

Метод граничных элементов для вычисления 2D емкостей в задачах экстракции

В. В. Сазонов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет космических исследований,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-6168-7438, e-mail: sazonov@cosmos.msu.ru

М. М. Хапаев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-0701-7043, e-mail: vmhap@cs.msu.ru

Аннотация: В работе рассматриваются двумерные задачи вычисления электростатической матрицы емкости, возникающие при математическом моделировании микроэлектронных структур с помощью эквивалентных схем с сосредоточенными параметрами на этапе физической верификации (задача экстракции). Такие задачи имеют ряд особенностей, к которым относится сложная структура диэлектриков и проводников, а также необходимость корректной генерации данных для массовых вычислений. Для численного решения применяется метод граничных элементов, использующий представление решения в виде потенциала простого слоя. Рассматриваются две современные реализации этого известного подхода, основанные на простом методе Галеркина и нестандартном методе коллокации, дополненные априорно генерируемой адаптированной вычислительной сеткой. Проводится сравнение сходимости, точности и быстродействия этих алгоритмов. Метод Галеркина точнее для систем уравнений с матрицей умеренной размерности, тогда как коллокационная процедура быстрее в случае матриц большой размерности. Оба алгоритма достаточно эффективны и могут быть использованы как составная часть вычислительных методов экстракции. Обсуждаются дополнительные задачи, связанные с вычислением матрицы емкости, в том числе моделирование плавающих проводников и вычисление производных емкостей по геометрическим и другим параметрам.

Ключевые слова: экстракция, матрица емкости, метод граничных элементов.

Для цитирования: Сазонов В.В., Хапаев М.М. Метод граничных элементов для вычисления 2D емкостей в задачах экстракции // Вычислительные методы и программирование. 2026. 27, № 3. 374–389. doi 10.26089/NumMet.v27r324.



Boundary Element Method for 2D capacitances calculation in extraction problems

Vasiliy V. Sazonov

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Space Research, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0002-6168-7438, e-mail: sazonov@cosmos.msu.ru

Mikhail M. Khapaev

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0003-0701-7043, e-mail: vmhap@cs.msu.ru

Abstract: The paper considers two-dimensional problems of calculating the electrostatic capacitance matrix that arise in mathematical modeling of microelectronic structures using equivalent circuits with lumped parameters at the stage of physical verification (the extraction problem). Such problems have a number of features, including the complex structure of dielectrics and conductors and the necessity of correct data generation for mass computations. For a numerical solution, the boundary element method is used, which is based on the representation of the solution as a potential of a simple layer. Two modern implementations of this well-known approach are considered, based on application of the simple Galerkin method and the non-standard collocation method both supplemented by a priori generated adapted computational mesh. A comparison of the convergence, accuracy and performance of these algorithms is carried out. The Galerkin method is more accurate for systems of equations with a matrix of moderate dimension, whereas the collocation procedure is faster in the case of matrices of large dimensions. Both algorithms are quite efficient and can be used as an integral part of extraction computational algorithms. Additional problems related to the calculation of a capacitance matrix are discussed, including the modeling of floating conductors and the calculating capacitance derivatives by geometric and other parameters.

Keywords: extraction, capacitance matrix, boundary element method.

For citation: V. V. Sazonov, M. M. Khapaev, "Boundary Element Method for 2D capacitances calculation in extraction problems," Numerical Methods and Programming. 27 (3), 374–389 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r324.

1. Введение. Проектирование интегральных схем является многоступенчатым процессом, включающим ряд задач математического моделирования, в том числе задачи вычислительной геометрии и генерации математических моделей микросхем в виде эквивалентных схем, состоящих из сопротивлений, емкостей, индуктивностей, транзисторов, диодов и других схемных элементов [1–3]. Задачу генерации такой математической модели принято называть задачей экстракции соответствующей схемы [1, 4, 5]. Предметом настоящей работы является решение вспомогательной задачи экстракции, состоящей в вычислении так называемых двумерных, или погонных, (2D) емкостей нескольких проводников. С помощью этих емкостей можно построить полную и достаточно точную эквивалентную схему для микроэлектронных структур [4].

Проблема вычисления емкостных коэффициентов микроэлектронных структур относится к числу задач, наиболее требовательных к быстродействию и памяти ЭВМ. В связи с этим современные алгоритмы генерации эквивалентных схем либо ограничиваются простыми аппроксимациями емкостей элементарных структур, что не обеспечивает нужной точности вычислений, либо используют двумерные (2D) модели проводников [4, 6]. Однако в последнем случае требуется производить большое число (сотни тысяч и миллионы) достаточно точных вычислений матрицы емкостей однородных двумерных структур со сложной конфигурацией проводников и диэлектриков, что является важной особенностью задачи экстракции.

В настоящей работе рассматриваются особенности постановки 2D задачи вычисления физической матрицы емкостей и проводится сравнение результатов, полученных при помощи двух достаточно эффективных алгоритмов, основанных на методе граничных элементов (Boundary Element Method, BEM).

Реализация этих алгоритмов входит в состав разрабатываемого в настоящий момент в России программного обеспечения проектирования СБИС.

Для вычисления матрицы емкостей могут быть применены метод конечных элементов, метод конечных разностей, статистические методы и различные версии ВЕМ. Обзор таких работ представлен в [7]. Особенности рассматриваемых задач затрудняют применение метода конечных элементов [8] и метода конечных разностей. Первой особенностью является неограниченная область (полупространство), в которой ищется решение задачи электростатики. Второй особенностью является сложная структура неоднородной вмещающей диэлектрической среды, в которой, как правило, относительная диэлектрическая проницаемость кусочно-постоянна, что затрудняет автоматическое построение вычислительных сеток. Кроме того, эффективное применение метода конечных элементов и метода конечных разностей для вычисления полной матрицы емкостей требует многократного решения задач с разными краевыми условиями. С другой стороны, метод конечных элементов является безальтернативным для задач с непрерывно меняющейся диэлектрической проницаемостью. Примером достаточно эффективного применения нестандартного метода конечных элементов является работа [9].

Для среды с кусочно-постоянной диэлектрической проницаемостью эффективным методом является ВЕМ [10, 11], или иначе метод граничных интегральных уравнений в различной формулировке. В данном подходе эти уравнения включают в себя интегралы по поверхностям проводников и границ (интерфейсов) между диэлектриками с различными постоянными относительными диэлектрическими проницаемостями. Традиционно в задачах экстракции применяется прямой ВЕМ [5, 7, 12], в котором интегральные уравнения получаются с помощью третьей формулы Грина [13]. В прямом методе граничных элементов неизвестными для диэлектрических интерфейсов являются две функции — потенциал и его нормальная производная.

Альтернативным и более простым методом получения интегральных уравнений служит так называемый непрямой ВЕМ, в котором уравнения получаются с помощью потенциала простого слоя [13]. Искомыми величинами в этом случае являются плотности поверхностных зарядов для проводников и интерфейсов между областями с разными диэлектриками. Для интерфейсов, в отличие от прямого метода, неизвестной является единственная функция — плотность потенциала простого слоя.

Характерной особенностью рассматриваемых задач является сложная структура диэлектриков и большое число интерфейсных границ. Поэтому непрямой метод, по сравнению с прямым, приводит к системам линейных уравнений значительно меньшей размерности. Вместе с тем матрица системы линейных уравнений прямого метода обладает определенной блочной разреженностью, что позволяет ускорить решение системы линейных уравнений с этой матрицей [12], в том числе с помощью простой техники разреженных матриц [14, 15].

В настоящей работе используется вычислительный подход на основе непрямого метода граничных элементов [10]. Этот вычислительный метод приводит к плотно заполненной матрице системы линейных уравнений. Особенностью подхода настоящей работы является априорно генерируемая квазинеравномерная сетка [16] для решения интегральных уравнений теории потенциала [17, 11]. Эта сетка учитывает асимптотическое поведение решения [34, 19] в угловых и узловых точках расчетной области.

Для дискретизации и численного решения интегральных уравнений [10] применяется метод Галеркина в известной простой реализации [20] и переработанный нестандартный алгоритм коллокации [21]. Исследуется точность и быстродействие этих алгоритмов в типичных задачах экстракции. При одинаковой точности метод коллокации более быстр, однако метод Галеркина более точен и надежен на грубой сетке. Показано, как эти алгоритмы можно дополнить и использовать для вычисления частичных емкостей, а также для учета так называемых плавающих проводников с нулевым полным зарядом. Приводится модификация этих алгоритмов для вычисления производных емкостных коэффициентов по параметрам, которыми могут быть геометрические размеры и диэлектрические проницаемости.

2. Постановка задачи.

