



О применении неявных схем для численного моделирования динамики самогравитирующего газа

А. В. Попов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0009-0003-4176-8841, e-mail: popovav@mech.math.msu.su

Е. В. Чижонков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-7194-8451, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Аннотация: Для численного моделирования динамики самогравитирующего газа предлагается использовать две неявные разностные схемы первого и второго порядков аппроксимации. В качестве тестовой задачи рассматривается динамика локального возмущения плотности плоско-го пространственно одномерного газового слоя. В процессе движения из начального бесконечно дифференцируемого состояния постепенно формируются градиентные катастрофы (разрывы), которые затем продолжают перемещаться в пространстве. Кроме выполнения законов сохранения массы и импульса расчеты показали хорошее соответствие с уравнением, описывающим взаимную трансформацию гравитационной и кинетической энергий.

Ключевые слова: численное моделирование, неявная разностная схема, самогравитирующий газ, градиентная катастрофа.

Благодарности: Исследование выполнено в рамках государственного задания “Разработка теории и программного обеспечения для задач вычислительной математики и ее приложений (номер ЦИТИС: 121060200160–3)”.

Для цитирования: Попов А.В., Чижонков Е.В. О применении неявных схем для численного моделирования динамики самогравитирующего газа // Вычислительные методы и программирование. 2026. 27, № 2. 135–150. doi 10.26089/NumMet.v27r210.



On the application of implicit schemes for numerical simulation of the dynamics of a self-gravitating gas

Anatoly V. Popov

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
Moscow, Russia

ORCID: 0009-0003-4176-8841, e-mail: popovav@mech.math.msu.su

Evgenii V. Chizhonkov

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
Moscow, Russia

ORCID: 0000-0002-7194-8451, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Abstract: For numerical simulation of the dynamics of a self-gravitating gas, it is proposed to use two implicit difference schemes of first and second orders of approximation. The dynamics of a local perturbation of the density of a plane spatially one-dimensional gas layer is considered as a test problem. In the process of movement, gradient catastrophes (discontinuities) gradually form from the initial infinitely differentiable state, which then continue to move in space. In addition to following the laws of conservation of mass and momentum, the calculations showed good correspondence with the equation describing the mutual transformation of gravitational and kinetic energies.

Keywords: numerical simulation, implicit difference scheme, self-gravitating gas, gradient catastrophe.

Acknowledgements: The research was carried out within the framework of the State Task “Development of theory and software for computational mathematics and its applications (CIT&S number: 121060200160–3)”.

For citation: A. V. Popov, E. V. Chizhonkov, “On the application of implicit schemes for numerical simulation of the dynamics of a self-gravitating gas,” *Numerical Methods and Programming*, 27 (2), 135–150 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r210.

1. Введение. Первые систематические исследования глобальных свойств самогравитирующих газов были ориентированы на стационарные состояния и сыграли основополагающую роль как в астрофизической, так и в математической литературе (см., например, классический учебник [1]). В частности, естественно использовать стационарность для моделирования таких объектов, как нейтронные звезды и белые карлики (см. обсуждение в [2]). С математической точки зрения изучение неподвижных звезд и их устойчивости — это интересная тематика, в которой много нерешенных вопросов. Однако более актуальным является исследование зависящих от времени режимов, в которых основные характеристики физически важных явлений, таких как коллапс звезды или взрыв сверхновой, могут быть получены с интересующей точностью.

Многие математические трудности, связанные с самогравитирующими газами, возникают из-за сильно нелинейного и нелокального взаимодействия между давлением и гравитацией. Первое обычно способствует рассеиванию, в то время как второе, несомненно, является притягивающей, фокусирующей силой. Этот антагонизм, помимо прочего, позволяет существовать устойчивым состояниям, когда эти две силы находятся в идеальном равновесии. Однако это также приводит к ряду различных режимов, включая, в первую очередь, коллапс и расширение [3]. Также важными примерами динамики самогравитирующего газа являются процессы зарождения звезд и эволюции околозвездных дисков [4].

Как правило, эффектами вязкости на начальных стадиях формирования звезд можно пренебречь (характерное значение числа Рейнольдса порядка 10^3), поэтому динамика газа может быть описана известными нестационарными уравнениями Эйлера. В свою очередь, гравитационное поле моделируют с помощью уравнения Пуассона. Учитывая нелинейность и нелокальность проблемы, на первый план ис-



следования традиционно выходят приближенные методы. Наиболее популярными для этих целей алгоритмами являются метод SPH (Smoothed-Particle Hydrodynamics — метод сглаженных частиц) и метод Годунова с использованием адаптивных сеток. Достоинства и недостатки этих подходов хорошо известны.

Бессеточный метод SPH [5, 6] имеет ярко выраженную лагранжеву структуру, которая позволяет качественно верно описывать решение и эффективно использовать вычислительные ресурсы. К недостаткам этого метода можно отнести нарушение консервативности и непрерывности среды [7], что преодолевается, как правило, введением искусственной вязкости.

Схема Годунова является двухэтапной схемой [8]: сначала решение задачи Римана порождает предварительные значения скорости и давления, а затем вычисляются скорректированные значения газодинамических параметров на основе полученных накануне данных. Алгоритмы построения адаптивных сеток в основном базируются на кусочно-параболическом методе PPM (Piecewise Parabolic Method) [9], что позволяет повысить точность газодинамического блока в целом и улучшить качество численного решения в окрестности разрывов. Однако при моделировании нелинейной динамики газа возможны процессы кластеризации, сложные эффекты перемешивания, развитие неустойчивостей различного типа [10–12], тогда адаптация сеток становится весьма затратной и практически неэффективной.

К настоящему времени разработаны программные комплексы (ATHENA, ENZO, FLASH, GADGET2, HARM, PLUTO, ZEUS и др.), ориентированные на моделирование динамики самогравитирующего газа, но учитывающие в том числе и другие физические эффекты. Их сравнению посвящен ряд работ, в частности [13–16], из которых следует вывод, что в нелинейных задачах с гравитационным полем численное решение чувствительно к деталям алгоритмов и особенностям программной реализации. Практически это означает возможность эксплуатации указанных программных кодов в основном самими разработчиками или в изученных ранее областях. Таким образом, по-прежнему представляются актуальными вопросы разработки новых численных алгоритмов (см., например, [17–19]).

В работе в качестве модельной постановки рассматривается динамика локального возмущения плотности плоского пространственно одномерного слоя самогравитирующего газа. Эту задачу можно рассматривать как промежуточную между анализом устойчивости равновесного состояния и исследованием динамики (формы решения) возмущенного равновесия. В первую очередь, такой выбор обусловлен простотой и одновременно содержательностью уравнений. Следует отметить, что приближение плоского слоя оправдано при изучении процессов звездообразования в области между ударным и ионизационным фронтами. Такой комплекс разрывов формируется при расширении окружающей горячую звезду области H II, занимаемой нагретым и ионизованным излучением водородом. При этом расстояние между фронтами обычно мало по сравнению с размером области H II [20].

Работа организована следующим образом. В разделе 2 сформулирована задача, содержащая хорошо известные гидродинамические уравнения Эйлера–Пуассона и начальные условия, имеющие аналогию с возбуждением в холодной бесстолкновительной плазме ленгмюровских колебаний коротким мощным лазерным импульсом [21]. Дополнительно приведены соотношения, описывающие закон трансформации энергии в рассматриваемом изотермическом случае. В разделе 3 для поставленной задачи сначала построена неявная схема типа Мак-Кормака для нелинейных уравнений из второго раздела, а также отмечены наиболее важные вычислительные свойства этой схемы. Кроме того, в этом же разделе описана другая неявная, но менее точная на гладком решении схема первого порядка аппроксимации и изложены ее основные свойства. В разделе 4 приведены результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующих динамику базового варианта задачи, включающую как гладкий этап решения, так и формирование и движение разрывов. Дополнительно описаны расчеты, иллюстрирующие изменения базового решения в зависимости от вариаций параметров начального локального возмущения плотности. В заключении систематизированы результаты проведенных исследований.

2. Постановка задачи. Базовая плоская одномерная модель самогравитирующего газа основана на системе уравнений Эйлера–Пуассона:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \quad \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2) + \partial_x p + \rho \partial_x \varphi = 0, \quad \partial_{xx} \varphi = 4\pi G \rho, \quad (1)$$

где неизвестными являются плотность ρ , давление p , гравитационный потенциал φ и скорость u ; G — гравитационная постоянная. Стандартный способ замыкания системы — задание уравнения состояния, которое связывает давление с плотностью. Далее нас будет интересовать так называемый изотермический случай $p = c^2 \rho$, где c — скорость звука. Такую модель самогравитирующего газа часто называют *моделью Ларсона–Пенстона* (см., например, [22] и цитируемую там литературу).

