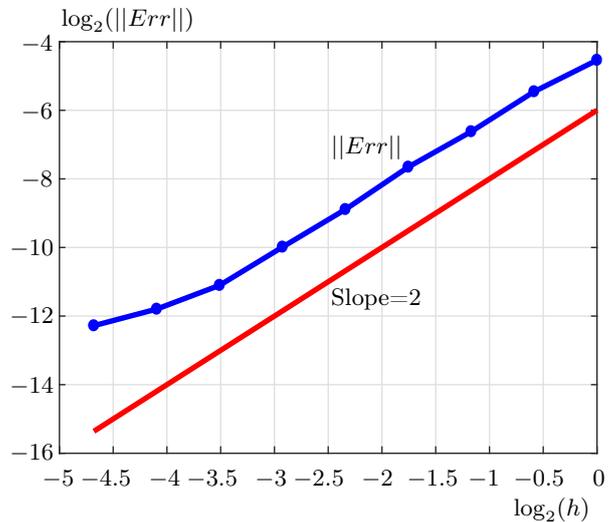


Рис. 1. График зависимости логарифма L_2 -нормы погрешности от логарифма шага h

Fig. 1. The plot of dependence of logarithm of L_2 -error norm on logarithm of step size h

6.2. Задача о течении в сосуде с бифуркацией

Рассматривается задача о течении в системе, состоящей из трех сосудов (рис. 2): материнского сосуда (I) и двух дочерних сосудов (II и III). Эта тестовая задача представлена в работе [27]. Для проведения расчетов использовались следующие параметры: длина каждого сосуда бралась равной 20 см, начальный диаметр материнского сосуда брался равным 1 см, диаметры дочерних сосудов выбирались равными $1/\sqrt{6}$ см, рассматривался временной промежуток $0 \leq t \leq 0.4$ с. Плотность ρ бралась равной 1 г/см^3 . Значение A_{dia} определялось как πR^2 , где R вычислялось через начальный диаметр. Параметр β/A_{dia} принимался равным $32497 \text{ г}/(\text{см}^2 \text{ с}^2)$ для материнского сосуда и $79602 \text{ г}/(\text{см}^2 \text{ с}^2)$ для дочерних сосудов.

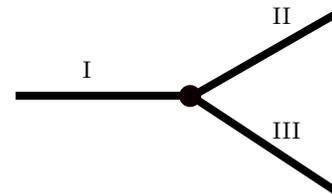


Рис. 2. Схема сосуда с бифуркацией

Fig. 2. The scheme of the vessel with bifurcation

Для всех сосудов начальные скорости полагались нулевыми, начальные площади брались равными A_{dia} . На входе сосуда I значение U задавалось следующим образом [27]:

$$U(t, 0) = U_0 \exp(-\alpha(t - t_0)^2), \tag{20}$$



где $U_0 = 1$ см/с, $\alpha = 5000$ с⁻², $t_0 = 0.05$ с. В дополнение к (20) задавалось условие совместности для характеристики, покидающей вычислительную область:

$$l_-(\mathbf{u}_I) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial t} + \lambda_-(\mathbf{u}_I) \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial z} \right) = 0.$$

При дискретизации этого условия производная по t аппроксимировалась согласно (19), а для производной по z использовалась конечно-разностная аппроксимация второго порядка вида [28]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(t_{k+1}, z_0) \approx \frac{-3\mathbf{u}_0^{k+1} + 4\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}}{2h}.$$

Для аппроксимации l и λ использовались их значения в момент времени $t = t_k$.

На выходах из дочерних сосудов задавалось неотражающее условие вида (18) для l_+ , а также условия совместности:

$$l_+(\mathbf{u}_i) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \lambda_+(\mathbf{u}_i) \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial z} \right) = 0, \quad i = \text{II, III}.$$

Для аппроксимации производных по z здесь использовалось приближение вида:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial z}(t_{k+1}, z_{n+1}) \approx \frac{\mathbf{u}_{i,n-1}^{k+1} - 4\mathbf{u}_{i,n}^{k+1} + 3\mathbf{u}_{i,n+1}^{k+1}}{2h}.$$

В точке бифуркации ставились:

- 1) условие сохранения объемного расхода

$$U_I A_I = U_{II} A_{II} + U_{III} A_{III};$$

- 2) условие непрерывности полного давления

$$P_{III}(A_{III}) + \rho \frac{U_{III}^2}{2} = P_I(A_I) + \rho \frac{U_I^2}{2}, \quad P_{II}(A_{II}) + \rho \frac{U_{II}^2}{2} = P_I(A_I) + \rho \frac{U_I^2}{2};$$

- 3) три условия совместности:

$$l_+(\mathbf{u}_I) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial t} + \lambda_+(\mathbf{u}_I) \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial z} \right) = 0, \quad l_-(\mathbf{u}_{II}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial t} + \lambda_-(\mathbf{u}_{II}) \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial z} \right) = 0,$$

$$l_-(\mathbf{u}_{III}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{III}}{\partial t} + \lambda_-(\mathbf{u}_{III}) \frac{\partial \mathbf{u}_{III}}{\partial z} \right) = 0.$$

Производные, входящие в условия совместности, аппроксимировались так же, как и в случае условий в граничных узлах. После их дискретизации получается система нелинейных алгебраических уравнений для A и U в точке бифуркации, которая решается методом Ньютона. В качестве начального приближения использовались значения с предыдущего слоя. Как показала практика расчетов, применение такого приближения позволяет достичь сходимости с точностью 10^{-6} для нормы разности двух приближений максимум за 2-3 итерации.