2.1. Описание многослойной структуры микросхем. Микроэлектронные устройства производятся при помощи процессов последовательного формирования слоев металлизации и диэлектриков [3]. Толщины слоев и другие различные параметры слоев известны и хранятся в файлах описания технологии процесса. Кроме этого, там хранится дополнительная информация, необходимая для корректного моделирования физических структур. Так, ширина протяженных проводников отличается от заданной при проектировании в силу особенностей процесса литографии. Эта ширина должна быть скорректирована, данные для этого также содержатся в технологическом файле.

Существует несколько способов описания технологического процесса. Стандартом на сегодняшний день является формат ICT, разработанный компанией Cadence Design Systems. Его полное описание приводится в документации к программным продуктам этой компании, но она не является публичной. В открытом доступе имеются ICT-файлы [22, 23], содержащие описание технологических процессов Skywater 130 и gpd045. Для наших вычислений мы будем использовать эти данные.

Для рассматриваемой в работе электростатической задачи из файла описания технологического процесса берутся толщины и относительные диэлектрические проницаемости планарных диэлектрических слоев. Кроме планарных диэлектриков, также имеются конформные диэлектрики, которые “облегают” металлические проводники, повторяя их форму. Возможно также наличие произвольных диэлектрических включений.

Проводники, как правило, имеют прямоугольное или трапециевидное сечение и расположены в соответствующих слоях. Допустимы некоторые структуры, составленные из прямоугольников.

Каждый проводник (возможно многосвязный) имеет уникальный номер. Проводник с номером 0 является референсным и его электростатический потенциал всегда равен нулю. Таким проводником является подложка микросхемы, от которой отсчитываются все высоты металлических и диэлектрических слоев.

Пример простой двумерной структуры, полученной поперечным сечением группы параллельных друг другу проводников, находящихся в среде с планарными и конформными диэлектриками, приведен на рис. 1. Геометрическая модель проводников, диэлектриков и внешних границ полностью описывается с помощью K непересекающихся отрезков прямых (сегментов) S_k , опирающихся на узловые точки. Сегмен-

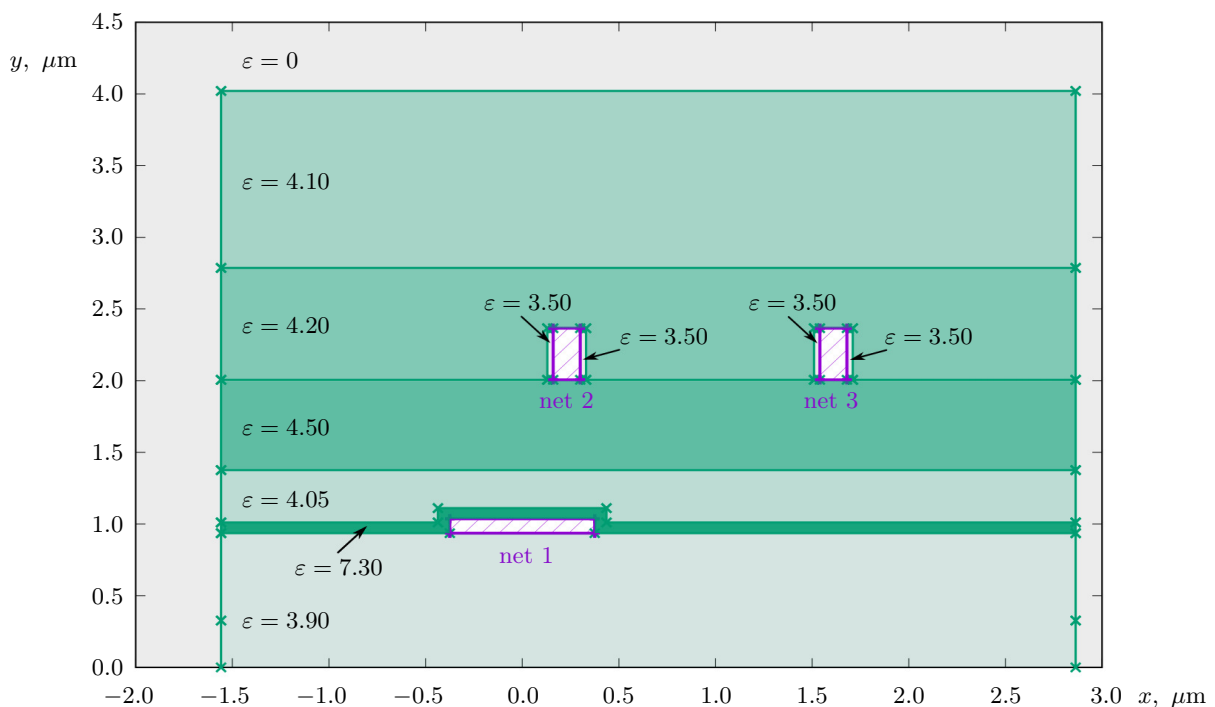


Рис. 1. Пример поперечного сечения трех протяженных проводников для процесса Skywater 130. Показаны: а) проводники net 1, net 2, net 3, б) границы диэлектриков (зеленые сегменты), в) внешняя граница, ограничивающая расчетную область. Приведены величины относительных диэлектрических проницаемостей с обеих сторон граничных интерфейсных сегментов. Для внешней границы одна из диэлектрических проницаемостей равна нулю. Для внутренней части проводников значение ϵ не используется и принято равным нулю. Показаны 40 узловых точек и 38 сегментов, из них 12 используются для описания металлов

Fig. 1. Example of a cross section of three extended conductors for the Skywater 130 process. Shown are: a) conductors net 1, net 2, net 3, b) boundaries of dielectrics (green segments), c) external boundary limiting the computational domain. The values of the relative dielectric constants on both sides of the boundary interface segments are presented. For the outer boundary, one of the dielectric constants is equal to zero. For the inner part of the conductors, the value ϵ is not used and is assumed to be zero. The figure contains 40 nodes and 38 segments, 12 of which are used to describe metals

ты могут быть горизонтальными, вертикальными или наклонными в случае трапециевидных проводников. На рис. 1 представлено 38 сегментов и 40 точек, причем только 12 сегментов относятся к проводникам.

Далее будем полагать, что все величины имеют безразмерный вид, в котором координаты и длины сегментов приведены к микронам, потенциалы — к вольтам, а погонные емкости — к фемтофарадам на микроны.

2.2. Задача вычисления матрицы емкости. Пусть D — ограниченная область в R^2 , ∂D — ее внешняя граница, Γ — все внутренние границы D , разделяющие ее на подобласти с постоянными относительными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon(\mathbf{r})$, ∂C_j — границы сечений проводников, $j = 1, \dots, N$, где N — число сечений проводников, причем номер 0 зарезервирован за референсным, возможно многосвязным, проводником, $\varphi(\mathbf{r})$ — потенциал электрического поля, $\mathbf{r} = (x, y)$. Будем полагать, что ∂D имеет ориентацию против часовой стрелки, а ∂C_j — по часовой стрелке, причем последние могут быть многосвязными. Обозначим за ∂C_0 границу, являющуюся частью ∂D при $y = 0$, которая также может иметь внутренние компоненты. Внутренние границы Γ могут быть ориентированы произвольно. Положительным направлением нормали $\mathbf{n}$ ко всем кривым будем считать левое, которое для границ ∂D и ∂C_j направлено внутрь области. Таким образом, для Γ определены диэлектрические проницаемости ε_i^- и ε_i^+ . Для ∂D и ∂C_j определена величина ε_j^+ , а $\varepsilon_i^- = 0$. Все внутренние и внешние границы ∂D , Γ , ∂C_j представляют собой объединение некоторых сегментов S_k .

Матрица емкости определяется и вычисляется в рамках электростатики.

Пусть V_j — потенциалы проводников ∂C_j , причем здесь $j = 1, \dots, N$. Тогда задача электростатики для потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in D, \quad \mathbf{r} \notin \{\Gamma, \partial C_j\}, \quad (1)$$

$$[\varphi(\mathbf{r})] = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\left[\varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right] = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad (3)$$

$$\varepsilon_0^+(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial D, \quad (4)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = V_j, \quad \mathbf{r} \in \partial C_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (5)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial C_0. \quad (6)$$

Здесь $[\varphi(\mathbf{r})]$ означает скачок функции, т.е. разность предельных значений слева и справа на ориентированном контуре [13].

Данная задача иллюстрируется рис. 1. Референсный проводник ∂C_0 на рисунке отсутствует, так как соответствующее краевое условие при $y = 0$ учтено в вычислительном методе с помощью функции Грина и принципа отражения [13].