Для перехода к безразмерной форме уравнений введем параметр Джинса [23] $\lambda_J = (\pi c^2 / (\rho_0 G))^{1/2}$, где ρ_0 — плотность невозмущенной среды, и определим безразмерные величины

$$\hat{x} = \frac{x}{\lambda_J}, \quad \hat{t} = \frac{t}{\lambda_J c}, \quad \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \hat{u} = \frac{u}{c}, \quad \hat{\varphi} = \frac{\varphi}{c^2},$$

тогда систему (1) можно представить в следующем виде (после опускания символа “крышка” у всех переменных):

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \quad \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2) + \partial_x \rho + \rho \partial_x \varphi = 0, \quad \partial_x \varphi = 4\pi^2 \int_0^x \rho(s, t) ds. \quad (2)$$

Рассмотрим плоский слой газа толщины $2X$, когда вектор нормали к слою направлен вдоль оси x , а центр слоя расположен в точке $x = 0$ (в общем случае газ может заполнять все пространство, тогда слой считается бесконечным). Качественные особенности динамики газа в зависимости от величины отношения X/λ_J хорошо известны (см., например, [20]). Нас интересует ситуация, наиболее сложная для аналитических исследований ($X \approx \lambda_J$), т.е. когда возможны все случаи: разлет, сжатие, гравитационное равновесие. Поэтому значение X можно считать параметром постановки задачи.

Обсудим начальные и граничные условия, определяющие искомое решение системы (2) для локального возмущения гравитационного равновесия. Хорошо известно, что если газ находится в гравитационном равновесии ($u_b(x) \equiv 0$), то для плотности справедлива аналитическая формула [24]

$$\rho_b(x) = \frac{1}{\cosh^2(\pi\sqrt{2}x)}. \quad (3)$$

Будем использовать это равновесное решение ($u_b(x), \rho_b(x)$) в качестве фонового.

Предположим, что в окрестности прямой $x = 0$ в начальный момент времени наблюдения $t = 0$ частицы газа были выведены из положения равновесия возмущением следующего вида:

$$\rho_{\text{pert}}(x) = -\alpha \exp\left\{-2\frac{y^2}{\rho_*^2}\right\} \left[1 - 4\frac{y^2}{\rho_*^2}\right], \quad y = \pi\sqrt{2}x. \quad (4)$$

Подобное возмущение хорошо известно в физике плазмы [21]. Оно естественным образом моделирует прохождение мощного остророфокусированного лазерного импульса сквозь достаточно широкий сгусток плазмы, когда импульс имеет гауссово распределение по пространству. Тогда параметры a_* и ρ_* ($\alpha = (a_*/\rho_*)^2$) определяют интенсивность и ширину импульса. Отметим, что возмущение (4) не изменяет исходное количество газа, а влияет только на взаимное расположение его частиц. В качестве иллюстраций на рис. 1 для слоя с $X = 1$ приведены возмущение $\rho_{\text{pert}}(x)$ с параметрами $\alpha = 0.3, \rho_* = 1.0$ (рис. 1 а), равновесная плотность $\rho_b(x)$ (3) и возмущенное состояние $\rho_b(x) + \rho_{\text{pert}}(x)$ (рис. 1 б).

Для завершения постановки задачи рассмотрим половину слоя ($0 \leq x \leq X$) и соответствующие граничные условия:

а) на оси симметрии слоя

$$u(x = 0, t) = 0, \quad \partial_x \rho(x = 0, t) = 0, \quad (5)$$

б) на достаточном удалении от оси симметрии (при $x = X$)

$$u(x = X, t) = 0, \quad \rho(x = X, t) = \rho_b(X). \quad (6)$$

Здесь имеется в виду, что заданное локальное возмущение с $\rho_* < X$ в течение рассматриваемого интервала времени не успело достигнуть зафиксированной для наблюдения границы $x = X$. Иными словами, в процессе наблюдения все отклонения от равновесного решения должны быть сосредоточены в области $[0, X]$. Конечно, при необходимости длительных наблюдений параметр X можно и нужно увеличивать.

Обратим внимание, что первоочередной интерес представляет решение, когда относительно прямой $x = 0$ плотность $\rho(x, t)$ является четной функцией, а скорость $u(x, t)$ — нечетной. Причем подобные свойства сохраняются во времени, если начальные данные таковыми обладают.

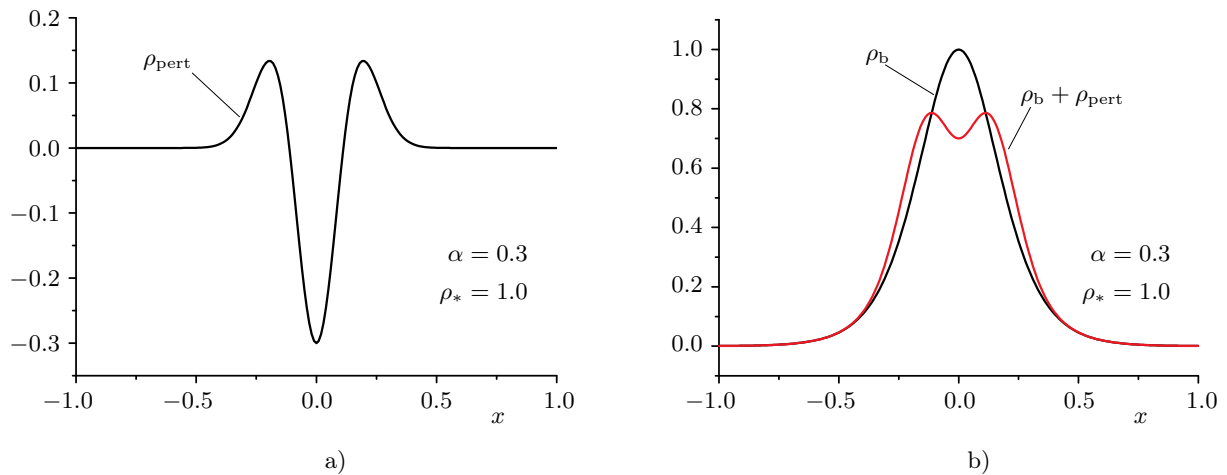


Рис. 1. Равновесное и возмущенное состояния самогравитирующего газа: а) возмущение $\rho_{\text{pert}}(x)$; б) равновесная плотность $\rho_b(x)$ и возмущенное равновесие $\rho_b(x) + \rho_{\text{pert}}(x)$

Fig. 1. Equilibrium and perturbed states of a self-gravitating gas: а) perturbation $\rho_{\text{pert}}(x)$; б) equilibrium density $\rho_b(x)$ and perturbed equilibrium $\rho_b(x) + \rho_{\text{pert}}(x)$

В завершение раздела приведем уравнение, описывающее взаимосвязь гравитационной и кинетической энергий (см. также [25, 26]),

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho u^2 - \frac{1}{8\pi^2} [\partial_x \varphi]^2 \right) + \partial_x \left(\frac{1}{2} \rho u^3 \right) + u \partial_x \rho = 0, \quad (7)$$

из которого после введения обозначения

$$En_{\text{tot}}(t) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \rho u^2 - \frac{1}{8\pi^2} [\partial_x \varphi]^2 \right) dx$$

следует закон трансформации энергии в рассматриваемом изотермическом случае

$$\Delta \equiv En_{\text{tot}}(t) - En_{\text{tot}}(0) + \int_0^t \int_0^\infty u \partial_x \rho \, dx dt = 0. \quad (8)$$

Отметим, что справедливость соотношений (7) и (8) имеет место до тех пор, пока решение (2) обладает достаточной гладкостью (имеет непрерывно дифференцируемые производные).

3. Вычислительные алгоритмы. При моделировании эффектов самогравитации типичным свойством решения является заметное увеличение модуля скорости во времени, что существенно влияет на устойчивость явных разностных схем, традиционно использующихся в газодинамических расчетах [27]. Поэтому в настоящей работе акцент делается на применение неявных разностных схем, устойчивость которых практически не зависит от указанного свойства. При этом важную роль играет использование схем различного порядка аппроксимации, что порождает более убедительную аргументацию структуры изучаемого решения.

3.1. Неявная схема второго порядка аппроксимации. В качестве основного метода для нахождения приближенного решения задачи использовалась неявная схема типа Мак-Кормака [28], обобщающая хорошо известную явную схему Мак-Кормака [29]. Для полноты изложения опишем расчетный алгоритм.

Приведем систему (2) к удобной в рассматриваемом случае недивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(u) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}, u) + B \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где оператор $A(u)$ является (2×2) -матрицей с элементами $a_{11} = a_{22} = u(x, t)$, $a_{21} = 1$, $a_{12} = 0$; B — (2×2) -матрица с единственным неотрицательным элементом $b_{22} = \mu \geq 0$ (остальные — нулевые!); $\mathbf{U} = (\rho, \rho u)^T$,

$\mathbf{S}(\mathbf{U}, u) = - \left(\rho \partial_x u, \rho u \partial_x u + 4\pi^2 \rho \int_0^x \rho(s, t) ds \right)^T$ – вектор-функции, рассматриваемые в первом квадранте $\{(x, t) : x \geq 0, t \geq 0\}$.

Определим дискретизацию независимых переменных с помощью постоянных параметров τ и h так, что

$$t^n = n\tau, \quad n \geq 0, \quad x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = X,$$

и будем обозначать приближенное значение зависимой переменной $\mathbf{U}(x, t)$ в узле сетки (x_i, t^n) через \mathbf{U}_i^n .