Расчеты производились на сетках разного размера по пространственной переменной. Для явных схем использовалось значение $n_{\text{CFL}} = 0.95$, шаг по времени выбирался из условия устойчивости. В случае схемы расщепления шаг подбирался таким образом, чтобы приближенно определить границу интервала устойчивости, поскольку, как уже отмечалось выше, из-за экстраполяции граничных значений возможно появление численных неустойчивостей.

На рис. 3, 4 представлены полученные в результате расчетов графики зависимости расхода и давления от времени, вычисленные в средних точках материнского и дочернего сосудов при $n = 500$. Как можно видеть, для явных схем характерно явление небольшого затухания решения, наиболее ярко проявляющееся для решения, полученного по схеме Лакса–Фридрихса, что связано с наличием у нее схемной вязкости. В целом, результаты расчетов по всем схемам воспроизводят результаты, приведенные в [27]. В табл. 1 представлено число шагов по времени и время расчетов в секундах, требуемые для проведения расчетов на используемом временном промежутке. Как можно видеть, явные схемы требуют примерно одинакового числа шагов и времени расчетов, в то время как схема расщепления, несмотря на необходимость решения двух линейных систем, позволяет использовать существенно больший шаг Δt и обеспечивает выигрыш по времени в несколько раз, что особенно заметно при измельчении сетки по z .

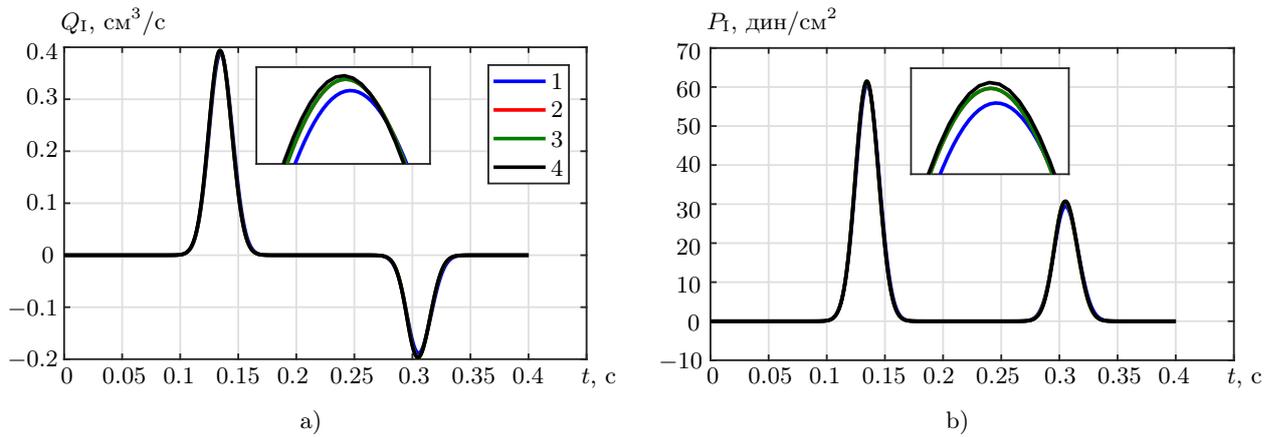


Рис. 3. Зависимости от времени в средней точке материнского сосуда при $n = 500$: а) расхода; б) давления. Результаты получены с использованием следующих разностных схем: 1 — Лакса–Фридрихса; 2 — Лакса–Вендроффа; 3 — Мак-Кормака; 4 — расщепления

Fig. 3. Time dependencies at the midpoint of parent vessel for $n = 500$ of: a) flow rate; b) pressure. The results are obtained using the following difference schemes: 1 — Lax–Friedrichs; 2 — Lax–Wendroff; 3 — MacCormack; 4 — splitting scheme