Кроме многослойных планарных диэлектриков, в рассматриваемых задачах присутствуют конформные диэлектрики, облегающие металлические проводники. Для любых реальных технологических процессов число различных диэлектрических областей может быть весьма велико.

Для каждого проводника можно вычислить полный заряд

$$Q_i = 2\pi \oint_{\partial C_i} \varepsilon_i^+(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} dl, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Здесь $\partial \varphi(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{n} = \nabla \varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$.

Решение задачи (1)–(6) зависит от N потенциалов проводников V_i . Пусть $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_N)^T$, $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_N)^T$. Так как задача линейна, то $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{V}$ связаны соотношением

$$\mathbf{Q} = C\mathbf{V}, \quad (8)$$

где C — это физическая матрица емкости [24] размером $N \times N$. Эта матрица симметрична $C = C^T$ и положительно определена ($C > 0$), если существует референсный проводник ∂C_0 , а если не существует, то неотрицательно определена ($C \geq 0$). Нondiagonальные элементы матрицы емкости отрицательны ($C_{ij} < 0$).



Взаимная емкость проводника i и референсного проводника имеет вид

$$C_{i0} = \sum_{j=1}^N C_{ij}.$$

Таким образом, решив N раз задачу (1)–(6) с правыми частями вида $\mathbf{V} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ и вычислив полные заряды (7), можно найти все элементы матрицы емкости (8) по столбцам. Для численного решения (1)–(6) удобно использовать подход на основе интегральных уравнений.

2.3. Интегральные уравнения. Поскольку геометрическая модель расчетной области состоит из сегментов, перейдем к рассмотрению уравнений по этим сегментам S_k , где $k = 1, \dots, K$.

Представим решение (1)–(6) в виде потенциала простого слоя с функцией Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ и плотностью $\mu_k(\mathbf{p})$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \int_{S_k} G(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \mu_k(\mathbf{p}) dl, \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \ln \left(\frac{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{p}}|}{|\mathbf{r} - \mathbf{p}|} \right), \quad (9)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{p} = (x', y')$, $\bar{\mathbf{p}} = (x', -y')$, а интегрирование в (9) ведется по переменным $\mathbf{p}$ и $\bar{\mathbf{p}}$ [13].

Функция Грина может быть выбрана как $G(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\ln(|\mathbf{r} - \mathbf{p}|)$ или $G(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \ln(|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{p}}|/|\mathbf{r} - \mathbf{p}|)$. В последнем случае референсного проводника ∂C_0 в явном виде может и не быть.

Из свойств потенциала простого слоя [13] следуют уравнения для плотности $\mu_k(\mathbf{p})$:

$$\sum_{k=1}^K \int_{S_k} G(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \mu_k(\mathbf{p}) dl = V_j, \quad \mathbf{r} \in S_i, \quad S_i \in \partial C_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (10)$$

$$-\pi(\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-) \mu_i(\mathbf{r}) + (\varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^-) \sum_{k=1}^K \int_{S_k} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{n}_i} \mu_k(\mathbf{p}) dl = 0, \quad \mathbf{r} \in S_i, \quad S_i \in \{\Gamma, \partial D\}, \quad (11)$$

$$Q_j = 2\pi \sum_{S_k \in \partial C_j} \int_{S_k} \varepsilon_j^+ \mu_k(\mathbf{p}) dl. \quad (12)$$

Формула (12) справедлива только для объемных проводников конечной толщины.

Обычно метод граничных элементов формулируется непосредственно для уравнений (10)–(12). Однако удобнее перейти к интегрированию по безразмерному параметру. Пусть все сегменты S_k задаются с помощью параметра $\xi \in [0, 1]$, $l_k = |S_k|$ — длина сегмента S_k , $\lambda_i = (\varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^-)/(\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-)$. Обозначим $\mathbf{r}_m(\xi)$ точку на параметризованном сегменте S_m . Пусть $\sigma_k(\xi) = l_k \cdot \mu_k(\mathbf{r}_k(\xi))$. Тогда уравнения (10)–(12) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^K \int_0^1 G(\mathbf{r}_i(\xi_0), \mathbf{r}_k(\xi)) \sigma_k(\xi) d\xi = V_j, \quad \xi_0 \in (0, 1), \quad S_i \in \partial C_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (13)$$

$$-\pi \frac{\sigma_i(\xi_0)}{l_i} + \lambda_i \sum_{k=1}^K \int_0^1 \frac{\partial G(\mathbf{r}_i(\xi_0), \mathbf{r}_k(\xi))}{\partial \mathbf{n}_i} \sigma_k(\xi) d\xi = 0, \quad S_i \in \{\Gamma, \partial D\}, \quad (14)$$

$$q_k = \int_0^1 2\pi \varepsilon_k^+ \sigma_k(\xi) d\xi, \quad Q_j = \sum_{S_k \in \partial C_j} q_k, \quad j = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Для вычисления m -го столбца матрицы емкости решаются уравнения (13)–(15) с потенциалами $V_j = \delta_{jm}$ проводников в правой части (13), так что для фиксированного j значение $V_j = 1$ при $j = m$ и $V_j = 0$ при $j \neq m$. Тогда, согласно (8), $C_{jm} = Q_j$.

3. Вспомогательные задачи.

3.1. Частичные емкости. Для некоторых задач экстракции необходимо представить емкости как сумму определенных компонент. Например, нужно выделить емкость, связанную с нижней границей проводника, которая имеет физический смысл уточненной емкости простого конденсатора, образованного нижней границей проводника и референсной плоскостью. Представим границу проводника j в виде объединения M_j частей: $\partial C_j = \bigcup_{m=1}^{M_j} \partial C_{j,m}$. Тогда емкость C_{ij} можно представить в виде суммы M_j частичных емкостей $C_{i,j,m}$:

$$C_{i,j} = \sum_{m=1}^{M_j} C_{i,j,m}, \quad C_{i,j,m} = \sum_{S_k \in \partial C_{j,m}} 2\pi \int_0^1 \varepsilon_k^+ \sigma_k(\xi) d\xi.$$

Величины $\sigma_k(\xi)$ соответствуют решениям основной задачи вычисления компонент матрицы емкости (13)–(15).

3.2. Плавающие проводники. Плавающими проводниками называют проводники, потенциал которых V не определен, а их полный заряд (15) $Q = 0$. Плавающие проводники не представлены в матрице емкости, но оказывают влияние на значения ее элементов.

Существует два подхода к решению задачи с плавающими проводниками. Первый заключается в вычислении полной матрицы емкости с включением плавающих проводников как обычных. После этого матрица преобразуется к матрице меньшей размерности с использованием условия $Q = 0$.

Второй подход состоит в учете влияния плавающих проводников на этапе вычисления матрицы емкости. Для этого уравнения (13)–(14) дополняются условиями для плавающего проводника ∂C_m

$$\sum_{S_k \in \partial C_m} 2\pi \int_0^1 \varepsilon_k^+ \sigma_k(\xi) d\xi = 0,$$

а потенциал V_m считается искомой величиной. Плавающих проводников может быть несколько.

3.3. Производные емкости по параметрам. Помимо задачи вычисления физической матрицы емкостей, также представляет интерес задача вычисления производных компонент матрицы по параметрам [25–30]. Параметры могут быть как геометрическими, например, ширина и толщина проводников [25], так и относительными диэлектрическими проницаемостями. Производные могут быть вычислены с помощью варьирования параметров и численного дифференцирования, но такие результаты могут оказаться неточными, а также требуют многократного решения полной задачи вычисления емкостей.

Производные по параметру могут быть использованы для варьирования результатов вычислений без решения полной задачи. Пусть $C(s)$ — некоторая емкость, $C(\bar{s})$ — ее номинальное значение, s — параметр, тогда $C(s) \approx C(\bar{s}) + C'_s(\bar{s}) \cdot (s - \bar{s})$.

Известен подход на основе прямого дифференцирования исходных уравнений в виде (10)–(12), однако он достаточно громоздок [26]. Простое решение базируется на рассмотрении уравнений с интегралами в безразмерной форме и с постоянными пределами интегрирования (13)–(15) и дифференцировании по геометрическим параметрам (Direct Differentiation Method, DDM). Для краткости рассмотрим случай $G(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\ln(|\mathbf{r} - \mathbf{p}|)$ и будем полагать, что направление нормали не зависит от параметра.