Введем полезные обозначения для операторов разностей “вперед” D^+ и “назад” D^- , не делая различия между векторным и скалярным аргументом:

$$D^+ \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i, \quad D^- \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1}.$$

Запишем неявную схему типа Мак-Кормака [28] в традиционной форме “предиктор–корректор”.

1. Этап “предиктор” с результатом \mathbf{U}_i^p :

положим $u_{i+1/2}^n = (u_{i+1}^n + u_i^n) / 2$, определим матрицу $C_{i+1/2}^n = A(|u_{i+1/2}^n|) + \frac{2}{h}B$ и последовательно вычислим

$$\Delta \mathbf{U}_i^n = -\frac{\tau}{h} A(u_{i+1/2}^n) D^+ \mathbf{U}_i^n + \frac{\tau}{h^2} B D^+ D^- \mathbf{U}_i^n + \tau \mathbf{S}_i^n, \\ \left(I - \lambda \frac{\tau}{h} C_{i+1/2}^n D^+ \right) \delta \mathbf{U}_i^n = \Delta \mathbf{U}_i^n, \quad \mathbf{U}_i^p = \mathbf{U}_i^n + \delta \mathbf{U}_i^n. \quad (10)$$

2. Этап “корректор” с результатом \mathbf{U}_i^c :

положим $u_i^p = (\rho u)_i^p / \rho_i^p$, $u_{i-1/2}^p = (u_i^p + u_{i-1}^p) / 2$, определим матрицу $C_{i-1/2}^p = A(|u_{i-1/2}^p|) + \frac{2}{h}B$ и последовательно вычислим

$$\Delta \mathbf{U}_i^p = -\frac{\tau}{h} A(u_{i-1/2}^p) D^- \mathbf{U}_i^p + \frac{\tau}{h^2} B D^- D^+ \mathbf{U}_i^p + \tau \mathbf{S}_i^p, \\ \left(I + \lambda \frac{\tau}{h} C_{i-1/2}^p D^- \right) \delta \mathbf{U}_i^p = \Delta \mathbf{U}_i^p, \quad \mathbf{U}_i^c = \mathbf{U}_i^p + \delta \mathbf{U}_i^p. \quad (11)$$

В формулах (10), (11) верхний индекс p (или c) обозначает шаг предиктор (или корректор) или n – временной слой t^n , λ – постоянный параметр схемы, который будет определен ниже.

Окончательные формулы, формирующие решение на следующем временном слое с номером $(n + 1)$, имеют вид:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = [\mathbf{U}_i^p + \mathbf{U}_i^c] / 2, \quad u_i^{n+1} = (\rho u)_i^{n+1} / \rho_i^{n+1}.$$

Сделаем замечание о пространственной аппроксимации вектора $\mathbf{S}(\mathbf{U}, u)$. Рассмотрим сначала первое уравнение системы (9)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (12)$$

На этапе “предиктор” нам требуются пространственные разности “вперед”, поэтому воспользуемся известными соотношениями для произвольных сеточных функций y_i и z_i [30]:

$$D^+(yz)_i = y_i D^+ z_i + z_{i+1} D^+ y_i = y_{i+1} D^+ z_i + z_i D^+ y_i,$$

откуда следует

$$D^+(yz)_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} D^+ z_i + \frac{z_i + z_{i+1}}{2} D^+ y_i. \quad (13)$$

Применим (13) для аппроксимации выражения $\partial_x(\rho u)$, получим

$$\frac{1}{h} [u_{i+1/2} D^+ \rho_i + \rho_{i+1/2} D^+ u_i], \quad (14)$$

где обозначено $\rho_{i+1/2} = (\rho_{i+1} + \rho_i) / 2$. Так как первое слагаемое в (14) аппроксимирует $u \partial_x \rho$ в (12), то второе будет использоваться для аппроксимации выражения $\rho \partial_x u$ в первой компоненте вектора $\mathbf{S}(\mathbf{U}, u)$.



Аналогичный прием используется на этапе “корректор” с разностями “назад”. Сначала из известных соотношений [30]

$$D^-(yz)_i = y_{i-1}D^-z_i + z_iD^-y_i = y_iD^-z_i + z_{i-1}D^-y_i$$

получим

$$D^-(yz)_i = \frac{y_i + y_{i-1}}{2}D^-z_i + \frac{z_i + z_{i-1}}{2}D^-y_i,$$

что порождает требуемую аппроксимацию

$$\frac{1}{h} [u_{i-1/2}D^-\rho_i + \rho_{i-1/2}D^-u_i].$$

Далее следует распределение полученных слагаемых между $u\partial_x\rho$ и первой компонентой вектора $\mathbf{S}(\mathbf{U}, u)$.

Со вторым уравнением системы (9) поступим точно так же, т.е. выражение $\partial_x(\rho u^2)$ представим в виде суммы $u\partial_x(\rho u) + \rho u\partial_x u$ с последующим применением полученных аппроксимаций с разностями вперед на этапе “предиктор” и разностями “назад” на этапе “корректор”. Обратим внимание, что такой способ аппроксимации трансформирует неявную схему Мак-Кормака при $\lambda = 0$ в классическую явную схему Мак-Кормака [29] для дивергентной формы записи производных в исходных уравнениях (9). Для конкретизации уточним, что в неявной схеме Мак-Кормака используется значение $\lambda = 1$, а детальное тестирование схемы на уравнениях Навье–Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного газа в пространственно двумерной постановке проводилось в [28, 31]; сравнение эффективности явной и неявной схем Мак-Кормака приведено в [31].

Сделаем замечание о дополнительном слагаемом BU_{xx} в системе (9), которое отсутствует в исходных уравнениях (2). Его смысл заключается во введении искусственной вязкости вида $\mu(\rho u)_{xx}$ во второе уравнение системы (2). Дело в том, что разностные схемы типа Мак-Кормака (как явная, так и неявная) на разрывах порождают ложные нефизичные осцилляции, поэтому в [31] было замечено, что введение малой искусственной вязкости с параметром μ порядка h практически не изменяет гладкую часть решения, зато монотонизирует его в окрестности разрывов. Поэтому в нашем случае коэффициент вязкости выбирался наименьшим (по порядку), но достаточным, чтобы исчезали ложные осцилляции в окрестности разрыва. Также следует обратить внимание, что неявная схема Мак-Кормака с вязкостью различных типов хорошо зарекомендовала себя на задачах, описываемых уравнениями Эйлера и близкими к ним [32, 33]. В этих же работах можно найти теоретические детали обоснования схемы на примере простейшего уравнения конвекции–диффузии.

3.2. Неявная схема первого порядка аппроксимации. Учитывая новизну постановки задачи и желательность дополнительной верификации качественной структуры решения, рассмотрим менее точный метод, основанный на идеях статьи [34]. Оригинальная версия метода, ориентированная на моделирование нестационарных течений баротропного газа, не содержащая искусственной вязкости и требующая итераций на каждом шаге по времени, сохраняла неотрицательность сеточной функции плотности и массу газа, а также обладала специфической аппроксимацией конвективных членов “противопоточного” (upwind) типа. Тестирование схемы вместе с дополнительным теоретическим анализом проводилось в [35] для задачи в цилиндрической области с переменным во времени сечением.

В наших расчетах применялся безытерационный вариант схемы, который также использует смещенные сетки и является неявным, однако реализуется на каждом временном слое последовательным решением двух систем линейных уравнений с трехдиагональными матрицами. Этот вариант схемы также автоматически сохраняет массу и неотрицательность плотности, поскольку конвективные слагаемые уравнения неразрывности аппроксимируются оригинальным способом, предложенным в [34]. Отметим, что в процессе расчетов выяснилось, что схема не обладает свойством монотонности, поэтому в дискретный аналог уравнения сохранения импульса дополнительно вводилась искусственная вязкость.

Опишем вычислительный алгоритм подробно. На каждом временном слое n (напомним, что $t^n = n\tau$, $n \geq 0$) применяются две пространственные сетки: первая с целыми узлами $x_i = ih$, в которых определены приближенные значения функции скорости u_i^n , вторая с полуцелыми — $x_{i+1/2} = (i + 1/2)h$, в которых определены приближенные значения функции плотности ρ_i^n . Заметим, что в данном случае областью решения задачи являлся полный газовый слой ($|x| \leq X$), а не его половина, как в предыдущем разделе. Введем полезные обозначения:

$$P(A) = \frac{A + |A|}{2}, \quad M(A) = \frac{A - |A|}{2}.$$

На первом этапе каждого временного шага, используя аппроксимацию уравнения неразрывности, методом прогонки [30] вычисляются значения плотности ρ_i^{n+1} :

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + \frac{1}{h} [M(u_{i+1}^n)\rho_{i+1}^{n+1} + (P(u_{i+1}^n) - M(u_i^n))\rho_i^{n+1} - P(u_i^n)\rho_{i-1}^{n+1}] = 0.$$

Начальные условия для плотности определяются, как в схеме типа Мак-Кормака, из условий непрерывной постановки (3)–(6), а граничных условий не требуется, если $u(X) = u(-X) = 0$.