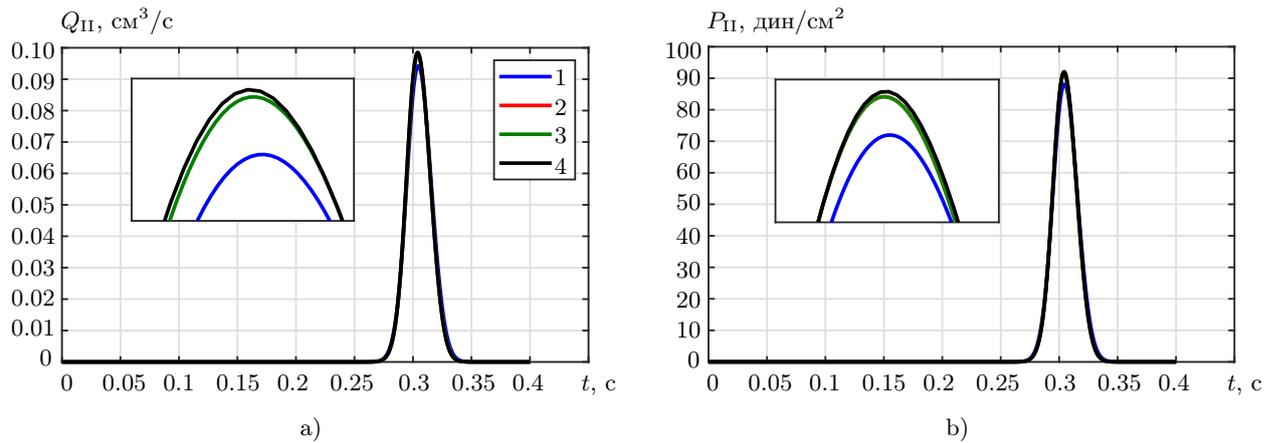


Рис. 4. Зависимости от времени в средней точке дочернего сосуда при $n = 500$: а) расхода; б) давления. Результаты получены с использованием следующих разностных схем: 1 — Лакса–Фридрихса; 2 — Лакса–Вендроффа; 3 — Мак-Кормака; 4 — расщепления

Fig. 4. Time dependencies at the midpoint of daughter vessel for $n = 500$ of: a) flow rate; b) pressure. The results are obtained using the following difference schemes: 1 — Lax–Friedrichs; 2 — Lax–Wendroff; 3 — MacCormack; 4 — splitting scheme

6.3. Задача о течении в модельной сосудистой системе. В качестве примера сосудистой системы рассмотрим модель совокупности коронарных сосудов, исследуемую в [13, 14, 29]. Система представляется в виде дерева с элементарными бифуркациями. В случае наличия бифуркации радиусы дочерних сосудов вычисляются по формулам: $R_\varphi = \varphi R_p$, $R_\eta = \eta R_p$, где R_p — радиус сосуда-родителя. Как и в [29], в настоящей работе будем использовать значения $\varphi = 0.9$, $\eta = 0.6$. Длина каждого сосуда выражается через радиус по формуле $L = 50R$. Для расчета β/A_{dia} использовалась формула следующего вида [29]:

$$\frac{\beta}{A_{\text{dia}}} = \frac{4}{3} \frac{R}{\sqrt{\pi}} (k_1 \exp(k_2 R) + k_3).$$

По аналогии с [22], использовались значения: $k_1 = 2 \cdot 10^7$ дин/см⁴, $k_2 = -22.53$ см⁻¹, $k_3 = 8.65 \cdot 10^5$ дин/см⁴. Плотность крови полагалась равной 1.06 г/см³, величина P_{dia} бралась равной $5 \cdot 10^3$ дин/см². Радиус



Таблица 1. Число шагов по времени и время расчета в секундах (в скобках) при разных разбиениях сетки для задачи о течении в сосуде с бифуркацией

Table 1. Number of time steps and performance time in seconds (in brackets) for different grid resolution for the flow problem in a vessel with bifurcation

Схема Scheme	$n = 50$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 750$	$n = 1000$
Схема Лакса–Фридрихса Lax–Friedrichs scheme	125 (0.08)	618 (0.35)	1238 (1.01)	1861 (2.12)	2476 (3.72)
Схема Лакса–Вендроффа Lax–Wendroff scheme	122 (0.08)	614 (0.72)	1241 (2.51)	1858 (5.64)	2478 (10.16)
Схема Мак-Кормака MacCormack scheme	121 (0.08)	615 (0.69)	1232 (2.53)	1848 (5.62)	2465 (10.31)
Схема расщепления Splitting scheme	80 (0.07)	320 (0.21)	650 (0.51)	980 (1.10)	1290 (1.62)

первого (входного) сосуда принимался равным $R_1 = 1$ см. Для моделирования пульсового характера течения на входе в этот сосуд ставилось граничное условие следующего вида [22]:

$$U_1(t, 0) = \frac{Q_h}{\pi R_1^2} \exp(-b(t - (i + a))^2), \quad t \in [i, i + 1], \quad i = \overline{0, K - 1}. \quad (21)$$

При расчетах использовались значения: $Q_h = 100$ см³/с, $a = 0.35$ с, $b = 70$ с⁻². Для установления периодического режима течения расчеты производились при $K = 9$. В дополнение к (21) на входе в первый сосуд задавалось условие совместности.

На выходах из терминальных сосудов ставилось условие совместности и так называемое RCR-условие, получаемое из электро-механических аналогий и широко используемое в литературе:

$$AU \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) + r_1 C_a \frac{\partial(AU)}{\partial t} = \frac{P - P_{\text{out}}}{r_2} + C_a \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (22)$$

где r_1, r_2 — коэффициенты сопротивления, C_a — коэффициент емкости, P_{out} — давление на выходе. В рамках такой модели напряжению в цепи ставится в соответствие перепад давления при течении в сосуде, электрическому сопротивлению — гидродинамическое, а аналогом емкости конденсатора выступает растяжимость стенки сосуда. Коэффициент r_1 характеризует сопротивление в системе в случае отсутствия отражений волн, r_2 — сопротивление из-за наличия периферийных сосудов, P_{out} — значение давления, отвечающее наличию этих сосудов, а C_a показывает способность сосуда “запасать” жидкость за счет растяжимости стенок.