Запишем уравнения (13), (14) в операторной форме. Параметров может быть несколько. В этом случае обозначим за $\mathbf{s}$ вектор параметров. Тогда

$$A(\mathbf{s})\boldsymbol{\sigma}^{(m)}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}^{(m)}. \quad (16)$$

При нахождении m -го столбца матрицы емкостей считаем, что потенциал проводника m равен единице, а потенциалы остальных проводников равны нулю. В общем случае требуется вычислить $\nabla_{\mathbf{s}} C_{km}(\mathbf{s})$. Для этого необходимо знать производные $\partial C_{km}(\mathbf{s})/\partial s$, где $s \in \mathbf{s}$. На первом этапе нужно решить (16) для номинальных значений параметров.

Пусть s — геометрический параметр, например ширина некоторого проводника. Введем следующие обозначения:

$$\delta_j(\xi) = 2\pi\varepsilon_j^+ \frac{\partial \sigma_j}{\partial s}, \quad \nu_j(\xi) = \frac{\partial \mathbf{r}_j(\xi)}{\partial s}. \quad (17)$$

Тогда для фиксированного значения m справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial s} C_{mn}(s) = \sum_{j \in \partial C_n} \int_0^1 \delta_j(\xi) d\xi. \quad (18)$$

Дифференцируя (13)–(15) по параметру $s \in \mathbf{s}$, получим интегральные уравнения для $\delta_k(\xi)$ ((19) — для проводников и (20) — для интерфейсов и границ области):

$$\sum_{k=1}^K \int_0^1 G(\mathbf{r}_i(\xi_0), \mathbf{r}_k(\xi)) \delta_k(\xi) d\xi = - \sum_{k=1}^K \int_0^1 (\boldsymbol{\nu}_i(\xi_0) - \boldsymbol{\nu}_k(\xi)) \nabla G(\mathbf{r}_i(\xi_0), \mathbf{r}_k(\xi)) \sigma_k(\xi) d\xi, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\pi \delta_i(\xi_0)}{l_i} + \lambda_i \sum_{k=1}^K \int_0^1 \frac{\partial G(\mathbf{r}_i(\xi_0), \mathbf{r}_k(\xi))}{\partial \mathbf{n}_i} \delta_k(\xi) d\xi = \\ & = - \frac{\pi \sigma_i(\xi_0)}{l_i^2} \frac{\partial l_i}{\partial s} - \lambda_i \sum_{k=1}^K \int_0^1 (\mathbf{n}_i(\xi_0), \nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}_i(\xi_0), \mathbf{r}_k(\xi)) (\boldsymbol{\nu}_i(\xi_0) - \boldsymbol{\nu}_k(\xi))) \sigma_k(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (20)$$

Сначала решается основная задача (13)–(15), затем система (19), (20), которая отличается от основной только правой частью, а после вычисляется (18). Необходимыми входными данными для метода прямого дифференцирования служат производные координат узловых точек по параметру s .

Известная техника сопряженных уравнений [27, 28] (Adjoint Differentiation Method, ADJM) может быть адаптирована для уравнений (13), (14). Пусть для проводника m задан потенциал $V_m = 1$, а остальные проводники имеют нулевой потенциал. Решение этой задачи позволяет определить емкости $C_{nm}(s)$, $n = 1, \dots, N$. Рассмотрим вычисление производной $\partial C_{nm}(s)/\partial s$.

Пусть $\mathbf{q}^{(m)}$ — вектор (размерности K) полных зарядов на сегментах с компонентами

$$q_k^{(m)} = \int_0^1 2\pi \varepsilon_k^+ \sigma_k^{(m)}(\xi) d\xi, \quad k = 1, \dots, K,$$

а вектор $\mathbf{v}^{(n)}$ (тоже размерности K) с компонентами 0 или 1, такой что выполняется равенство

$$C_{nm}(s) = Q_n = \sum_{S_k \in \partial C_n} q_k^{(m)} = (\mathbf{v}^{(n)}, \mathbf{q}^{(m)}). \quad (21)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial s} C_{nm}(s) = (\mathbf{v}^{(n)}, \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{q}^{(m)}(s)).$$

Дифференцируя (16), получаем

$$A(s) \boldsymbol{\delta}^{(m)}(s) + \frac{\partial A(s)}{\partial s} \boldsymbol{\sigma}^{(m)}(s) = 0,$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(m)}(s) = -A^{-1}(s) \frac{\partial A(s)}{\partial s} \boldsymbol{\sigma}^{(m)}(s),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} C_{nm}(s) &= \sum_{S_k \in \partial C_n} \int_0^1 \delta_k^{(m)}(s) d\xi = - \int_0^1 \left((A^{-1})^T(s) \mathbf{v}^{(n)}, \frac{\partial A(s)}{\partial s} \boldsymbol{\sigma}^{(m)}(s) \right) d\xi = \\ &= \left(\mathbf{w}^{(n)}, \int_0^1 \frac{\partial A(s)}{\partial s} \boldsymbol{\sigma}^{(m)}(s) d\xi \right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$A^T \mathbf{w}^{(n)} = -\mathbf{v}^{(n)}. \quad (23)$$

Метод ADJM удобнее для вычисления градиента $C_{nm}(s)$ по нескольким параметрам s .

При решении (13), (14) проекционными методами уравнения DDM и ADJM записываются для дискретной сеточной задачи.

4. Геометрический препроцессор. Полный вычислительный алгоритм нахождения матрицы емкости состоит из двух компонент — геометрического препроцессора и вычислительного модуля.

Входными данными для геометрического препроцессора служит файл описания технологического процесса и данные о проводниках, расположенных в определенных слоях металлизации. Результатом работы этой части алгоритма является формирование конфигурации сегментов и узловых точек, на которые опираются сегменты. Сегменты не могут пересекаться, а имеют лишь общие начальные и конечные точки. Сегменты могут быть частью границ проводников, интерфейсами между различными диэлектрическими средами или частью внешней границы.

Формирование сегментов S_k происходит последовательно: сначала определяются фигуры проводников, потом добавляются непланарные части конформных диэлектриков, затем добавляются их планарные части и планарные диэлектрики. Размер области вычисления по ширине и высоте задается исходя из соображений точности и скорости вычислений. Ширина выбирается кратной высоте всех проводников с таким расчетом, чтобы все емкости не менялись при увеличении этой ширины. Для задачи с нижним референсным проводником обычно достаточно выбрать расстояние от краев проводников до боковых границ равным 3–5 высотам проводников. Результат работы препроцессора приведен на рис. 1, однако на нем внешние границы для удобства представления показаны ближе, чем в расчетах.

5. Метод граничных элементов.

5.1. Метод Бубнова–Галеркина. Принципиальной особенностью задачи (13), (14) является сингулярность решения в угловых и узловых точках внутренних и внешних границ [19, 34]. Таким образом, в узловых точках, являющихся концами сегментов S_k , функции $\mu_k(\mathbf{r})$ не всегда определены, а функции $\sigma_k(\xi)$ или их производные в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ могут обращаться в бесконечность. Поэтому для решения (13), (14) методом Галеркина обычно используют кусочно-постоянные базисные и пробные функции, так как они не требуют задания значений в граничных точках.

Для каждого сегмента S_k нужно ввести сетку из n_k ячеек на интервале параметризации $(0, 1)$ исходя из параметра точности h , так что $n_k = l_k/h$. Величина h либо считается заданной, либо вычисляется автоматически как, например, минимальная ширина проводников в файле описания технологии, деленная на 4, т.е. $\min l_k/4$.

Сеткой и ее ячейками в нашем случае являются сегменты, получаемые путем разбиения на части исходных сегментов. Число сегментов разбиения определяет размерность сеточной системы линейных уравнений. Число и размер сегментов разбиения обуславливают точность и быстродействие всего алгоритма [16]. Целью процедуры разбиения является получение сетки минимальной размерности, обеспечивающей хорошую точность. Математически корректная, асимптотически правильная и простая процедура разбиения исходных сегментов описана ранее в [11, 17] для задачи без диэлектриков. Эта процедура состоит в полиномиальном сгущении сетки к угловым точкам проводников в зависимости от величины угла между сегментами. В случае, если к угловой точке примыкает диэлектрический интерфейс, то изменяется порядок сингулярности [19]. Однако точно подбирать степень сгущения не обязательно: расчеты показывают, что квадратичный порядок сгущения сетки обеспечивает хорошую точность во всех случаях [21].