На втором этапе также с помощью метода прогонки определяются значения u_i^{n+1} из системы разностных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho_{i-1}^{n+1} + \rho_i^{n+1})u_i^{n+1} - (\rho_{i-1}^n + \rho_i^n)u_i^n}{2\tau} - \frac{P(u_{i-1}^n)\rho_{i-2}^{n+1} + P(u_i^n)\rho_{i-1}^{n+1}}{2h} u_{i-1}^{n+1} + \\ & + \frac{[P(u_i^n) - M(u_{i-1}^n)]\rho_{i-1}^{n+1} + [P(u_{i+1}^n) - M(u_i^n)]\rho_i^{n+1}}{2h} u_i^{n+1} + \frac{M(u_i^n)\rho_i^{n+1} + M(u_{i+1}^n)\rho_{i+1}^{n+1}}{2h} u_{i+1}^{n+1} + \\ & + \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_{i-1}^{n+1}}{h} + \frac{\rho_i^{n+1} + \rho_{i-1}^{n+1}}{2} S_i^{n+1} = \mu \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2}. \end{aligned}$$

Здесь S_i^{n+1} — дискретный аналог градиента гравитационного потенциала $\partial_x \varphi = 4\pi^2 \int_0^x \rho(s, t) ds$ —

вычисляется следующим образом:

$$4\pi^2 h \sum_{k=0}^{i+1} \frac{\rho_k^{n+1} + \rho_{k-1}^{n+1}}{2} \text{ при } i < 0; \quad 0 \text{ при } i = 0; \quad 4\pi^2 h \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\rho_k^{n+1} + \rho_{k+1}^{n+1}}{2} \text{ при } i > 0.$$

Напомним, что схема имеет первый порядок аппроксимации, т.е. $O(\tau + h)$, несмотря на использование смещенных сеток, что обычно приводит к повышению порядка аппроксимации по пространству [30].

Заметим, что предложенная схема не вполне корректна при малых значениях плотности, поэтому скорость полагалась равной нулю в узле i , если $(\rho_{i-1}^{n+1} + \rho_i^{n+1}) < \delta = O(h^2)$ (пример — $\delta = 10^{-7}$). Как уже упоминалось выше, для дополнительной регуляризации задачи на разрывах использовалась искусственная вязкость с достаточно малым параметром $\mu \in [h^3, h^2]$ (пример — $\mu = 1.1 \cdot 10^{-9}$). Обратим внимание, что в схеме первого порядка уже присутствует схемная вязкость с коэффициентом порядка h , поэтому в данном случае коэффициент искусственной вязкости не столь значителен.

В целях постоянного контроля за решением расчеты по обеим неявным разностным схемам проводились при одинаковых пространственных шагах и одинаковых шагах по времени. Сами сеточные параметры выбирались из условия, что их одновременное уменьшение в два раза не приводило к значительному изменению решения (критерий “сходимости по сетке” полагался менее или равным примерно пяти процентам в равномерной метрике).

В завершение раздела отметим, что на гладком решении величина Δ из закона трансформации энергии (8) изменялась в полном соответствии с порядками аппроксимации схем: $\Delta_2(t) = O(\tau^2 + h^2)$ — для схемы типа Мак-Кормака и $\Delta_1(t) = O(\tau + h)$ — для схемы, подобной [34]. Сами иллюстрации преобразования гравитационной энергии в кинетическую для типичного расчетного варианта приведены на рис. 2. Устойчивость обеих схем также не вызывала сомнений при расчетах. Подчеркнем, что о консервативных свойствах используемых схем можно говорить только при сохранении решением гладкости. Например, наличие в (8) двойного интеграла немедленно приводит к вычислительным ошибкам на разрывах, не позволяющим что-либо гарантировать.

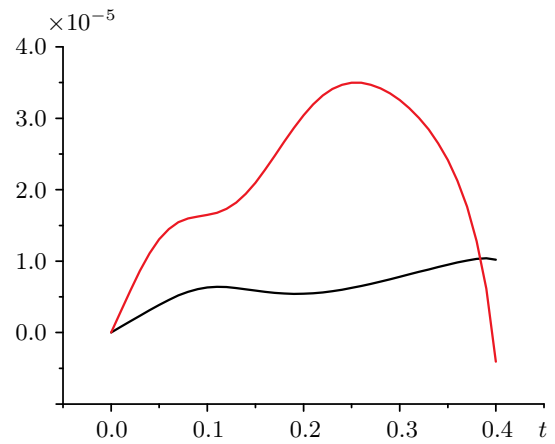


Рис. 2. Трансформация гравитационной энергии в кинетическую по формуле (8): $\Delta_1(t)$ для схемы первого порядка, $\Delta_2(t)$ для схемы второго порядка

Fig. 2. Transformation of gravitational energy into kinetic energy according to the formula (8): $\Delta_1(t)$ for the first-order scheme, $\Delta_2(t)$ for the second-order scheme



4. Вычислительные эксперименты. Рассмотрим подробно динамику газа для параметров локального возмущения $\alpha = 0.3, \rho_* = 1.0$. В силу симметрии постановки далее будем анализировать только подобласть $x \geq 0$. Отметим, что в представленных ниже расчетах применялись все варианты схемы Мак-Кормака (явная, неявная, с искусственной вязкостью) с характерными значениями сеточных параметров $h = 10^{-3}, \tau \approx h, \mu \approx h$. Эта схема была основным инструментом при численном исследовании. При этом коэффициент вязкости выбирался наименьшим (по порядку!), но достаточным, чтобы исчезали ложные осцилляции в окрестности разрыва. В свою очередь, схема первого порядка аппроксимации использовалась исключительно в целях воспроизведения уже полученных иллюстраций; выбор в ней сеточных и вспомогательных параметров (типа искусственной вязкости) диктовался этим соображением.

4.1. Базовый вариант динамики газа. Рассмотрим сначала рис. 1 б. Возмущенное начальное состояние имеет одну точку (с положительной абсциссой) пересечения с равновесным состоянием плотности при $x \approx 0.2$. Назовем эту точку V_1 -точкой и будем следить за ее перемещением. В этой точке (или очень близко к ней) скорость равна нулю, т.е. имеет место равновесие самогравитирующего газа. При $x \geq 0.2$ больше пересечений нет, так как возмущенное состояние строго больше равновесного.

Рассмотрим рис. 3, иллюстрирующий начальное движение газа. Здесь расчеты по явной и неявной схемам не отличаются; использование искусственной вязкости не требуется. Наблюдается одновременное развитие двух процессов: сжатие газа на оси симметрии слоя и его разрежение (разлет) на некотором удалении от оси при $x \approx 0.25$. Особенно это наглядно на графиках скорости: при $0 < x < 0.25$ скорость неположительна, при $x > 0.25$ скорость неотрицательна. При этом V_1 -точка перемещается от оси симметрии, немного ускоряясь. Отмеченное движение вызвано превышением сил, вызывающих разлет газа (давлением), над силами, обеспечивающих сжатие газа (гравитацией). Формально подобная динамика газа следует из того, что фоновая плотность, гарантирующая гравитационное равновесие, меньше, чем плотность, инициирующая движение. Напомним, что в рассматриваемой модели давление газа пропорционально его плотности, а в безразмерном виде они совпадают. В это же время слева от V_1 -точки скорость отрицательна, что означает движение частиц газа к оси симметрии. Это объясняется синхронизацией сил гравитации и давления в одном направлении: начальный провал плотности на оси требует компенсации. Напомним, что равновесное значение плотности при $x = 0$ равно единице, но частицы газа движутся с ускорением, поэтому проскакивают положение равновесия, т.е. значение плотности превосходит единицу. На рис. 3 а видно, что при $t = 0.2$ значение плотности на оси примерно равно 1.12. В этот же момент времени координата V_1 -точки примерно равна 0.3 (рис. 3 б).