Для дискретизации (22) производные по t в момент времени $t = t_{k+1}$ аппроксимировались левыми разностными производными. Система алгебраических уравнений, полученная после дискретизации условия совместности и соотношения (22), решалась численно методом Ньютона. Для расчетов использовались значения $r_1 = 3 \cdot 10^2$ дин/см⁵ · с, $r_2 = 2 \cdot 10^3$ дин/см⁵ · с, $C_a = 1.5 \cdot 10^{-5}$ см⁵/дин, $P_{\text{out}} = 0$. В численных экспериментах исследовалась система, состоящая из 31 сосуда (рис. 5). Для явных схем использовалось значение $n_{\text{CFL}} = 0.95$.

На рис. 6, 7 представлены зависимости расхода и давления от времени в течение одного цикла для 8-го и 31-го сосудов рассматриваемой системы при $n = 200$ соответственно. Как можно видеть, для решения, получаемого по схеме Лакса–Фридрихса, характерно наличие затухания, связанного со схемной вязкостью. Результаты, получаемые по другим схемам, близки между собой. В табл. 2 приведено число шагов по времени и время расчетов в секундах, необходимые для проведения вычислений на одном периоде при подобранном шаге Δt . Как можно видеть, для схемы расщепления требуется меньше шагов и в разы меньшее время, нужное для получения численного решения.

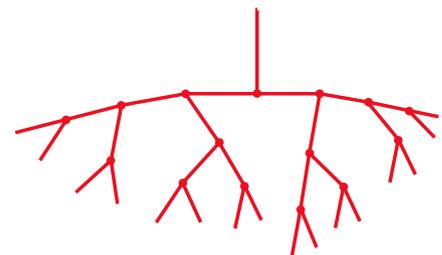


Рис. 5. Схема системы из 31 сосуда

Fig. 5. The scheme of a system with 31 vessels

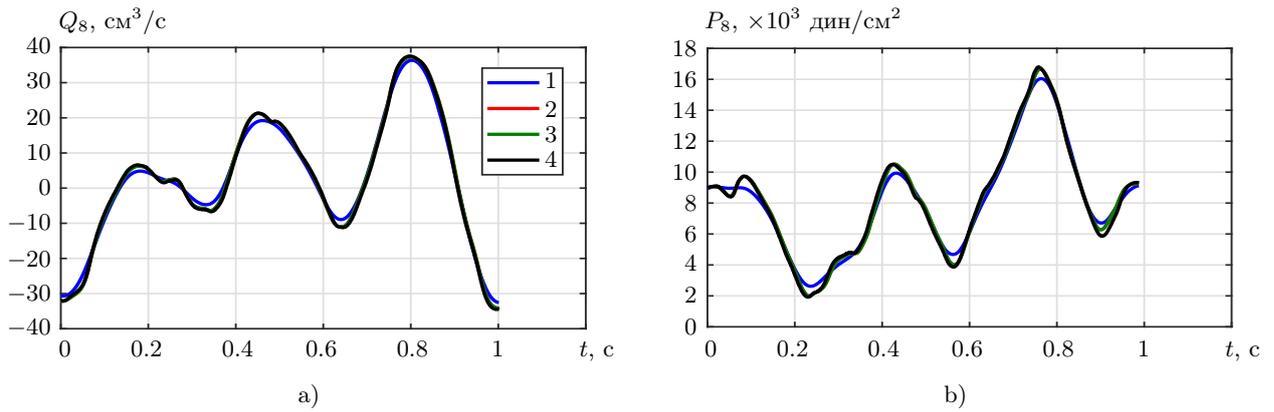


Рис. 6. Зависимости от времени в средней точке 8-го сосуда при $n = 200$: а) расхода; б) давления. Результаты получены с использованием следующих разностных схем: 1 — Лакса–Фридрихса; 2 — Лакса–Вендроффа; 3 — Мак-Кормака; 4 — расщепления

Fig. 6. Time dependencies at the midpoint of the 8-th vessel for $n = 200$ of: a) flow rate; b) pressure. The results are obtained using the following difference schemes: 1 — Lax–Friedrichs; 2 — Lax–Wendroff; 3 — MacCormack; 4 — splitting scheme