После применения процедуры разбиения исходных сегментов система уравнений по-прежнему имеет вид (13), (14). Однако теперь $K = \sum_k n_k$ означает общее число ячеек вычислительной сетки и может достигать нескольких тысяч. Далее полагается $\sigma_k(\xi) = q_k/l_k$, и каждое уравнение интегрируется по отрезку $[0, 1]$. В результате приходим к системе линейных уравнений с плотно заполненной матрицей A и матрицей правых частей V размером $K \times N$:

$$Aq = V, \quad (24)$$

$$(A)_{ij} = \frac{1}{l_i l_j} \int_0^1 \int_0^1 G(\mathbf{r}_i(\xi_0), \mathbf{r}_j(\xi)) d\xi d\xi_0, \quad \mathbf{r}_i \in \partial C_i, \quad (25)$$

$$(A)_{ij} = -\pi \delta_{ij}/l_i + \lambda_i \frac{1}{l_i l_j} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial G(\mathbf{r}_i(\xi_0), \mathbf{r}_j(\xi))}{\partial \mathbf{n}_i(\xi_0)} d\xi d\xi_0, \quad \mathbf{r}_i \in \{\Gamma, \partial D\}, \quad (26)$$

где $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_K)$ и $\mathbf{r}_j \in S_j$, $j = 1, \dots, K$. Интегралы в (25), (26), включая сингулярные при $i = j$, вычисляются аналитически [20]. Искомые величины полных поверхностных зарядов q_k относятся к сегментам S_k .

Плавающие проводники с неопределенным потенциалом и нулевым полным зарядом увеличивают размерность матрицы линейных уравнений на несколько строк и столбцов.

Для вычисления производных емкостей по параметрам решение базовой задачи (24) надо дополнить решением уравнений DDM (19), (20) или ADJM (22), (23). Сформулируем эту задачу для метода ADJM и метода Галеркина. Пусть $\mathbf{s}$ — вектор геометрических параметров. Для вычисления емкостей $C_{mn}(\mathbf{s})$ сначала решается система сеточных уравнений (16). Представим C_{mn} (21) в виде скалярного произведения $\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{s})$ и вектора $\mathbf{v}^{(n)}$ размерностью $K = \sum_k n_k$, имеющего компоненты 0 и 1:

$$C_{mn}(\mathbf{s}) = (\mathbf{v}^{(n)}, \mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{s})).$$

Дифференцируя $A(\mathbf{s})\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}^{(m)}$ и полагая $A^T(\mathbf{s})\mathbf{w}^{(n)} = -\mathbf{v}^{(n)}$, получаем

$$\nabla_{\mathbf{s}} C_{mn}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^K v_j^{(n)} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{s}) = (\mathbf{w}^{(n)}, \nabla_{\mathbf{s}} (A(\mathbf{s})\mathbf{q}^{(m)}(\mathbf{s}))).$$

Таким образом, метод вычисления производных ADJM, как и DDM, помимо решения основной системы линейных уравнений, дополнительно требует решения систем с той же матрицей и другими правыми частями. Для вычисления этих правых частей необходимо выполнить $O(K^2)$ арифметических операций. Алгоритмы ADJM и DDM могут различаться по быстродействию в зависимости от числа проводников и параметров. Дополнительными входными данными для вычисления производных (чувствительности) по геометрическим параметрам служат производные координат узловых точек сегментов по параметрам $\nu_j(\xi)$ (17).

Алгоритм DDM может быть применен для вычисления производных емкостей по относительным диэлектрическим проницаемостям.

5.2. Коллокация и кусочно-полиномиальная аппроксимация. Метод коллокации на основе кусочно-линейной аппроксимации для системы (13), (14) использует ту же неравномерную сетку для каждого исходного сегмента, что и метод Галеркина, однако измельчение сегментов не производится, и аппроксимируются непосредственно уравнения (13), (14) [21]. В отличие от описанного выше метода Галеркина, искомые значения плотности зарядов $\sigma_k(\xi)$ соответствуют узлам сетки каждого сегмента, а не ячейкам. Краевые точки сегментов $\xi = 0$ и $\xi = 1$ узлами сетки не являются. Для внутренних ячеек используется стандартная линейная аппроксимация $\sigma_k(\xi) \approx \sigma_{k,i}^h + (\xi - \xi_i)(\sigma_{k,i+1}^h - \sigma_{k,i}^h)/(\xi_{i+1} - \xi_i)$, где $i = 1, \dots, n_k$, а на ячейках сетки $(0, \xi_1)$ и $(\xi_{n_k}, 1)$ применяется постоянная аппроксимация $\sigma_k(\xi) \approx \sigma_{k,1}^h, \sigma_k(\xi) \approx \sigma_{k,n_k}^h$ соответственно, так что сеточная функция σ_k^h аппроксимирует сингулярное решение на S_k в интегральной норме.

Пусть $\varphi^h(\xi)$ — базисные функции кусочно-линейной интерполяции, $\xi_0 = 0, \xi_{n_k} = 1$. Матричные элементы сеточных уравнений метода коллокации

$$A\sigma^h = \mathbf{V} \quad (27)$$

имеют вид

$$(A)_{ij} = \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_{j+1}} G(\mathbf{r}_k(\xi_i), \mathbf{r}_m(\xi)) \varphi_j^h(\xi) d\xi, \quad S_k \in \partial C, \quad (28)$$

$$(A)_{ij} = -\pi \delta_{ij} / l_k + \lambda_i \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_{j+1}} \frac{\partial G(\mathbf{r}_k(\xi_i), \mathbf{r}_m(\xi))}{\partial \mathbf{n}_i(\xi_i)} \varphi_j^h(\xi) d\xi, \quad S_k \in \{\Gamma, \partial D\}. \quad (29)$$

Здесь ∂C — общая граница проводников, Γ — все внутренние границы расчетной области, $\mathbf{r}_m \in S_m$, $m = 1, \dots, K$. Интегралы в (28), (29) находятся численно с использованием квадратур Гаусса. Сингулярная часть интеграла (28) при $i = j$ выделяется и интегрируется аналитически [21].

По сравнению с методом Галеркина описанный метод коллокации имеет более высокий порядок аппроксимации. С другой стороны, оба метода дискретизации при вычислении емкостей обладают свойством сверхсходимости [17], которая, однако, доказана только для модельных уравнений. Поэтому реальная точность и быстродействие алгоритмов могут быть установлены только в ходе расчетов, результаты которых приведены ниже.

5.3. Решение системы сеточных уравнений. Непрямой метод граничных элементов основан на использовании потенциала простого слоя, и для каждого граничного сегмента искомой величиной является плотность потенциала простого слоя σ_k , $k = 1, \dots, K$. Прямой метод граничных элементов, обычно применяемый в задачах экстракции [5, 12], использует третью формулу Грина с двумя функциями: потенциалом $v(\xi)$ и его нормальной производной $\partial v(\xi)/\partial \mathbf{n}$. На проводниках ∂C_i известен потенциал $v(\xi)$ и ищется $\partial v(\xi)/\partial \mathbf{n}$, на внешней границе $\partial v(\xi)/\partial \mathbf{n} = 0$, а искомой величиной является $v(\xi)$. На интерфейсных сегментах искомыми величинами являются обе функции: $v(\xi)$ и $\partial v(\xi)/\partial \mathbf{n}$. Таким образом, непрямой метод использует меньше искоемых функций, чем прямой. При дискретизации на одинаковых сетках это приводит к значительной разности в размерности матриц сеточных линейных уравнений. Так как число интерфейсных сегментов, как правило, является доминирующей величиной по сравнению с числом сегментов других типов (рис. 1), то непрямой метод представляется более эффективным, несмотря на известную блочно-разреженную структуру матрицы прямого метода [12].

Оба алгоритма (аппроксимация Галеркина и метод коллокации) используют одну и ту же сетку значений параметра ξ на каждом сегменте S_k . Размерность матрицы A в (24), (27) приблизительно одинакова и составляет $\sum_k n_k$, где n_k — число узлов или ячеек сетки на каждом сегменте. Для решения систем линейных уравнений (24), (27) с N правыми частями используется реализация LU разложения из библиотеки Eigen [14].

5.4. Программа. Геометрический препроцессор и вычислительные методы Галеркина и коллокации реализованы на C++ в рамках проекта по экстракции и моделированию микроэлектронных структур.

Программа метода коллокации представляет собой переработку и усовершенствование алгоритма [21] и программы [31, 32].