Рассмотрим рис. 4, иллюстрирующий движение газа после достижения максимального значения плотности на оси симметрии. Теперь силы давления действуют от оси симметрии, поэтому скорость рядом с ней становится положительной. Если посмотреть на распределения функций при $t = 0.3$, легко заметить, что плотность начала убывать на оси и одновременно сформировалась вторая точка нулевой скорости. Назовем эту точку V_2 -точкой. Таким образом, сформировались три зоны скоростей, разделенных точками нулевой скорости: вблизи оси скорость положительна, далее она отрицательна, затем опять меняет знак

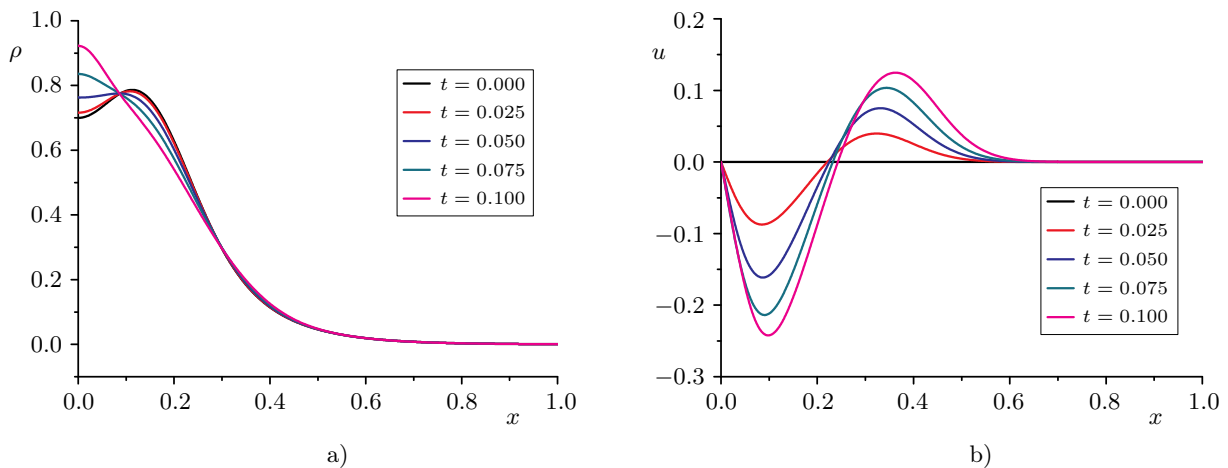


Рис. 3. Начальная динамика при $\alpha = 0.3, \rho_* = 1$ — гладкое решение: а) плотность $\rho(x, t)$; б) скорость $u(x, t)$
 Fig. 3. Initial dynamics at $\alpha = 0.3, \rho_* = 1$ — smooth solution: а) density $\rho(x, t)$; б) velocity $u(x, t)$

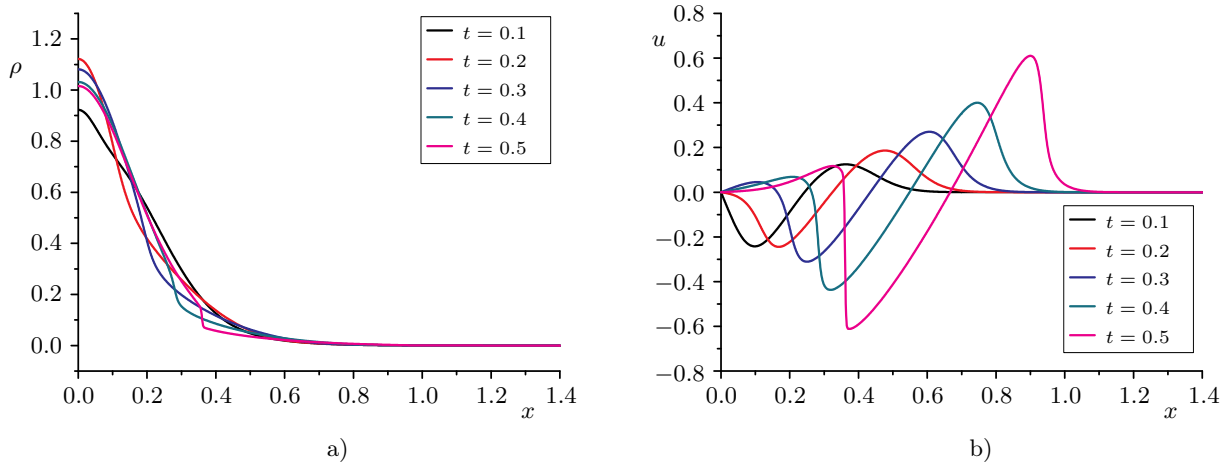


Рис. 4. Дальнейшая динамика при $\alpha = 0.3$, $\rho_* = 1$ — формирование разрывов: а) плотность $\rho(x, t)$; б) скорость $u(x, t)$

Fig. 4. Further dynamics at $\alpha = 0.3$, $\rho_* = 1$ — discontinuity formation: а) density $\rho(x, t)$; б) velocity $u(x, t)$

и становится положительной. При этом пока решение остается гладким, поэтому здесь расчеты по явной и неявной схемам не отличаются; использование искусственной вязкости также пока не требуется.

Однако на временном отрезке $0.4 \leq t \leq 0.5$ ситуация качественно меняется — формируется разрыв (градиентная катастрофа). В точке $x \approx 0.35$ одновременно скачком изменяются и плотность, и скорость. Скачок плотности невелик: с 0.2 примерно до 0.1 (убывание), скачок скорости более значим: с 0.3 примерно до -0.6 (также убывание, но с изменением знака). Заметим, что V_2 -точка теперь совпадает с точкой разрыва, поэтому между V_1 - и V_2 -точками скорость отрицательна. Также обратим внимание, что динамика газа порождает две градиентные катастрофы (рис. 4 б). При этом одна катастрофа уже реализовалась при $t = 0.5$, а вторая реализуется в самое ближайшее время.

Схема Мак-Кормака обладает известным свойством: она порождает осцилляции на разрывном решении, что можно наблюдать при $x \approx 0.45$. При этом на рис. 4 а разрыв у плотности при $x \approx 0.45$ заметен, а в районе $x \approx 1$ (где формируется второй разрыв скорости) — практически нет. Наличие осцилляций позволяет надежно отслеживать динамику перемещения разрывов, однако использование искусственной вязкости с $\mu = h$ делает осцилляции практически незаметными. Это дает возможность далее приводить результаты расчетов, когда функции изображаются монотонными в окрестности разрывов. Все рисунки, содержащие разрывы функций, получены с использованием искусственной вязкости.

Рассмотрим рис. 5, иллюстрирующий движение газа после наступления первой градиентной катастрофы. В момент $t = 0.6$ на рис. 5 б наблюдаем уже две градиентных катастрофы, причем хорошо заметно, что скачки скорости после формирования никуда не исчезают, а движутся от оси симметрии. При этом V_2 -точка, как и V_1 -точка, перемещается примерно с постоянной скоростью, а скорость дальнего от оси разрыва увеличивается. Одновременно с этим растут величины обоих скачков скорости, а единственный заметный скачок плотности затухает. Из представленных иллюстраций весьма правдоподобно следует, что распределение функции плотности позади разрывов стремится к гравитационному равновесию, хотя про скорость того же сказать нельзя.

Иллюстрация качества представленного выше решения приведена на рис. 6. В момент времени $t = 0.9$ (рис. 5 б) рассматриваются окрестности разрывов функции скорости: $x \in [0.7, 0.73]$ и $x \in [1.8, 1.9]$. В них демонстрируются решения, полученные с помощью трех разностных схем: решение неявной схемы второго порядка обозначено черным цветом, явной схемы второго порядка — красным, неявной схемы второго порядка — синим. Сеточные значения при этом выбирались одинаковыми: $h = 10^{-3}$, $\tau = h/10$, а коэффициенты искусственной вязкости — различными (как это указывалось выше). Результат сравнения схем следует оценивать как положительный, так как не только величины, но и скорости перемещения разрывов достаточно близки. В частности, полученные графики визуально неразличимы при их рассмотрении в масштабе, используемом на рис. 5 б. При этом следует подчеркнуть, что для сравнения решений бы-

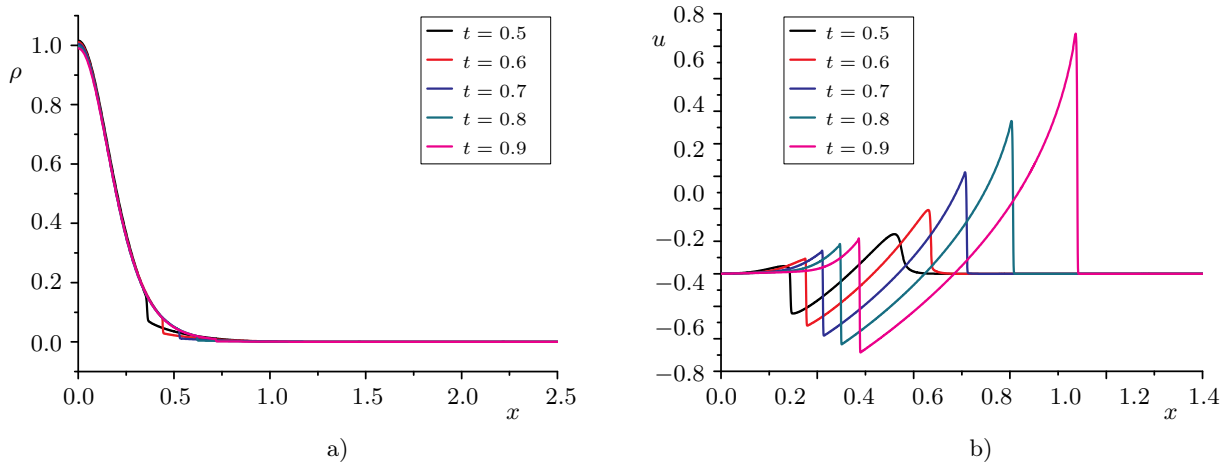


Рис. 5. Дальнейшая динамика при $\alpha = 0.3$, $\rho_* = 1$ — движение разрывов с учетом вязкости: а) плотность $\rho(x, t)$; б) скорость $u(x, t)$