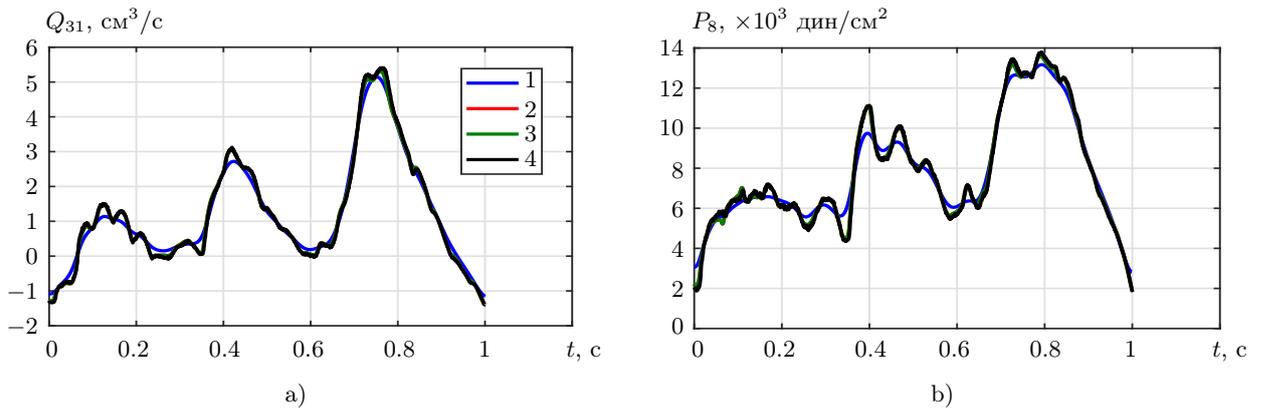


Рис. 7. Зависимости от времени в средней точке 31-го сосуда при $n = 200$: а) расхода; б) давления. Результаты получены с использованием следующих разностных схем: 1 — Лакса–Фридрихса; 2 — Лакса–Вендроффа; 3 — Мак-Кормака; 4 — расщепления

Fig. 7. Time dependencies at the midpoint of the 31-th vessel for $n = 200$ of: a) flow rate; b) pressure. The results are obtained using the following difference schemes: 1 — Lax–Friedrichs; 2 — Lax–Wendroff; 3 — MacCormack; 4 — splitting scheme

Таблица 2. Число шагов по времени и время расчета в секундах (в скобках) для одного периода по t при разных разбиениях сетки для задачи о течении в системе из 31 сосуда

Table 2. Number of time steps and performance time in seconds (in brackets) for one time period different grid resolution for the flow problem in system with 31 vessels

Схема Scheme	$n = 50$	$n = 100$	$n = 150$	$n = 200$
Схема Лакса–Фридрихса Lax–Friedrichs scheme	1400 (2.2)	2838 (7.4)	4280 (13.0)	5722 (23.0)
Схема Лакса–Вендроффа Lax–Wendroff scheme	1380 (4.3)	2791 (14.2)	4201 (29.1)	5612 (51.4)
Схема Мак-Кормака MacCormack scheme	1382 (4.9)	2796 (15.0)	4214 (30.2)	5624 (52.1)
Схема расщепления Splitting scheme	850 (0.72)	1830 (1.6)	3300 (3.4)	4898 (5.8)



7. Заключение. Представленная статья посвящена разработке вычислительной схемы для численного решения системы одномерных уравнений, описывающих течение крови. Схема базируется на методе расщепления и строится на основе неявной операторно-разностной схемы. В настоящей работе для аппроксимации производных по пространственной переменной используются центральные разности второго порядка. Показано, что такая схема является безусловно устойчивой по начальным условиям. При использовании метода расщепления на каждом слое по времени вычислительная задача сводится к последовательному решению двух систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, и алгоритм расчета допускает распараллеливание. На тестовой задаче с аналитическим решением установлено, что при практической реализации достигается второй порядок сходимости. Также показано, что предложенный подход может быть более эффективным, чем применение явных схем того же порядка сходимости.

Список литературы

1. Василевский Ю. В., Симаков С. С., Гамилов Т.М. и др. Персонализация математических моделей в кардиологии: трудности и перспективы // Компьютерные исследования и моделирование. 2022. 14, № 4. 911–930. doi 10.20537/2076-7633-2022-14-4-911-930.
2. Marchandise E., Willemet M., Lacroix V. A numerical hemodynamic tool for predictive vascular surgery // Medical Engineering and Physics. 2009. 31, N 1. 131–144. doi 10.1016/j.medengphy.2008.04.015.
3. Аксенов А. А., Калугина М. Д., Лобанов А. И., Каширин В. С. Численное моделирование течения жидкости в насосе для перекачки крови в программном комплексе FlowVision // Компьютерные исследования и моделирование. 2023. 15, № 4. 1025–1038. doi 10.20537/2076-7633-2023-15-4-1025-1038.
4. Калугина М. Д., Каширин В. С., Лобанов А. И. Валидационные расчеты задач гемодинамики с использованием программного комплекса FlowVision в режиме распараллеливания // Вычислительные методы и программирование. 2023. 24, № 2. 132–141. doi 10.26089/NumMet.v24r210.
5. Буничева А. Я., Мухин С. И., Соснин Н. В., Хруленко А. Б. Квазиодномерные модели гемодинамики // Вестник Московского университета. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2024. № 4. 44–59. doi 10.55959/MSU/0137-0782-15-2024-47-4-44-59.
6. Симаков С. С. Современные методы математического моделирования кровотока с помощью осредненных моделей // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. 10, № 5. 581–604. doi 10.20537/2076-7633-2018-10-5-581-604.
7. Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A. One-dimensional models for blood flow in arteries // Journal of Engineering Mathematics. 2003. 47, N (3–4). 251–276. doi 10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29.
8. Xiao N., Alastruey J., Figueroa C.A. A systematic comparison between 1-D and 3-D hemodynamics in compliant arterial models // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 2014. 30, N 2. 203–231. doi 10.1002/cnm.2598.
9. Wang X., Fullana J.-M., Lagree P.-Y. Verification and comparison of four numerical schemes for a 1D viscoelastic blood flow model // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. 2015. 18, N 15. 1704–1725. doi 10.1080/10255842.2014.948428.
10. Beckers A., Kolbe N. The Lax–Friedrichs method in one-dimensional hemodynamics and its simplifying effect on boundary and coupling conditions // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. 2025. 1–14. doi 10.1080/10255842.2025.2532027.
11. Elad D., Katz D., Kimmel E., Einav S. Numerical schemes for unsteady fluid flow through collapsible tubes // Journal of Biomedical Engineering. 1991. 13, N 1. 10–18. doi 10.1016/0141-5425(91)90038-9.
12. Smith N.P., Pullan A.J., Hunter P.J. An anatomically based model of transient coronary blood flow in the heart // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2002. 62, N 3. 990–1018. doi 10.1137/S0036139999355199.
13. Duanmu Z., Chen W., Gao H., et al. A one-dimensional hemodynamic model of the coronary arterial tree // Frontiers in Physiology. 2019. 10, Article Number 853. doi 10.3389/fphys.2019.00853.
14. Olufsen M.S., Peskin C.S., Kim W.Y., et al. Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions // Annals of Biomedical Engineering. 2000. 28, N 11. 1281–1299. doi 10.1114/1.1326031.
15. Saito M., Ikenaga Y., Matsukawa M., et al. One-dimensional model for propagation of a pressure wave in a model of the human arterial network: comparison of theoretical and experimental results // Journal of Biomechanical Engineering. 2011. 133, N 12. Article Number 121005. doi 10.1115/1.4005472.

16. *Diet A.K., Bressloff N.W.* VaMpy: A Python package to solve 1D blood flow problems // Journal of Open Research Software. 2017. **5**, N 1. Article Number 17. doi [10.5334/jors.159](https://doi.org/10.5334/jors.159).
17. *Ашметков И.В., Мухин С.И., Соснин Н.В. и др.* Анализ и сравнение некоторых аналитических и численных решений задач гемодинамики // Дифференциальные уравнения. 2000. **36**, № 7. 919–924. <http://mi.mathnet.ru/de10174>. Дата обращения: 21 марта 2026.
18. *Bessems D., Rutten M.C.M., van de Vosse F.N.* A wave propagation model of blood flow in large vessels using an approximate velocity profile function // Journal of Fluid Mechanics. 2007. **580**. 145–168. doi [10.1017/S0022112007005344](https://doi.org/10.1017/S0022112007005344).
19. *Watanabe S.M., Blanco P.J., Feijoo R.A.* Mathematical model of blood flow in an anatomically detailed arterial network of the arm // ESAIM: M2AN. 2013. **47**, N 4. 961–985. doi [10.1051/m2an/2012053](https://doi.org/10.1051/m2an/2012053).
20. *Kroon W., Huberts W., Bosboom M., van de Vosse F.* A numerical method of reduced complexity for simulating vascular hemodynamics using coupled 0D lumped and 1D wave propagation models // Computational and Mathematical Methods in Medicine. 2012. **2012**, N 6. Article Number 156094. doi [10.1155/2012/156094](https://doi.org/10.1155/2012/156094).
21. *Carson J., van Loon R.* An implicit solver for 1D arterial network models // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 2017. **33**, N 7. Article Number e2837. doi [10.1002/cnm.2837](https://doi.org/10.1002/cnm.2837).
22. *Кривовичев Г.В.* Разностные схемы расщепления для системы одномерных уравнений гемодинамики // Компьютерные исследования и моделирование. 2024. **16**, № 2. 459–488. doi [10.20537/2076-7633-2024-16-2-459-488](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-2-459-488).
23. *Puelz C., Canic S., Riviere B., Rusin C.G.* Comparison of reduced models for blood flow using Runge Kutta discontinuous Galerkin methods // Applied Numerical Mathematics. 2017. **115**. 114–141. doi [10.1016/j.apnum.2017.01.005](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.01.005).
24. *Toro E.F.* Brain venous haemodynamics, neurological diseases and mathematical modelling. A review // Applied Mathematics and Computation. 2015. **272**, P2. 542–579. doi [10.1016/j.amc.2015.06.066](https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.06.066).
25. *Vabishchevich P.N.* Decoupling schemes for predicting compressible fluid flows // Computers and Fluids. 2018. **171**. 94–102. doi [10.1016/j.compfluid.2018.06.012](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.06.012).
26. *Formaggia L., Gerbeau J.-F., Nobile F., Quarteroni A.* On the coupling of 3D and 1D Navier–Stokes equations for flow problems in compliant vessels // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001. **191**, N (6–7). 561–582. doi [10.1016/S0045-7825\(01\)00302-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00302-4).
27. *Xiu D., Sherwin S.J.* Parametric uncertainty analysis of pulse wave propagation in a model of a human arterial network // Journal of Computational Physics. 2007. **226**, № 2. 1385–1407. doi [10.1016/j.jcp.2007.05.020](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.05.020).
28. *Simakov S., Gamilov T.* Computational study of the cerebral circulation accounting for the patient specific anatomical features // Proceedings of the International Conference on 50 years of the Development of Grid-Characteristic Method. Smart Modeling for Engineering Systems. Vol. 133, 2019. pp. 309–330. doi [10.1007/978-3-030-06228-6_25](https://doi.org/10.1007/978-3-030-06228-6_25).
29. *Ghigo A.R., Lagree P.-Y., Fullana J.-M.* A time-dependent non-Newtonian extension of a 1D blood flow model // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2018. **253**. 36–49. doi [10.1016/j.jnnfm.2018.01.004](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2018.01.004).