6. Расчеты и сравнение вычислительных алгоритмов. Приведем данные о быстродействии и точности метода Галеркина (далее для краткости GBEM) и метода коллокации (СВЕМ) для простой характерной структуры, представленной на рис. 2. Эта структура состоит из трех проводников, причем

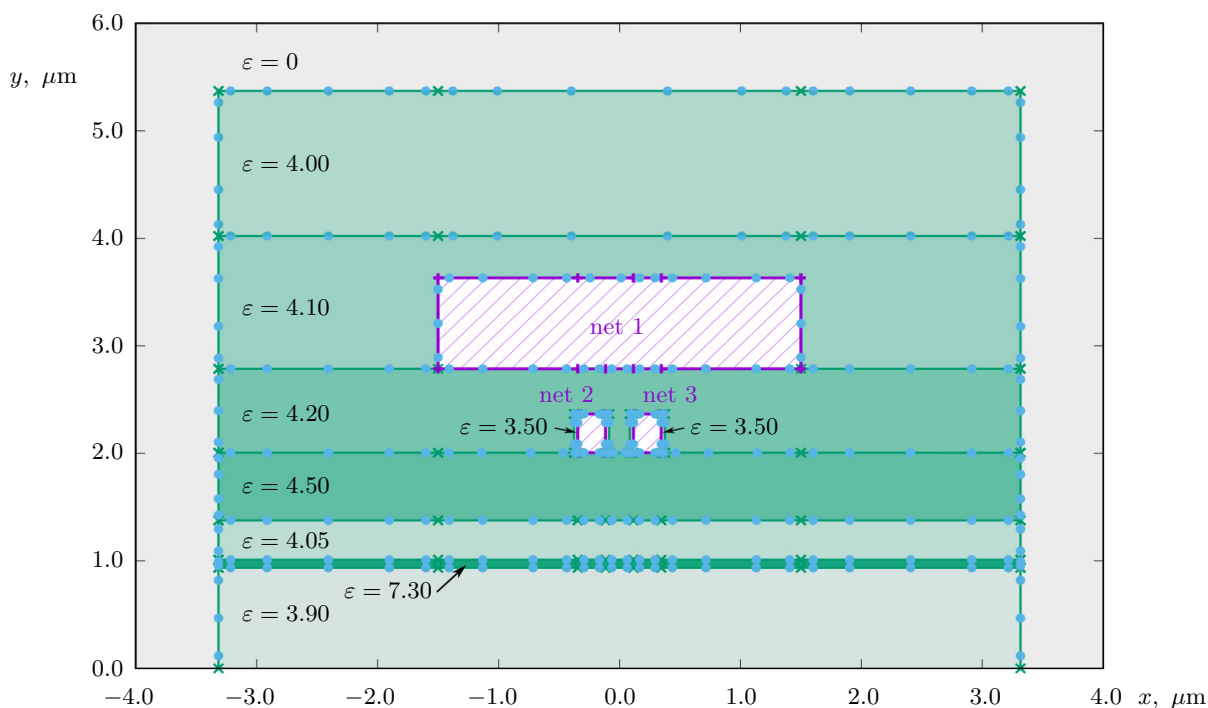


Рис. 2. Структура из трех проводников net 1, net 2, net 3, для которой выполнялись расчеты контроля точности и быстродействия. Приведены величины относительных диэлектрических проницаемостей для областей, включающих конформные диэлектрики. Также представлены узлы неравномерной сетки, адаптированной к решению. Показана неоднородная расчетная сетка для всех сегментов

Fig. 2. Structure of three conductors net 1, net 2, net 3, for which accuracy and performance control calculations were performed. The values of relative dielectric constants for domains including conformal dielectrics are presented.

Projection mesh nodes adapted to the solution are also shown. A heterogeneous computational mesh for all segments is presented

проводники 1 и 2 расположены симметрично относительно середины проводника 3, так что $C_{13} = C_{23}$. Показана неоднородная сетка со сгущением в областях всех возможных особенностей решения, а также проекции угловых точек проводников для формирования структур типа плоского конденсатора, что увеличивает точность расчетов.

Нижняя граница, соответствующая однородному краевому условию первого рода, на рис. 2 отсутствует, а краевое условие учитывается с помощью функции Грина. Структура на рисунке имеет умеренную ширину. Расчеты проводились для более широкой структуры, так что краевые эффекты на удаленной границе оказывают незначительное влияние на результат.

Полное время одного расчета складывается из времени работы геометрического препроцессора, времени формирования матрицы сеточных уравнений и времени решения сеточных уравнений. Время геометрического препроцессора незначительно. Остальные данные (время заполнения матрицы, факторизация вместе со временем решения, а также полное время расчета) приведены на рис. 3. Как можно видеть, алгоритм СВЕМ несколько быстрее GBEM при одинаковой точности.

Данные о точности также приведены на рис. 3 на кривых, соответствующих полному времени расчетов. Эта точность является относительной и определяется как максимальная относительная погрешность между всеми элементами матрицы емкостей. Максимальную относительную погрешность имеют недиагональные элементы C_{ij} .

Соотношение $C_{13} = C_{23}$ выполняется с точностью, показанной на рис. 3. Результаты GBEM и СВЕМ в пределах вычислительной погрешности согласуются как между собой, так и с результатами программы FasterCap [33]. Однако FasterCap, как правило, уступает в быстродействии при той же точности расчетов.

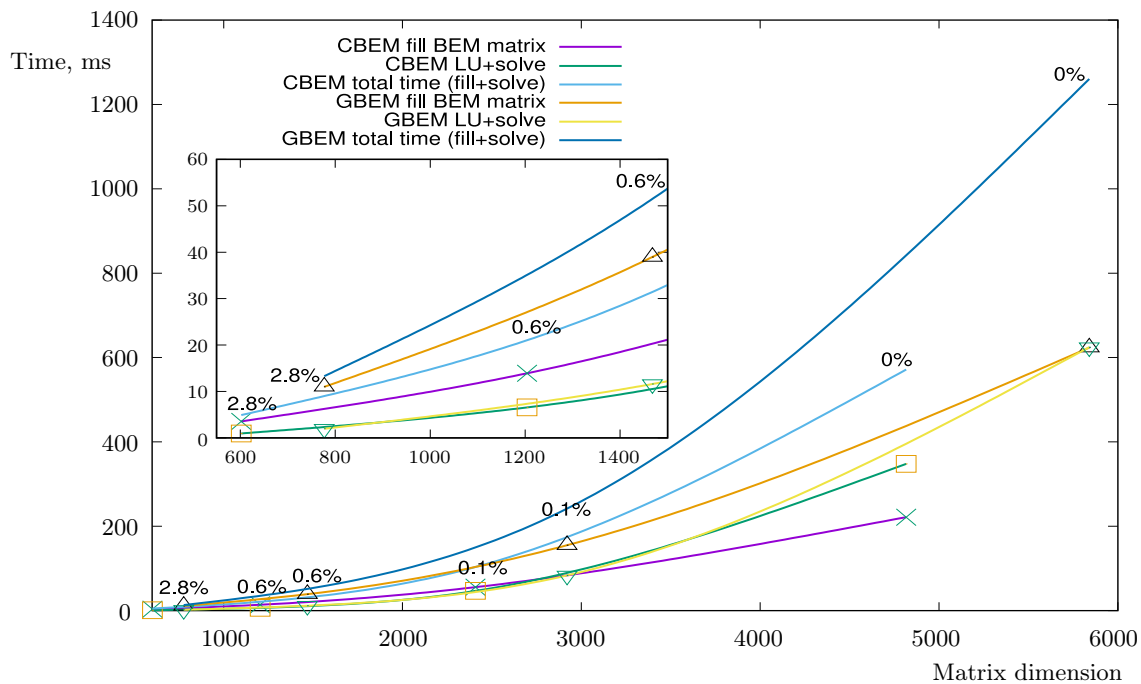


Рис. 3. Быстродействие и точность алгоритмов GBEM (по методу Галеркина) и СВЕМ (по методу коллокации). Графики “СВЕМ fill BEM matrix” и “GBEM fill matrix” демонстрируют время вычисления матриц уравнений по методу граничных элементов; “СВЕМ LU+solve” и “GBEM LU+solve” соответствуют полному времени факторизации и последующему решению системы линейных уравнений с помощью библиотеки Eigen; “СВЕМ total time (fill+solve)” и “GBEM total time (fill+solve)” иллюстрируют полное время решения интегральных уравнений. Достигнутая точность связана с размерностью матриц и полным временем вычислений и указана на кривых времени расчета

Fig. 3. Performance and accuracy of GBEM (Galerkin-based method) and CBEM (collocation-based method) algorithms. The “CBEM fill BEM matrix” and “GBEM fill matrix” plots show the calculation time of the equation matrices of the boundary element method; “CBEM LU+solve” and “GBEM LU+solve” correspond to the total time of factorization and subsequent solution of the linear equation system using the Eigen library; “CBEM total time (fill+solve)” and “GBEM total time (fill+solve)” represent the total time for solving integral equations. The achieved accuracy is related to the matrix dimension and the total computation time and is shown on the calculation time curves

Расчеты проводились на ПК с процессором Ryzen 7 5825U и операционной системой Linux без использования многопоточности.