Fig. 5. Further dynamics at $\alpha = 0.3$, $\rho_* = 1$ — movement of fractures taking into account viscosity: а) density $\rho(x, t)$; б) velocity $u(x, t)$

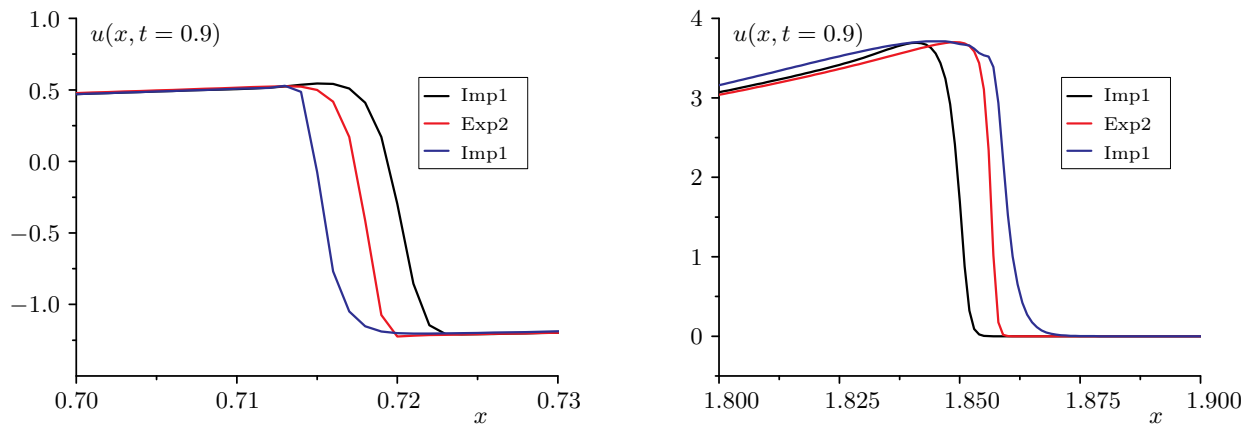


Рис. 6. Сравнение решений разностных схем в окрестности разрывов при $t = 0.9$: неявная схема второго порядка — черный цвет, явная схема второго порядка — красный цвет, неявная схема первого порядка — синий цвет

Fig. 6. Comparison of solutions of difference schemes in the vicinity of discontinuities at $t = 0.9$: implicit scheme of the 2nd order — black, explicit scheme of the 2nd order — red, implicit scheme of the 1st order — blue

ли выбраны наиболее “жесткие” пространственно-временные диапазоны, так как в области достаточной гладкости различия решений обнаружить весьма затруднительно.

Вернемся к аргументации в пользу неявных алгоритмов расчета подобных решений. На рис. 5 б легко заметить, что скачки скорости на разрывах монотонно растут. Причем этот рост можно предположить экспоненциальным с учетом известных соотношений Рэнкина–Гюгонио. Отсюда следует, что устойчивость явных разностных схем (с условием типа Куранта) сильно локализована во времени, когда используемые неявные схемы подобных ограничений не имеют. Вычислительные эксперименты полностью подтверждают теоретические оценки. Рассмотрим, например, сеточные параметры для получения рис. 6. Если увеличить шаг по времени τ в 2.5 раза, то численные решения обеих неявных схем практически не изменятся, а решение явной схемы станет недоступным из-за ограничения устойчивости. Вычислительные ошибки сделают решение явной схемы Мак-Кормака абсурдным к моменту времени $t \approx 0.83$. Отметим, что последующее увеличение шага по времени (при сохранении остальных значений параметров) приведет к некоторому искажению решений обеих неявных схем, что связано, в первую очередь, с ухудшением аппроксимации. При этом время потери устойчивости явной схемы будет монотонно убывать, например, при

$\tau = h/2$ численное решение разрушится уже при $t \approx 0.3$. Иными словами, различие между явной и неявной схемами Мак-Кормака носит не количественный, а качественный характер: часть искомых сеточных решений просто недоступна при использовании явной схемы. При численном анализе новых постановок задач (а не проведении тестовых расчетов!) это обстоятельство весьма существенно.

4.2. Зависимость решения от параметров начального возмущения. Зафиксируем значение $\rho_* = 1$ и рассмотрим изменение решения в зависимости от изменения α . Для удобства сравнения зафиксируем время наблюдения за решением — положим $t = 0.5$. В этот момент градиентные катастрофы или уже заметны, или скоро станут заметными.

Анализ базового варианта (на рис. 7 отмечен черным цветом) показал, что при $t = 0.5$ в точке $x \approx 0.35$ одновременно скачком изменяются и плотность, и скорость; в свою очередь, второй разрыв еще не сформировался. Легко заметить, что уменьшение α (рис. 7, красный цвет) приводит к более медленному процессу формирования указанных градиентных катастроф, а увеличение α (рис. 7, синий цвет) — к более быстрому. При этом качественный характер решения остается неизменным по сравнению с базовым вариантом.

Теперь поступим наоборот: зафиксируем значение $\alpha_* = 0.3$ и рассмотрим изменение решения в зависимости от изменения ρ_* . Время наблюдения за решением оставим, как на рис. 7.

Здесь при уменьшении ρ_* (рис. 8, красный цвет) наблюдается ускорение формирования ближайшего к $x = 0$ разрыва, хотя формирование дальнего от оси симметрии разрыва практически не меняется по сравнению с базовым вариантом на рис. 4.

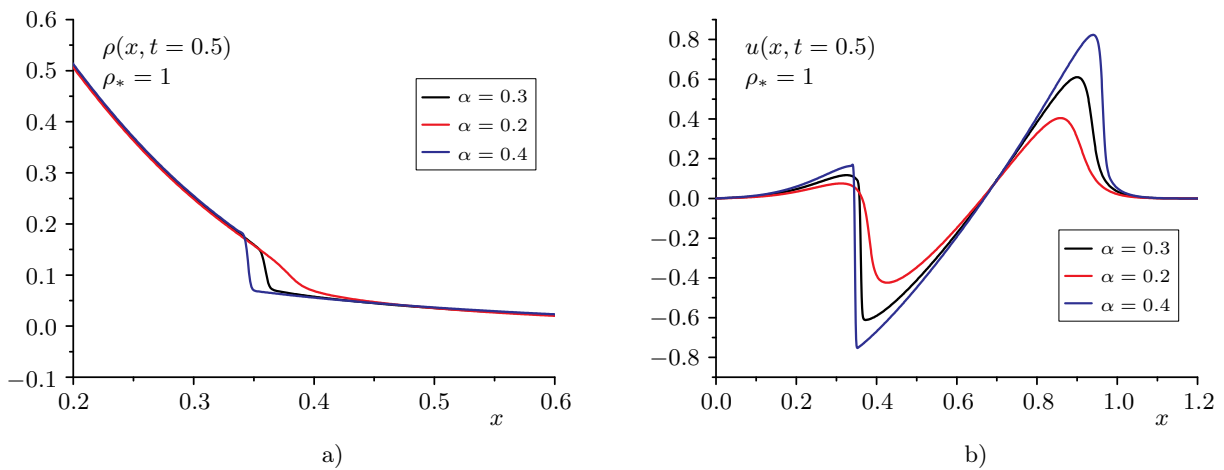


Рис. 7. Сравнение решений при $\rho_* = 1$: а) плотность $\rho(x, t = 0.5)$; б) скорость $u(x, t = 0.5)$

Fig. 7. Comparison of solutions for $\rho_* = 1$: а) density $\rho(x, t = 0.5)$; б) velocity $u(x, t = 0.5)$

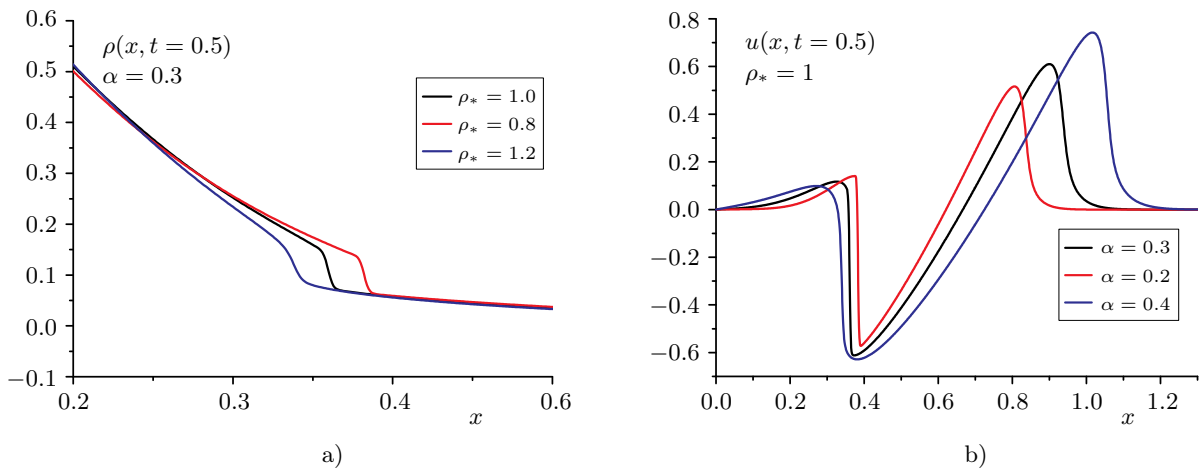


Рис. 8. Сравнение решений при $\alpha = 0.3$: а) плотность $\rho(x, t = 0.5)$; б) скорость $u(x, t = 0.5)$

Fig. 8. Comparison of solutions for $\alpha = 0.3$: а) density $\rho(x, t = 0.5)$; б) velocity $u(x, t = 0.5)$



В свою очередь, увеличение ρ_* (рис. 8, синий цвет) также влияет только на “ближний” разрыв, оставляя без изменения “дальний”. Однако в этом случае наблюдается уменьшение самого значения скорости перед разрывом, что приводит к формальному уменьшению величины скачка.