Получена
11 марта 2026 г.

Принята
14 марта 2026 г.

Опубликована
1 апреля 2026 г.

Информация об авторах

Кривовичев Герасим Владимирович — д.ф.-м.н., профессор; Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики–процессов управления, Университетская набережная, 7/9, 199034, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

Руслан Владимирович Пухаленко — студент; Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики–процессов управления, Университетская набережная, 7/9, 199034, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

References

1. Yu. V. Vassilevski, S. S. Simakov, T. M. Gamilov, et al., “Personalization of Mathematical Models in Cardiology: Obstacles and Perspectives,” Computer Research and Modeling (Komp’yuternye Issledovaniia i Modelirovanie) **14** (4), 911–930 (2022). doi [10.20537/2076-7633-2022-14-4-911-930](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-4-911-930).



2. E. Marchandise, M. Willemet, and V. Lacroix, “A Numerical Hemodynamic Tool for Predictive Vascular Surgery,” *Medical Engineering and Physics* **31** (1), 131–144 (2009). doi [10.1016/j.medengphy.2008.04.015](https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2008.04.015).
3. A. A. Aksenov, M. D. Kalugina, A. I. Lobanov, and V. S. Kashirin, “Numerical Simulation of Fluid Flow in a Blood Pump in the FlowVision Software Package,” *Computer Research and Modeling (Komp’yuternye Issledovaniia i Modelirovanie)* **15** (4), 1025–1038 (2023). doi [10.20537/2076-7633-2023-15-4-1025-1038](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2023-15-4-1025-1038).
4. M. D. Kalugina, V. S. Kashirin, and A. I. Lobanov, “Validation Calculations of Hemodynamic Problems Using the FlowVision Software Package in Parallel Mode,” *Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programirovanie)* **24** (2), 132–141 (2023). doi [10.26089/NumMet.v24r210](https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r210).
5. A. Ya. Bunicheva, S. I. Mukhin, N. V. Sosnin, and A. B. Khrulenko, “Quasi-One-Dimensional Models of Hemodynamics,” *Bulletin of Moscow University. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics (Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 15: Vychislitel’naya Matematika i Kibernetika)* **4**, 44–59 (2024). doi [10.55959/MSU/0137-0782-15-2024-47-4-44-59](https://doi.org/10.55959/MSU/0137-0782-15-2024-47-4-44-59).
6. S. S. Simakov, “Modern Methods of Mathematical Modeling of Blood Flow Using Reduced Order Methods,” *Computer Research and Modeling (Komp’yuternye Issledovaniia i Modelirovanie)* **10** (5), 581–604 (2018). doi [10.20537/2076-7633-2018-10-5-581-604](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-5-581-604).
7. L. Formaggia, D. Lamponi, and A. Quarteroni, “One-Dimensional Models for Blood Flow in Arteries,” *Journal of Engineering Mathematics* **47** (3–4), 251–276 (2003). doi [10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29](https://doi.org/10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29).
8. N. Xiao, J. Alastruey, and C. A. Figueroa, “A Systematic Comparison Between 1-D and 3-D Hemodynamics in Compliant Arterial Models,” *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* **30** (2), 203–231 (2014). doi [10.1002/cnm.2598](https://doi.org/10.1002/cnm.2598).
9. X. Wang, J.-M. Fullana, and P.-Y. Lagree, “Verification and Comparison of Four Numerical Schemes for a 1D Viscoelastic Blood Flow Model,” *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* **18** (15), 1704–1725 (2015). doi [10.1080/10255842.2014.948428](https://doi.org/10.1080/10255842.2014.948428).
10. A. Beckers and N. Kolbe, “The Lax—Friedrichs Method in One-Dimensional Hemodynamics and its Simplifying Effect on Boundary and Coupling Conditions,” *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 1–14 (2025). doi [10.1080/10255842.2025.2532027](https://doi.org/10.1080/10255842.2025.2532027).
11. D. Elad, D. Katz, E. Kimmel, and S. Einav, “Numerical Schemes for Unsteady Fluid Flow Through Collapsible Tubes,” *Journal of Biomedical Engineering* **13** (1), 10–18 (1991). doi [10.1016/0141-5425\(91\)90038-9](https://doi.org/10.1016/0141-5425(91)90038-9).
12. N. P. Smith, A. J. Pullan, and P. J. Hunter, “An Anatomically Based Model of Transient Coronary Blood Flow in the Heart,” *SIAM Journal on Applied Mathematics* **62** (3), 990–1018 (2002). doi [10.1137/S0036139999355199](https://doi.org/10.1137/S0036139999355199).
13. Z. Duanmu, W. Chen, H. Gao, et al., “A One-Dimensional Hemodynamic Model of the Coronary Arterial Tree,” *Frontiers in Physiology* **10**, Article Number 853 (2019). doi [10.3389/fphys.2019.00853](https://doi.org/10.3389/fphys.2019.00853).
14. M. S. Olufsen, C. S. Peskin, W. Y. Kim, et al., “Numerical Simulation and Experimental Validation of Blood Flow in Arteries with Structured-Tree Outflow Conditions,” *Annals of Biomedical Engineering* **28** (11), 1281–1299 (2000). doi [10.1114/1.1326031](https://doi.org/10.1114/1.1326031).
15. M. Saito, Y. Ikenaga, M. Matsukawa, et al., “One-Dimensional Model for Propagation of a Pressure Wave in a Model of the Human Arterial Network: Comparison of Theoretical and Experimental Results,” *Journal of Biomechanical Engineering* **133** (12), Article Number 121005 (2011). doi [10.1115/1.4005472](https://doi.org/10.1115/1.4005472).
16. A. K. Diem and N. W. Bressloff, “VaMpy: A Python Package to Solve 1D Blood Flow Problems,” *Journal of Open Research Software* **5** (1), Article Number 17 (2017). doi [10.5334/jors.159](https://doi.org/10.5334/jors.159).
17. I. V. Ashmetkov, S. I. Mukhin, N. V. Sosnin, et al., “Analysis and Comparison of Some Analytic and Numerical Solutions of Hemodynamic Problems,” *Differ. Uravn.* 2000. **36**, N 7. 919–924. [*Differential Equations* **36** (7), 1021–1026 (2000)]. doi [10.1007/BF02754503](https://doi.org/10.1007/BF02754503).
18. D. Bessems, M. C. M. Rutten, and F. N. van de Vosse, “A Wave Propagation Model of Blood Flow in Large Vessels Using an Approximate Velocity Profile Function,” *Journal of Fluid Mechanics* **580**, 145–168 (2007). doi [10.1017/S0022112007005344](https://doi.org/10.1017/S0022112007005344).
19. S. M. Watanabe, P. J. Blanco, and R. A. Feijoo, “Mathematical Model of Blood Flow in an Anatomically Detailed Arterial Network of the Arm,” *ESAIM: M2AN* **47** (4), 961–985 (2013). doi [10.1051/m2an/2012053](https://doi.org/10.1051/m2an/2012053).
20. W. Kroon, W. Huberts, M. Bosboom, and F. van de Vosse, “A Numerical Method of Reduced Complexity for Simulating Vascular Hemodynamics Using Coupled 0D Lumped and 1D Wave Propagation Models,” *Computational and Mathematical Methods in Medicine* **2012** (6), Article Number 156094 (2012). doi [10.1155/2012/156094](https://doi.org/10.1155/2012/156094).
21. J. Carson and R. van Loon, “An Implicit Solver for 1D Arterial Network Models,” *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* **33** (7), Article Number e2837 (2017). doi [10.1002/cnm.2837](https://doi.org/10.1002/cnm.2837).
22. G. V. Krivovichev, “Difference Splitting Schemes for the System of One-Dimensional Equations of Hemodynamics,” *Computer Research and Modeling (Komp’yuternye Issledovaniia i Modelirovanie)* **16** (2), 459–488 (2024). doi [10.20537/2076-7633-2024-16-2-459-488](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-2-459-488).

23. C. Puelz, S. Canic, B. Riviere, and C. G. Rusin, “Comparison of Reduced Models for Blood Flow Using Runge Kutta Discontinuous Galerkin Methods,” *Applied Numerical Mathematics* **115**, 114–141 (2017). doi [10.1016/j.apnum.2017.01.005](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.01.005).
24. E. F. Toro, “Brain Venous Haemodynamics, Neurological Diseases and Mathematical Modelling. A Review,” *Applied Mathematics and Computation* **272** (P2), 542–579 (2015). doi [10.1016/j.amc.2015.06.066](https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.06.066).
25. P. N. Vabishchevich, “Decoupling Schemes for Predicting Compressible Fluid Flows,” *Computers and Fluids* **171**, 94–102 (2018). doi [10.1016/j.compfluid.2018.06.012](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.06.012).
26. L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni, “On the Coupling of 3D and 1D Navier–Stokes Equations for Flow Problems in Compliant Vessels,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **191** (6–7), 561–582 (2001). doi [10.1016/S0045-7825\(01\)00302-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00302-4).
27. D. Xiu and S. J. Sherwin, “Parametric Uncertainty Analysis of Pulse Wave Propagation in a Model of a Human Arterial Network,” *Journal of Computational Physics* **226** (2), 1385–1407 (2007). doi [10.1016/j.jcp.2007.05.020](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.05.020).
28. S. Simakov and T. Gamilov, “Computational Study of the Cerebral Circulation Accounting for the Patient Specific Anatomical Features,” in *Proceedings of the International Conference on 50 years of the Development of Grid-Characteristic Method* (Smart Modeling for Engineering Systems, Vol. 133, 2019), pp. 309–330. doi [10.1007/978-3-030-06228-6_25](https://doi.org/10.1007/978-3-030-06228-6_25).
29. A. R. Ghigo, P.-Y. Lagree, and J.-M. Fullana, “A Time-Dependent Non-Newtonian Extension of a 1D Blood Flow Model,” *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **253**, 36–49 (2018). doi [10.1016/j.jnnfm.2018.01.004](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2018.01.004).

Received
March 11, 2026

Accepted
March 14, 2026

Published
April 1, 2026

Information about the authors

Gerasim V. Krivovichev — Ph. D., Full Professor; Saint-Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Universitetskaya naberezhnaya, 7/9, 199034, Saint-Petersburg, Russia.

Ruslan V. Pukhalenko — Student; Saint-Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Universitetskaya naberezhnaya, 7/9, 199034, Saint-Petersburg, Russia.