Расчеты чувствительности по алгоритму DDM (18)–(20) были представлены ранее в [25].

7. Выводы. В статье представлена постановка двумерной задачи вычисления матрицы емкостей, а также связанные с ней дополнительные задачи, возникающие при проектировании микроэлектронных структур. Эти задачи имеют ряд особенностей, главной из которых является большое число внутренних границ между средами с постоянными относительными диэлектрическими проницаемостями. Для численного решения предложен метод граничных элементов на основе потенциала простого слоя. Таким образом, искомыми величинами служат плотности поверхностных зарядов на проводниках и границах диэлектрических сред. Эта хорошо известная форма сведения задачи электростатики к интегральным уравнениям отличается от принятого в задачах экстракции прямого метода, основанного на использовании третьей формулы Грина, меньшим числом неизвестных функций и меньшей размерностью матрицы дискретных сеточных уравнений (хотя и плотно заполненной). Граничные интегральные уравнения решаются проекционными методами Галеркина, а также при помощи специально разработанного алгоритма коллокации повышенного порядка аппроксимации. Главной особенностью нашей реализации этих алгоритмов служит автоматический априорный выбор неравномерных сеток, обеспечивающий высокую точность при умеренной размерности системы линейных сеточных уравнений. Оба алгоритма реализованы в среде общего проекта экстракции эквивалентных схем для моделирования и проектирования микроэлектронных структур. Проведено исследование точности и быстродействия алгоритмов. Метод коллокации несколько быстрее метода Галеркина при одинаковой точности для задач с матрицей линейных уравнений большой размерности. С другой стороны, поскольку матричные элементы в методе Галеркина вычисляются аналитически, то он более надежен в случае грубых сеток и больших структур. Описанный в работе вариант метода Галеркина удобнее и проще в реализации при переносе на трехмерные задачи.

Список литературы

1. Lavagno L., Markov I.L., Martin G., Scheffer L.K. (eds.) Electronic design automation for IC implementation, circuit design, and process technology (2nd ed.). Boca Raton: CRC Press, 2016. doi 10.1201/9781315215112.
2. Wang Yangyuan, Chi Min-Hwa, Lou J.Jen-Chung, Chen Chun-Zhang (eds.) Handbook of integrated circuit industry. Singapore: Springer Nature, 2024. doi 10.1007/978-981-99-2836-1.
3. Baker R.J. (Ed.) CMOS. Circuit design, layout, and simulation. (2nd ed.). IEEE Press, 2005.
4. Kao W.H., Lo Chi-Yuan, Basel M., Singh R. Parasitic extraction: current state of the art and future trends // Proceedings of the IEEE. 2001. **89**, N 5. 729–739. doi 10.1109/5.929651.
5. Bachtold M., Spasojevic M., Lage C., Ljung P.B. A system for full-chip and critical net parasitic extraction for ULSI interconnects using a fast 3-D field solver // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2000. **19**, N 3. 325–338. doi 10.1109/43.833201.
6. Sitaram D., Zheng Yu, Shepard K.L. Full-chip, three-dimensional shapes-based RLC extraction // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2004. **23**, N 5. 711–727. doi 10.1109/TCAD.2004.826545.
7. Yu W., Wang X. Advanced field-solver techniques for RC extraction of integrated circuits. Springer Press, Tsinghua University Press, 2014. doi 10.1007/978-3-642-54298-5.
8. Jin Jian-Ming. The finite element method in electromagnetics. 3rd ed. Wiley-IEEE Press, 2014.
9. Ren D., Xu X., Qu H., Ren Z. Two-dimensional parasitic capacitance extraction for integrated circuit with dual discrete geometric methods // Journal of Semiconductors. 2015. **36**, N 4. Article Number 045008. doi 10.1088/1674-4926/36/4/045008.
10. Costabel M. Principles of boundary element methods // Computer Physics Reports. 1987. **6**, N (1–6). 243–274. doi 10.1016/0167-7977(87)90014-1.
11. Gwinner J., Stephan E.P. Advanced boundary element methods: treatment of boundary value, transmission and contact problems. Cham: Springer, 2018. doi 10.1007/978-3-319-92001-6.
12. Zhai K., Yu W. The 2-D boundary element techniques for capacitance extraction of nanometer VLSI interconnects // International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. 2014. **27**, N 4. 656–668. doi 10.1002/jnm.1934.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики (6-е изд.) М.: Изд-во МГУ, 1999.
14. Eigen: A C++ template library for linear algebra. <https://libeigen.gitlab.io>. (Cited May 27, 2026).



15. *Khapaev M.M., Kupriyanov M.Yu.* Calculation of the inductance of normal conductors and superconductors // Differential Equations. 2022. **58**, N 8. 1142–1151. doi [10.1134/S0012266122080146](https://doi.org/10.1134/S0012266122080146).
16. *Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
17. *Yan Y., Sloan I.H.* Mesh grading for integral equations of the first kind with logarithmic kernel // SIAM J. Numer. Anal. 1989. **26**, N 3. 574–587. doi [10.1137/0726034](https://doi.org/10.1137/0726034).
18. *van Bladel J.* Singular electromagnetic fields and sources. IEEE Press series on electromagnetic wave theory. IEEE Press, 1991.
19. *van Bladel J.* Electromagnetic fields, IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007.
20. *Bazdar M.B., Djordjevic A.R., Harrington R.F., Sarkar T.K.* Evaluation of quasi-static matrix parameters for multiconductor transmission lines using Galerkin's method // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1994. **42**, N 7. 1223–1228. doi [10.1109/22.299760](https://doi.org/10.1109/22.299760).
21. *Хапаев М.М.* Метод граничных элементов для задач с угловыми точками и смешанными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1991. **27**, N 7. 1263–1267.
22. sky130_cds/PEX/sky130.ict at main · stineje/sky130_cds · GitHub. https://github.com/stineje/sky130_cds/blob/main/PEX/sky130.ict (Cited May 27, 2026).
23. cirkopt/liberate/models/ictfile at main · tomdriley/cirkopt · GitHub. <https://github.com/tomdriley/cirkopt/blob/main/liberate/models/ictfile> (Cited May 27, 2026).
24. *Smolić I., Klajn B.* Capacitance matrix revisited // Progress In Electromagnetics Research B. 2021. **92**, 1–18. doi [10.2528/PIERB21011501](https://doi.org/10.2528/PIERB21011501).
25. *Бойко А.Я., Безруков А.Е., Русаков А.С., Ткачев Д.Ф., Хапаев М.М.* Новый алгоритм вычисления двумерных емкостей в задачах экстракции // Сборник трудов. Всероссийская научно-техническая конференция Проблемы разработки перспективных микроэлектронных систем (МЭС). 2006, N 1. М.: ИПИМ РАН, 2006. 76–80.
26. *Ureel J., De Zutter D.* Shape sensitivities of capacitances of planar conducting surfaces using the method of moments // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn. 1996. **44**, N 2. 198–207. doi [10.1109/22.481568](https://doi.org/10.1109/22.481568).
27. *Влах И., Сингхал К.* Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988.
28. *Nikolova N.K., Bandler J.W., Bakr M.H.* Adjoint techniques for sensitivity analysis in high-frequency structure CAD // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2004. **52**, N 1. 403–419. doi [10.1109/TMTT.2003.820905](https://doi.org/10.1109/TMTT.2003.820905).
29. *El-Moselhy T., Elfadel I.M., Widiger D.* Efficient algorithm for the computation of on-chip capacitance sensitivities with respect to a large set of parameters // Proceedings of the 45th annual Design Automation Conference (DAC'08), Anaheim, CA, USA, June 8–13, 2008. IEEE Press, 2008. pp. 906–911. doi [10.1145/1391469.1391699](https://doi.org/10.1145/1391469.1391699).
30. *Gao Z., Ren D., Yan S., et al.* Computation of sensitivities of IC interconnect parasitic capacitances to the process variation with dual discrete geometric methods // J. Semicond. 2016. **37**, N 8. Article Number 085003. doi [10.1088/1674-4926/37/8/085003](https://doi.org/10.1088/1674-4926/37/8/085003).
31. LCR2D. <http://vmbak.cs.msu.ru/sotr/vmhap/lcr2d/lcr2d.html>. (Cited May 27, 2026).
32. LCR2D: 2D field solver for calculation of inductances, capacitances and resistances. http://vmbak.cs.msu.ru/sotr/vmhap/lcr2d/lcr_man.pdf. (Cited May 27, 2026).
33. Fast Field Solvers FasterCap. <https://www.fastfieldsolvers.com/fastercap.htm>. (Cited May 27, 2026).

Получена
4 марта 2026 г.