5. Заключение. В работе численно анализируется динамика локального возмущения плотности плоского пространственно одномерного газового слоя. С этой целью построены две неявные разностные схемы, имеющие более слабые ограничения на устойчивость по сравнению с традиционно используемыми для самогравитирующего газа явными схемами. Схемы обладают различными порядками аппроксимации (на гладких решениях), но обе имеют безытерационный характер реализации, что существенно увеличивает их вычислительную эффективность. Применение новых неявных методов было главной целью работы.

Обратим внимание, что при их реализации используется метод прогонки: в явной форме для схемы первого порядка или в более замаскированной — для схемы второго порядка. Строгая последовательность вычислений, возникающая из-за рекуррентной зависимости, препятствует использованию параллельных архитектур (CPU с множеством ядер, GPU, кластеры и др.). Поэтому при необходимости прогонку можно заменить альтернативными алгоритмами реализации, например циклической редукцией (Cyclic Reduction, CR), параллельной циклической редукцией (PCR), методом встречных прогонок, методом разделения (Divide and Conquer / Matrix Splitting) и т.п.

Представленные алгоритмы разработаны, в первую очередь, для нахождения достаточно гладких решений. С их помощью установлено, что решение заведомо теряет гладкость, но в работе мы не претендуем на полностью корректное описание движения разрывов. Действительно, хорошо известно, что разрывное решение зависит от выбранной консервативной формы постановки, причем физически естественная форма выражает сохранение полной массы газа, его импульса и энергии. Проверка показала, что предложенные разностные аппроксимации сохраняют массу, импульс и энергию в пределах точности аппроксимации и до тех пор, пока решение имеет достаточную гладкость. Это означает, что движение сформировавшихся разрывов в какой-то степени может быть искажено и для его восстановления следует использовать полностью консервативные схемы. Такая работа, необходимая для более детального исследования движения сформировавшихся структур, относится к нашим дальнейшим планам. В настоящий момент авторов вполне устраивает надежность качественной структуры решения.

Результаты работы могут быть распространены на постановки задач, обладающих сферической симметрией, а также учитывающих показатель γ в баротропном уравнении состояния $p = A\rho^\gamma$. Подобные постановки играют важную роль при моделировании реальных астрофизических процессов, и представленные расчеты могут быть интересны специалистам в соответствующей области.

Список литературы

1. Chandrasekhar S. An introduction to the study of stellar structure. Chicago: University of Chicago Press, 1939.
2. Lieb E.H., Yau H.-T. The Chandrasekhar theory of stellar collapse as the limit of quantum mechanics // Commun. Math. Phys. 1987. **112**. 147–174. doi [10.1007/BF01217684](https://doi.org/10.1007/BF01217684).
3. Hadžić M. Star dynamics: collapse vs. expansion // Quart. Appl. Math. 2023. **81**. 329–365. doi [10.1090/qam/1638](https://doi.org/10.1090/qam/1638).
4. Hartmann L. Accretion processes in star formation. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
5. Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. **181**, N 3. 375–389. doi [10.1093/mnras/181.3.375](https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375).
6. Liu G.R., Liu M.B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method. Singapore: World Scientific Publishing, 2003.
7. Monaghan J.J. On the problem of penetration in particle methods // Journal of Computational Physics. 1989. **82**, N 1. 1–15. doi [10.1016/0021-9991\(89\)90032-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90032-6).
8. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
9. Collela P., Woodward P.R. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulations // Journal of Computational Physics. 1984. **54**, N 1. 174–201. doi [10.1016/0021-9991\(84\)90143-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90143-8).
10. Hunter Jr. J.H., Whitaker R.W., Lovelace R.V.E. Kelvin–Helmholtz and thermal-dynamic instabilities with self-gravity: a new gravitational interface instability // Astrophysical J. 1997. **482**, N 2. 852–865. doi [10.1086/304154](https://doi.org/10.1086/304154).

11. *Balbus S.A., Hawley J.F.* Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks // *Reviews of Modern Physics*. 1998. **70**, N 1. 1–53. doi [10.1103/RevModPhys.70.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.70.1).
12. *Cox J.P.* Theory of stellar pulsation. (PSA-2). Vol. 2. Princeton: Princeton University Press, 2017.
13. *Tasker E.J., Brunino R., Mitchell N.L., et al.* A test suite for quantitative comparison of hydrodynamic codes in astrophysics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2008. **390**, N 3. 1267–1281. doi [10.1111/j.1365-2966.2008.13836.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13836.x).
14. *Commerçon B., Hennebelle P., Audit E., et al.* Protostellar collapse: a comparison between smoothed particle hydrodynamics and adaptive mesh refinement calculations // *Astronomy and Astrophysics*. 2008. **482**, N 1. 371–385. doi [10.1051/0004-6361:20078591](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20078591).
15. *Nelson A.F.* Numerical requirements for simulations of self-gravitating and non-self-gravitating discs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2006. **373**, N 3. 1039–1073. doi [10.1111/j.1365-2966.2006.11119.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.11119.x).
16. *Kitsionas S., Federrath C., Klessen R.S., et al.* Algorithmic comparisons of decaying, isothermal, supersonic turbulence // *Astronomy and Astrophysics*. 2009. **508**, N 1. 541–560. doi [10.1051/0004-6361/200811170](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200811170).
17. *Стадниченко О.А., Снытников В.Н.* Явный многошаговый алгоритм для моделирования динамики самогравитирующего газа // *Вычислительные методы и программирование*. 2010. **11**, № 1. 53–67. <https://www.mathnet.ru/rus/vmp294>. (Дата обращения: 24 марта 2026).
18. *Schlottke-Lakemper M., Winters A.R., Ranocha H., Gassner G.J.* A purely hyperbolic discontinuous Galerkin approach for self-gravitating gas dynamics // *J. Comput. Phys*. 2021. **442**. Article Number 110467. doi [10.1016/j.jcp.2021.110467](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110467).
19. *Käppeli R.* Well-balanced methods for computational astrophysics // *Living Reviews in Computational Astrophysics*. 2022. **8**, N 2. 1–88. doi [10.1007/s41115-022-00014-6](https://doi.org/10.1007/s41115-022-00014-6).
20. *Арафаїлов С.И., Краснобаев К.В., Тагирова Р.Р.* Одномерное сжатие ограниченных объемов самогравитирующего газа // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2012. № 3. 7–17.
21. *Чижевков Е.В.* Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: Физматлит, 2018.
22. *Guo Y., Hadžić M., Jang J.* Larson–Penston self-similar gravitational collapse // *Communications in Mathematical Physics*. 2021. **386**, N 3. 1551–1601. doi [10.1007/s00220-021-04175-y](https://doi.org/10.1007/s00220-021-04175-y).
23. *Jeanes J.H.* Astronomy and cosmogony. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1929.
24. *Spitzer Jr. L.* Physical processes in the interstellar medium. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.
25. *Jiang Y.-F., Belyaev M., Goodman J., Stone J.M.* A new way to conserve total energy for Eulerian hydrodynamic simulations with self-gravity // *New Astronomy*. 2013. **19**. 48–55. doi [10.1016/j.newast.2012.08.002](https://doi.org/10.1016/j.newast.2012.08.002).
26. *Hanawa T.* Conservation of gravitational energy // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. **1225**, N 1. Article Number 012015. doi [10.1088/1742-6596/1225/1/012015](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1225/1/012015).
27. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2012.
28. *MacCormack R.W.* A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow // *AIAA Journal*. 1982. **20**, N 9. 1275–1281.
29. *MacCormack R.W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // *J. Spacecr. Rockets*. 2003. **40**, N 5. 757–763. doi [10.2514/2.6901](https://doi.org/10.2514/2.6901).
30. *Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижевков Е.В.* Численные методы. Решения задач и упражнения. 2-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2016.
31. *Fürst J., Furmánek P.* An implicit MacCormack scheme for unsteady flow calculations // *Computers & Fluids*. 2011. **46**, N 1. 231–236. doi [10.1016/j.compfluid.2010.09.036](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.036).
32. *Чижевков Е.В.* О численном моделировании колебаний в холодной, но вязкой плазме // *Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2024. № 4. 32–41. doi [10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-5](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-5).
33. *Розанова О.С., Чижевков Е.В.* О численном моделировании плазменных колебаний с учетом нестандартной вязкости // *Вычислительные методы и программирование*. 2024. **25**, № 4. 427–440. doi [10.26089/NumMet.v25r432](https://doi.org/10.26089/NumMet.v25r432).
34. *Кобельков Г.М., Имранов Ф.Б., Соколов А.Г.* О разностной схеме для уравнений баротропного газа // *Доклады Академии Наук*. 2018. **478**, № 4. 388–391. doi [10.7868/S0869565218040035](https://doi.org/10.7868/S0869565218040035).
35. *Звягин А.В., Кобельков Г.М., Ложников М.А.* Об одной разностной схеме для уравнений газовой динамики // *Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2018. № 4. 15–22.



Информация об авторах

Анатолий Вадимович Попов — к.ф.-м.н., доцент; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

Евгений Владимирович Чижонков — д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (University of Chicago Press, Chicago, 1939).
2. E. H. Lieb and H.-T. Yau, “The Chandrasekhar theory of stellar collapse as the limit of quantum mechanics,” *Commun. Math. Phys.* **112**, 147–174 (1987). doi [10.1007/BF01217684](https://doi.org/10.1007/BF01217684).
3. M. Hadžić, “Star dynamics: Collapse vs. expansion,” *Quart. Appl. Math.* **81**, 329–365 (2023). doi [10.1090/qam/1638](https://doi.org/10.1090/qam/1638).
4. L. Hartmann, *Accretion Processes in Star Formation* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
5. R. A. Gingold and J. J. Monaghan, “Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **181** (3), 375–389 (1977). doi [10.1093/mnras/181.3.375](https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375).
6. G. R. Liu and M. B. Liu, *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method* (World Scientific Publishing, Singapore, 2003).
7. J. J. Monaghan, “On the problem of penetration in particle methods,” *Journal of Computational Physics* **82** (1), 1–15 (1989). doi [10.1016/0021-9991\(89\)90032-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90032-6).
8. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. Ja. Ivanov, et al., *Numerical Solution of Multidimensional Gas Dynamics Problems* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
9. P. Collella and P. R. Woodward, “The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulations,” *Journal of Computational Physics* **54** (1), 174–201 (1984). doi [10.1016/0021-9991\(84\)90143-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90143-8).
10. J. H. Hunter Jr., R. W. Whitaker, and R. V. E. Lovelace, “Kelvin—Helmholtz and Thermal-Dynamic Instabilities with Self-Gravity: A New Gravitational Interface Instability,” *Astrophysical J.* **482** (2), 852–865 (1997). doi [10.1086/304154](https://doi.org/10.1086/304154).
11. S. A. Balbus and J. F. Hawley, “Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks,” *Reviews of Modern Physics* **70** (1), 1–53 (1998). doi [10.1103/RevModPhys.70.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.70.1).
12. J. P. Cox, *Theory of Stellar Pulsation. (PSA-2)*, Vol. 2. (Princeton University Press, Princeton, 2017).
13. E. J. Tasker, R. Brunino, N. L. Mitchell, et al., “A test suite for quantitative comparison of hydrodynamic codes in astrophysics,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **390** (3), 1267–1281 (2008). doi [10.1111/j.1365-2966.2008.13836.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13836.x).
14. B. Commerçon, P. Hennebelle, E. Audit, et al., “Protostellar collapse: a comparison between smoothed particle hydrodynamics and adaptative mesh refinement calculations,” *Astronomy and Astrophysics* **482** (1), 371–385 (2008). doi [10.1051/0004-6361:20078591](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20078591).
15. A. F. Nelson, “Numerical requirements for simulations of self-gravitating and non-self-gravitating discs,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **373** (3), 1039–1073 (2006). doi [10.1111/j.1365-2966.2006.11119.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.11119.x).
16. S. Kitsionas, C. Federrath, R. S. Klessen, et al., “Algorithmic comparisons of decaying, isothermal, supersonic turbulence,” *Astronomy and Astrophysics* **508** (1), 541–560 (2009). doi [10.1051/0004-6361/200811170](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200811170).
17. O. A. Stadnichenko and V. N. Snytnikov, “An explicit multi-step algorithm for the simulation of self-gravitating gas dynamics,” *Numerical Methods and Programming [Vychislitel’nye Metody i Programirovanie]* **11** (1), 53–67 (2010). <https://www.mathnet.ru/eng/vmp294>. Cited March 24, 2026.
18. M. Schlottke-Lakemper, A. R. Winters, H. Ranocha, and G. J. Gassner, “A purely hyperbolic discontinuous Galerkin approach for self-gravitating gas dynamics,” *J. Comput. Phys.* **442**, Article Number 110467 (2021). doi [10.1016/j.jcp.2021.110467](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110467).
19. R. Käppeli, “Well-balanced methods for computational astrophysics,” *Living Reviews in Computational Astrophysics* **8** (2), 1–88 (2022). doi [10.1007/s41115-022-00014-6](https://doi.org/10.1007/s41115-022-00014-6).
20. S. I. Arafailov, K. V. Krasnobaev, and R. R. Tagirova, “One-dimensional compression of bounded volumes of a self-gravitating gas,” *Izv. RAN. Mekhanika jidkosti i gaza* No 3, 7–17 (2012) [*Fluid Dynamics* **47** (3), 292–300 (2012)]. doi [10.1134/S0015462812030027](https://doi.org/10.1134/S0015462812030027).

21. E. V. Chizhonkov, *Mathematical Aspects of Modelling Oscillations and Wake Waves in Plasma* (Fizmatlit, Moscow, 2018; CRC Press, Boca Raton, 2019).
22. Y. Guo, M. Hadžić, and J. Jang, “Larson–Penston Self-similar Gravitational Collapse,” *Communications in Mathematical Physics* **386** (3), 1551–1601 (2021). doi [10.1007/s00220-021-04175-y](https://doi.org/10.1007/s00220-021-04175-y).
23. J. H. Jeans, *Astronomy and Cosmogony* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1929).
24. L. Spitzer Jr., *Physical Processes in the Interstellar Medium* (John Wiley & Sons, New Jersey, 2008).
25. Y.-F. Jiang, M. Belyaev, J. Goodman, and J. M. Stone, “A new way to conserve total energy for Eulerian hydrodynamic simulations with self-gravity,” *New Astronomy* **19**, 48–55 (2013). doi [10.1016/j.newast.2012.08.002](https://doi.org/10.1016/j.newast.2012.08.002).
26. T. Hanawa, “Conservation of Gravitational Energy,” *Journal of Physics: Conference Series* **1225** (1), Article Number 012015 (2019). doi [10.1088/1742-6596/1225/1/012015](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1225/1/012015).
27. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2012; Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2019).
28. R. W. MacCormack, “A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow,” *AIAA Journal* **20** (9), 1275–1281 (1982).
29. R. W. MacCormack, “The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering,” *J. Spacecr. Rockets* **40** (5), 757–763 (2003). doi [10.2514/2.6901](https://doi.org/10.2514/2.6901).
30. N. S. Bakhvalov, A. A. Kornev, and E. V. Chizhonkov, *Numerical Methods. Solutions of Problems and Exercises. 2nd ed.* (Laboratoriya Znaniy, Moscow, 2016) [in Russian].
31. J. Fürst and P. Furmánek, “An implicit MacCormack scheme for unsteady flow calculations,” *Computers & Fluids* **46** (1), 231–236 (2011). doi [10.1016/j.compfluid.2010.09.036](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.036).
32. E. V. Chizhonkov, “Numerical Modeling of Oscillations in a Cold but Viscous Plasma,” *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1: Matematika. Mehanika No. 4*, 32–41 (2024) [Moscow University Mathematics Bulletin **79** (4), 182–191 (2024)]. doi [10.3103/S0027132224700244](https://doi.org/10.3103/S0027132224700244).
33. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “On numerical simulation of plasma oscillations taking into account non-standard viscosity,” *Numerical Methods and Programming [Vychislitel’nye Metody i Programirovanie]* **25** (4), 427–440 (2024). doi [10.26089/NumMet.v25r432](https://doi.org/10.26089/NumMet.v25r432).
34. F. B. Imranov, G. M. Kobel’kov, and A. G. Sokolov, “Finite Difference Scheme for Barotropic Gas Equations,” *Dokl. Akad. Nauk* **478** (4), 388–391 (2018) [Dokl. Math. **97** (1), 58–61 (2018)]. doi [10.1134/S1064562418010179](https://doi.org/10.1134/S1064562418010179).
35. A. V. Zvyagin, G. M. Kobel’kov, and M. A. Lozhnikov, “On Some Finite Difference Scheme for Gas Dynamics Equations,” *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1: Matematika. Mehanika No 4*. 15–22 (2018) [Moscow University Mathematics Bulletin **73** (4), 143–149 (2018)]. doi [10.3103/S0027132218040034](https://doi.org/10.3103/S0027132218040034).

Received
January 9, 2026

Accepted
March 15, 2026

Published
April 2, 2026

Information about the authors

Anatoly V. Popov — Ph.D., Associate Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.

Evgenii V. Chizhonkov — Dr. Sci, Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.