Принята
12 мая 2026 г.

Опубликована
14 июля, 2026 г.

Информация об авторах

Василий Викторович Сазонов — д.ф.-м.н., декан; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет космических исследований, Ленинские горы, 1, стр. 52, 119991, Москва, Российская Федерация.

Михаил Михайлович Хапаев — к.ф.-м.н., доцент; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, д.1, стр. 52, 2-й учебный корпус, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. L. Lavagno, I. L. Markov, G. Martin, and L. K. Scheffer (eds.), *Electronic Design Automation for IC Implementation, Circuit Design, and Process Technology (2nd ed.)* (CRC Press, Boca Raton, 2016). doi [10.1201/9781315215112](https://doi.org/10.1201/9781315215112).
2. Yangyuan Wang, Min-Hwa Chi, Jesse Jen-Chung Lou, and Chun-Zhang Chen (eds.), *Handbook of Integrated Circuit Industry* (Springer Nature, Singapore, 2024). doi [10.1007/978-981-99-2836-1](https://doi.org/10.1007/978-981-99-2836-1).
3. R. J. Baker (ed.), *CMOS. Circuit Design, Layout, and Simulation (2nd ed.)* (IEEE Press, 2005).
4. W. H. Kao, Chi-Yuan Lo, M. Basel, and R. Singh, “Parasitic extraction: current state of the art and future trends,” *Proceedings of the IEEE* **89** (5), 729–739 (2001). doi [10.1109/5.929651](https://doi.org/10.1109/5.929651).
5. M. Bachtold, M. Spasojevic, C. Lage, and P. B. Ljung, “A system for full-chip and critical net parasitic extraction for ULSI interconnects using a fast 3-D field solver,” *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* **19** (3), 325–338 (2000). doi [10.1109/43.833201](https://doi.org/10.1109/43.833201).
6. D. Sitaram, Yu Zheng, and K. L. Shepard, “Full-Chip, Three-Dimensional Shapes-Based RLC Extraction,” *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* **23** (5), 711–727 (2004). doi [10.1109/TCAD.2004.826545](https://doi.org/10.1109/TCAD.2004.826545).
7. W. Yu and X. Wang, *Advanced Field-Solver Techniques for RC Extraction of Integrated Circuits* (Springer Press, Tsinghua University Press, 2014). doi [10.1007/978-3-642-54298-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-54298-5).
8. Jidan-Ming Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics, 3rd ed.* (Wiley-IEEE Press, 2014).
9. D. Ren, X. Xu, H. Qu, and Z. Ren, “Two-dimensional parasitic capacitance extraction for integrated circuit with dual discrete geometric methods,” *Journal of Semiconductors* **36** (4), Article Number 045008 (2015). doi [10.1088/1674-4926/36/4/045008](https://doi.org/10.1088/1674-4926/36/4/045008).
10. M. Costabel, “Principles of boundary element methods,” *Computer Physics Reports* **6** (1–6), 243–274 (1987). doi [10.1016/0167-7977\(87\)90014-1](https://doi.org/10.1016/0167-7977(87)90014-1).
11. J. Gwinner and E. P. Stephan, *Advanced Boundary Element Methods: Treatment of Boundary Value, Transmission and Contact Problems* (Springer, Cham, 2018). doi [10.1007/978-3-319-92001-6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-92001-6).
12. K. Zhai and W. Yu, “The 2-D boundary element techniques for capacitance extraction of nanometer VLSI interconnects,” *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* **27** (4), 656–668 (2014). doi [10.1002/jnm.1934](https://doi.org/10.1002/jnm.1934).
13. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Courier Corporation, USA, 2013).
14. Eigen: A C++ template library for linear algebra. <https://libeigen.gitlab.io>. Cited May 27, 2026.
15. M. M. Khapaev and M. Yu. Kupriyanov, “Calculation of the Inductance of Normal Conductors and Superconductor,” *Differential Equations* **58** (8), 1142–1151 (2022). doi [10.1134/S0012266122080146](https://doi.org/10.1134/S0012266122080146).
16. N. N. Kalitkin, A. B. Alshin, E. A. Alshina, and B. V. Rogov, *Computations on Quasi-Uniform Grids* (PhysMathLit, Moscow, 2005). [in Russian].
17. Y. Yan and I. H. Sloan, “Mesh grading for integral equations of the first kind with logarithmic kernel,” *SIAM J. Numer. Anal.* **26** (3), 574–587 (1989). doi [10.1137/0726034](https://doi.org/10.1137/0726034).
34. J. van Bladel, *Singular Electromagnetic Fields and Sources. IEEE Press series on electromagnetic wave theory* (IEEE Press, 1991).
18. J. van Bladel, *Electromagnetic Fields, IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, 2nd ed.* (John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2007).
19. M. B. Bazdar, A. R. Djordjevic, R. F. Harrington, and T. K. Sarkar, “Evaluation of Quasi-Static Matrix Parameters for Multiconductor Transmission Lines Using Galerkin’s Method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **42** (7), 1223–1228 (1994). doi [10.1109/22.299760](https://doi.org/10.1109/22.299760).
20. M. M. Khapaev (Jr.), “A boundary-element method for problems with corners and mixed boundary-conditions,” *Differ. Uravn.* 1991. **27** (7), 1263–1267. [*Differ. Equ.* **27** (7), 895–898 (1991)].
21. sky130_cds/PEX/sky130.ict at main · stineje/sky130_cds · GitHub. https://github.com/stineje/sky130_cds/blob/main/PEX/sky130.ict, Cited May 27, 2026.
22. cirkopt/liberate/models/ictfile at main · tomdriley/cirkopt · GitHub. <https://github.com/tomdriley/cirkopt/blob/main/liberate/models/ictfile>, Cited May 27, 2026.
23. I. Smolić and B. Klajn, “Capacitance Matrix Revisited,” *Progress In Electromagnetics Research B* **92**, 1–18 (2021). doi [10.2528/PIERB21011501](https://doi.org/10.2528/PIERB21011501).
24. A. Y. Boiko, A. E. Bezrukov, A. S. Rusakov, D. F. Tkachev, and M. M. Khapaev, “New algorithm for calculation of 2D capacitances in extraction,” in *Problems of Perspective Microelectronic Systems Development. Scientific Proceedings, vol. 1* (IPPM RAN, Moscow, 2006), pp. 76–80. [in Russian].



25. J. Ureel and D. De Zutter, “Shape sensitivities of capacitances of planar conducting surfaces using the method of moments,” *IEEE Trans. Microwave Theory and Techn.* **44** (2), 198–207 (1996). doi [10.1109/22.481568](https://doi.org/10.1109/22.481568).
26. J. Vlach and K. Singhal, *Computer methods for circuit analysis and design* (VNR, NY, 1983; Radio i svyaz, Moscow, 1988).
27. N. K. Nikolova, J. W. Bandler, and M. H. Bakr, “Adjoint Techniques for Sensitivity Analysis in High-Frequency Structure CAD,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **52** (1), 403–419 (2004). doi [10.1109/TMTT.2003.820905](https://doi.org/10.1109/TMTT.2003.820905).
28. T. El-Moselhy, I. M. Elfadel, and D. Widiger, “Efficient algorithm for the computation of on-chip capacitance sensitivities with respect to a large set of parameters,” in *Proceedings of the 45th annual Design Automation Conference (DAC’08), Anaheim, CA, USA, June 8–13, 2008* (IEEE Press, 2008), pp. 906–911. doi [10.1145/1391469.1391699](https://doi.org/10.1145/1391469.1391699).
29. Z. Gao, D. Ren, S. Yan, et al., “Computation of sensitivities of IC interconnect parasitic capacitances to the process variation with dual discrete geometric methods,” *J. Semicond.* **37** (8), Article Number 085003 (2016). doi [10.1088/1674-4926/37/8/085003](https://doi.org/10.1088/1674-4926/37/8/085003).
30. LCR2D. <http://vmbak.cs.msu.ru/sotr/vmhap/lcr2d/lcr2d.html>. Cited May 27, 2026.
31. LCR2D: 2D field solver for calculation of inductances, capacitances and resistances. http://vmbak.cs.msu.ru/sotr/vmhap/lcr2d/lcr_man.pdf. Cited May 27, 2026.
32. Fast Field Solvers FasterCap. <https://www.fastfieldsolvers.com/fastercap.htm>. Cited May 27, 2026.

Received
March 4, 2026

Accepted
May 12, 2026

Published
July 14, 2026

Information about the authors

Vasily V. Sazonov — Dr. Sci., Dean; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Space Research, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia.

Mikhail M. Khapaev — Ph.D., Associate Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia.