2026, **27** (1), 19–26. doi 10.26089/NumMet.v27r102

doi 10.26089/NumMet.v27r102 УДК 519.633.2

Численное решение задачи определения начального условия в задаче Коши для гиперболического уравнения с малым параметром

Д. С. Андрианов
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-9798-0126, e-mail: justdaniel99@gmail.com

Аннотация: В статье рассматривается обратная задача определения начального условия для сингулярно возмущенного гиперболического уравнения с малым параметром. Неизвестная нечетная функция находится с использованием дополнительных данных о производной решения в фиксированной пространственной точке. Основной результат работы состоит в сведении исходной некорректной задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, для численного решения которого разработан итерационный метод. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность алгоритма.

Ключевые слова: обратная задача, гиперболическое уравнение, сингулярное возмущение, метод квазиобращения, численные методы.

Для цитирования: Андрианов Д.С. Численное решение задачи определения начального условия в задаче Коши для гиперболического уравнения с малым параметром // Вычислительные методы и программирование. 2026. **27**, № 1. 19–26. doi 10.26089/NumMet.v27r102.

Numerical solution of determining the initial condition problem in Cauchy problem for hyperbolic equation with small parameter

Daniil S. Andrianov
Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-9798-0126, e-mail: justdaniel99@gmail.com

Abstract: The text considers the inverse problem of determining the initial condition for a singularly perturbed hyperbolic equation with a small parameter. This involves finding an unknown odd function using additional information about the derivative of the solution at a fixed spatial point. The main result of the text is to reduce the ill-posed initial problem to a Volterra integral equation of the second kind. An iterative method has been developed for numerically solving this equation. Computational experiments were conducted to test the effectiveness of this algorithm.

Keywords: inverse problem, hyperbolic equation, singular perturbation, quasi-inversion methods, numerical methods.

For citation: D. S. Andrianov, “Numerical solution of determining the initial condition problem in Cauchy problem for hyperbolic equation with small parameter,” Numerical Methods and Programming. **27** (1), 19–26 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r102.

2026, **27** (1), 19–26. doi 10.26089/NumMet.v27r102

1. Введение. Теория обратных задач для уравнений математической физики является одним из актуальных направлений современной прикладной математики. Исследованию обратных задач посвящено очень большое количество работ (см. [1–6] и имеющуюся там библиографию). Значительный вклад в теорию обратных задач был внесен в результате разработки метода их приближенного решения, основанного на замене исходного дифференциального уравнения сингулярно возмущенным. Данный подход, известный как метод квазиобращения, был предложен в [7] и получил дальнейшее развитие в работах [8–11] и ряде других исследований.

В методе квазиобращения сингулярно возмущенное уравнение используется для построения приближенного решения, а малый параметр является искусственно введенным параметром метода. Вместе с тем существует класс обратных задач для сингулярно возмущенных уравнений математической физики, в которых малый параметр входит в исходное уравнение. Исследованию обратных задач для сингулярно возмущенных уравнений в частных производных посвящены работы [12–16].

Метод квазиобращения, как правило, применяется к обратным задачам, в которых искомая функция и дополнительная информация, используемая для определения искомой функции, зависят от одинаковых переменных. В работах [17, 18] рассматривались обратные задачи для сингулярно возмущенных уравнений гиперболического типа, в которых искомые функции зависят от пространственной переменной, а дополнительная информация представляет собой функцию времени. Кроме того, изучалась возможность применения разработанных методов для решения аналогичных обратных задач для уравнения теплопроводности. Данная работа продолжает исследование в этом направлении.

Рассмотрим следующую задачу Коши для гиперболического уравнения с малым параметром ε^2 при старшей производной:

$$\varepsilon^2 u_{tt} + u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \varphi''(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, ε — положительный малый параметр.

Задачу (1)–(3) можно рассматривать как сингулярное возмущение задачи Коши для параболического уравнения

$$v_t = v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Сходимость решения задачи Коши (1)–(3) к решению задачи Коши (4), (5) при $\varepsilon \to 0$ доказана в [17].

Сформулируем обратную задачу для задачи Коши (1)–(3). Пусть в задаче (1)–(3) задан малый параметр ε, а функция $\varphi(x)$ неизвестна. Требуется определить функцию $\varphi(x)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(3):

$$u_x(0,t) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

где $g(t)$ —заданная функция. Легко видеть, что решение обратной задачи в такой постановке неединственно. Чтобы устранить эту неединственность, далее будем считать функцию $\varphi(x)$ нечетной. Аналогичная обратная задача с четной функцией $\varphi(x)$ с условием $u(0,t) = \tilde{g}(t)$ вместо (6) была рассмотрена в [17].

Целью данной статьи является разработка численного метода решения обратной задачи (1)–(3), (6) для гиперболического уравнения, а также демонстрация возможности применения этого метода для решения обратной задачи (4)–(6) для уравнения теплопроводности.

2. Вывод интегрального уравнения для функции $\varphi(x)$. Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3), (6). Выведем интегральное уравнение для функции $\varphi(x)$.

Рассмотрим функцию $p(x,t) = e^{\frac{t}{2\varepsilon^2}} u(x,t)$. Так как функция $u(x,t)$ является решением задачи (1)–(3), то функция $p(x,t)$ представляет собой решение следующей задачи:

$$p_{tt} - \frac{1}{4\varepsilon^4} p = \frac{1}{\varepsilon^2} p_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$p(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$p_t(x,0) = \varphi''(x) + \frac{1}{2\varepsilon^2}\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2026, **27** (1), 19–26. doi 10.26089/NumMet.v27r102

Использовав для ее решения известную формулу [19, с. 269], получим представление для решения задачи (1)–(3)

$$u(x,t) = e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\frac{\varphi\left(x-\frac{t}{\varepsilon}\right)+\varphi\left(x+\frac{t}{\varepsilon}\right)}{2} + \frac{t}{4\varepsilon}e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\int\limits_{x-\frac{t}{\varepsilon}}^{x+\frac{t}{\varepsilon}}\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2(x-\xi)^2}\right)}{\sqrt{t^2-\varepsilon^2(x-\xi)^2}}\varphi(\xi)\,d\xi +$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\int\limits_{x-\frac{t}{\varepsilon}}^{x+\frac{t}{\varepsilon}}I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2(x-\xi)^2}\right)\left[\varphi''(\xi)+\frac{1}{2\varepsilon^2}\varphi(\xi)\right]d\xi, \qquad (7)$$

где $I_0(x)$ и $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно [20].

Выведем интегральное уравнение для функции $\varphi(x)$. Продифференцировав равенство (7) по переменной x, применив формулы [21] для модифицированных функций Бесселя

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = 2\frac{\nu}{x}I_\nu(x), \quad I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x), \quad I'_\nu(x)+\frac{\nu}{x}I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x),$$

положив $x=0$ и использовав условие (6), имеем:

$$g(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}}{2}\left[\varphi'\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)+\varphi'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right] + \frac{t}{16\varepsilon^3}e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\left[\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-\varphi\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]+$$
$$+\frac{t}{32\varepsilon^5}e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\int\limits_{-\frac{t}{\varepsilon}}^{\frac{t}{\varepsilon}}\frac{I_2\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2\xi^2}\right)}{\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2\xi^2}\right)^2}\xi\varphi(\xi)d\xi + \frac{\varepsilon}{2}e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\left[\varphi''\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-\varphi''\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{4\varepsilon}e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\left[\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-\varphi\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\right] + \frac{1}{8\varepsilon}e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\int\limits_{-\frac{t}{\varepsilon}}^{\frac{t}{\varepsilon}}\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2\xi^2}}\xi\left[\varphi''(\xi)+\frac{1}{2\varepsilon^2}\varphi(\xi)\right]d\xi, \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

откуда

$$g(t)e^{\frac{t}{2\varepsilon^2}} = \varepsilon\varphi''\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+\varphi'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{2\varepsilon}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\left[\frac{t}{4\varepsilon^2}+1\right]+\frac{t}{32\varepsilon^5}\int\limits_{-\frac{t}{\varepsilon}}^{\frac{t}{\varepsilon}}\frac{I_2\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2\xi^2}\right)}{\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2\xi^2}\right)^2}\xi\varphi(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{16\varepsilon^3}\int\limits_{-\frac{t}{\varepsilon}}^{\frac{t}{\varepsilon}}\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2\xi^2}}\xi\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{8\varepsilon}\int\limits_{-\frac{t}{\varepsilon}}^{\frac{t}{\varepsilon}}\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2\xi^2}}\xi\varphi''(\xi)\,d\xi, \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Приняв во внимание четность подынтегральных выражений и введя новую переменную $z=\dfrac{t}{\varepsilon}$, получим:

$$g(\varepsilon z)e^{\frac{z}{2\varepsilon}} = \varepsilon\varphi''(z)+\varphi'(z)+\frac{1}{2\varepsilon}\varphi(z)\left[1+\frac{z}{4\varepsilon}\right]+\frac{z}{16\varepsilon^4}\int\limits_0^z\frac{I_2\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)^2}\xi\varphi(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{8\varepsilon^3}\int\limits_0^z\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}}\xi\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_0^z\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}}\xi\varphi''(\xi)\,d\xi, \quad 0\leqslant z\leqslant\frac{T}{\varepsilon}. \qquad (8)$$

2026, **27** (1), 19–26. doi 10.26089/NumMet.v27r102

Преобразуем интеграл, содержащий вторую производную функции $\varphi(\xi)$. Проинтегрировав по частям и использовав свойства модифицированных функций Бесселя, имеем:

$$\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_0^z \frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}}\xi\varphi''(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{z}{8\varepsilon}\varphi'(z) - \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_0^z \left\{ \frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}} - \frac{\xi^2}{2\varepsilon^2}\frac{I_2\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)^2}\right\}\varphi'(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{z}{8\varepsilon}\varphi'(z) - \frac{1}{8\varepsilon}\left[1-\frac{z^2}{8\varepsilon^2}\right]\varphi(z) + \frac{3}{8\varepsilon^3}\int\limits_0^z \frac{I_2\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)^2}\xi\varphi(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{768\varepsilon^2}\int\limits_0^z \frac{\xi^3}{\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}}\left[I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right) - 8\frac{I_2\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}} - I_3\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right) + \right.$$

$$\left. +4\frac{I_4\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}}\right]\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Подставив это представление в уравнение (8), получим:

$$\varphi''(z) + \frac{1}{\varepsilon}\varphi'(z)\left[1+\frac{z}{8\varepsilon}\right] + \frac{1}{8\varepsilon^2}\varphi(z)\left[3+\frac{z}{\varepsilon}+\frac{z^2}{8\varepsilon^2}\right] = \frac{1}{\varepsilon}g(\varepsilon z)e^{\frac{z}{2\varepsilon}} + \int\limits_0^z F(z,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad 0 \leqslant z \leqslant \frac{T}{\varepsilon}, \tag{9}$$

где

$$F(z,\xi) = -\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{8\varepsilon^3}\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}}\xi\left[1+\frac{\xi^2}{96\varepsilon^2}\right] + \frac{1}{8\varepsilon^3}\frac{I_2\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)^2}\xi\left[3+\frac{z}{2\varepsilon}-\frac{\xi^2}{12\varepsilon^2}\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{768\varepsilon^5}\frac{I_3\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}}\xi^3 + \frac{1}{192\varepsilon^5}\frac{I_4\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)^2}\xi^3\right\}.$$

Домножим обе части уравнения (9) на $e^{\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}}$:

$$\varphi''(z)\,e^{\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}} + \frac{1}{\varepsilon}\varphi'(z)\left[1+\frac{z}{8\varepsilon}\right]e^{\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}} + \frac{1}{8\varepsilon^2}\varphi(z)\left[3+\frac{z}{\varepsilon}+\frac{z^2}{8\varepsilon^2}\right]e^{\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}g(\varepsilon z)e^{\frac{z}{2\varepsilon}}e^{\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}} + e^{\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}}\int\limits_0^z F(z,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad 0 \leqslant z \leqslant \frac{T}{\varepsilon}. \tag{10}$$

Заметив, что $\dfrac{d}{dz}\left(\varphi'(z)\,e^{\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}}\right) = \varphi''(z)\,e^{\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}} + \dfrac{1}{\varepsilon}\varphi'(z)\left[1+\dfrac{z}{8\varepsilon}\right]e^{\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}}$, и проинтегрировав уравнение (10) с условием $\varphi'(0)=g(0)$, имеем:

$$\varphi'(z)\,e^{\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}} - g(0) + \frac{1}{8\varepsilon^2}\int\limits_0^z \varphi(\beta)\left[3+\frac{\beta}{\varepsilon}+\frac{\beta^2}{8\varepsilon^2}\right]e^{\frac{\beta^2+16\varepsilon\beta}{16\varepsilon^2}}\,d\beta =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^z g(\varepsilon\beta)e^{\frac{\beta^2+24\varepsilon\beta}{16\varepsilon^2}}\,d\beta + \int\limits_0^z\int\limits_0^\beta e^{\frac{\beta^2+16\varepsilon\beta}{16\varepsilon^2}}F(\beta,\xi)\varphi(\xi)\,d\beta d\xi, \quad 0 \leqslant z \leqslant \frac{T}{\varepsilon}.$$

2026, **27** (1), 19–26. doi 10.26089/NumMet.v27r102

Или

$$\varphi'(z) = h(z) + \int\limits_0^z P(z,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad 0 \leqslant z \leqslant \frac{T}{\varepsilon}, \tag{11}$$

где

$$h(z) = g(0)e^{-\frac{z^2+16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^z g(\varepsilon\beta)e^{\frac{\beta^2-z^2+\varepsilon(24\beta-16z)}{16\varepsilon^2}}\,d\beta,$$

$$P(z,\xi) = \int\limits_\xi^z F(\beta,\xi)e^{\frac{\beta^2-z^2+16\varepsilon(\beta-z)}{16\varepsilon^2}}\,d\beta - \frac{1}{8\varepsilon^2}\left[3 + \frac{\xi}{\varepsilon} + \frac{\xi^2}{8\varepsilon^2}\right]e^{\frac{\xi^2-z^2+16\varepsilon(\xi-z)}{16\varepsilon^2}}.$$

Проинтегрировав равенство (11) и использовав условие $\varphi(0) = 0$, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода для искомой функции $\varphi\,(z)$:

$$\varphi\,(z) = f(z) + \int\limits_0^z K(z,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad 0 \leqslant z \leqslant \frac{T}{\varepsilon}, \tag{12}$$

где $f(z) = \int\limits_0^z h(\gamma)\,d\gamma$ и $K(z,\xi) = \int\limits_\xi^z P(\gamma,\xi)\,d\gamma$. При этом $f(z) \in C\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ и $K(z,\xi)$ непрерывно при $0 \leqslant \xi \leqslant z \leqslant \frac{T}{\varepsilon}$.

3. Результаты расчетов для обратной задачи. Численный метод решения обратной задачи основан на реализации итерационного метода решения уравнения (12):

$$\varphi_{n+1}\,(x) = f(x) + \int\limits_0^x K(x,\xi)\varphi_n(\xi)\,d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{13}$$

В качестве начального приближения берется функция $\varphi_0(x) = 0$.

Критерий останова итерационного процесса: $\max|\varphi_{N+1}\,(x) - \varphi_N\,(x)\,| \leqslant 10^{-3}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{T}{\varepsilon}$. Численный метод был программно реализован на языке Python.

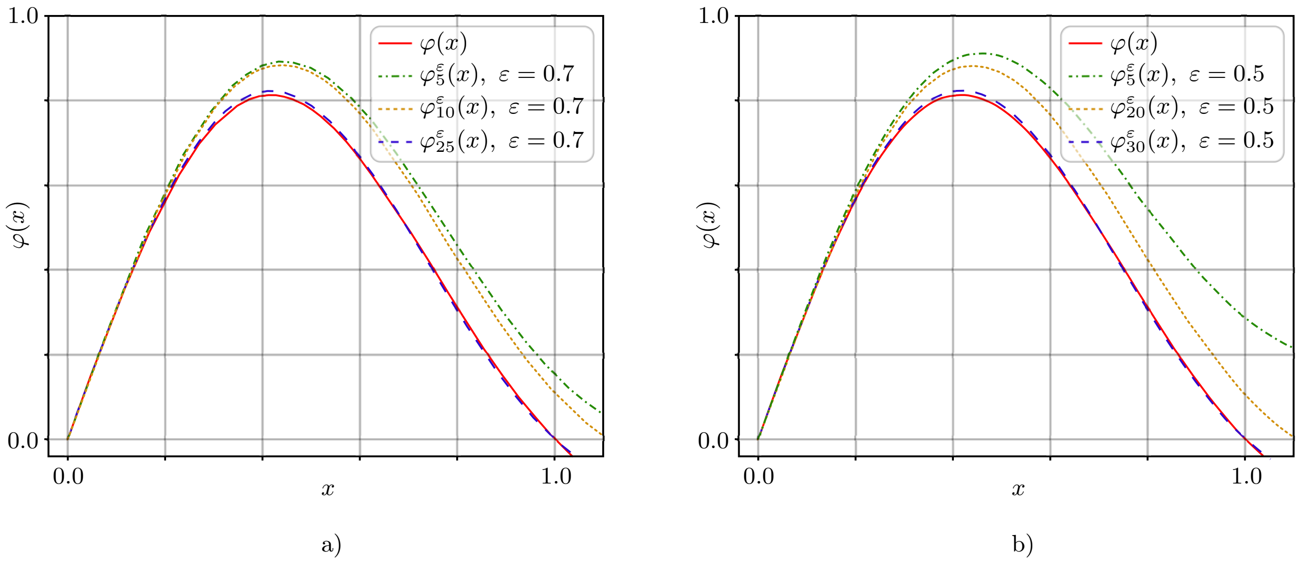

Рис. 1. Численное решение обратной задачи для гиперболического уравнения: a) при $\varepsilon = 0.7$; b) при $\varepsilon = 0.5$

Fig. 1. Numerical solution of the inverse problem for a hyperbolic equation: a) at $\varepsilon = 0.7$; b) at $\varepsilon = 0.5$

2026, **27** (1), 19–26. doi 10.26089/NumMet.v27r102

Рассмотрим примеры численного решения обратной задачи для гиперболического уравнения. Схема вычислительного эксперимента была такова. Задавались функция $\varphi(x)$, числа ε, T. С ними решалась задача (1)–(3) и определялась функция $g(t)$. Далее по этой функции определялась функция $f(x)$. С функцией $f(x)$ реализовывался итерационный метод (13) и находилось приближенное решение обратной задачи $\varphi_N^\varepsilon(x)$. Затем приближенное решение $\varphi_N^\varepsilon(x)$ сравнивалось с точным $\varphi(x)$.

Пусть заданы $\varphi(x) = e^{-x^2} \sin \pi x$ и $T = \dfrac{\pi}{3}$.

На рис. 1 a представлены результаты решения обратной задачи для $\varepsilon = 0.7$, число итераций $N = 25$: точное решение $\varphi(x)$, совпадающее с ним на рис. 1 a приближенное решение $\varphi_{25}^\varepsilon(x)$ и промежуточные итерации $\varphi_5^\varepsilon(x)$, $\varphi_{10}^\varepsilon(x)$.

На рис. 1 b представлены результаты решения обратной задачи для $\varepsilon = 0.5$, число итераций $N = 30$: точное решение $\varphi(x)$, совпадающее с ним на рис. 1 b приближенное решение $\varphi_{30}^\varepsilon(x)$ и промежуточные итерации $\varphi_5^\varepsilon(x)$, $\varphi_{20}^\varepsilon(x)$.

Рассмотрим возможность применения уравнения (12) для приближенного решения обратной задачи для уравнения теплопроводности. Схема вычислительного эксперимента была такова. Для заданной функции $\varphi(x)$ решалась задача Коши (4), (5) и определялась функция $g(t) = v_x(0,t)$. Далее с этой функцией $g(t)$ вычислялась функция $f(x)$, и с ней реализовывался итерационный метод (13), откуда находилась функция $\varphi_N^\varepsilon(x)$, являющаяся решением обратной задачи для гиперболического уравнения. Затем эта функция сравнивалась с функцией $\varphi(x)$ при различных значениях параметра ε.

Пусть в задаче (4), (5) заданы $\varphi(x) = xe^{-x^2}$ и $T = 4$. На рис. 2 представлены заданная функция $\varphi(x)$ и приближенные функции $\varphi_N^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon = 0.7,\ 0.5,\ 0.3$.

Из графика, приведенного на рис. 2, видно, что при малых значениях ε функция $\varphi_N^\varepsilon(x)$ дает достаточно хорошее приближение к $\varphi(x)$ и может рассматриваться как приближенное решение обратной задачи для уравнения теплопроводности.

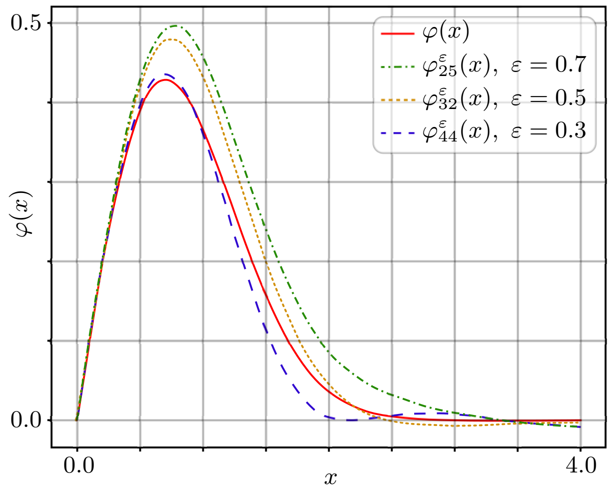

Рис. 2. Вычислительный эксперимент с применением уравнения (12) для приближенного решения обратной задачи для уравнения теплопроводности

Fig. 2. A computational experiment using equation (12) to approximate the solution of the inverse problem for the thermal conductivity equation

4. Заключение. Рассмотрена обратная задача определения начального условия для сингулярно возмущенного гиперболического уравнения с малым параметром. Основной теоретический результат состоит в сведении исходной задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, что позволило построить численный алгоритм на основе итерационного метода.

Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили эффективность предложенного подхода. Показано, что с увеличением числа итераций приближенное решение сходится к точному, причем скорость сходимости зависит от значения малого параметра ε. Численные расчеты продемонстрировали стремление решения обратной задачи для гиперболического уравнения к решению обратной задачи для параболического уравнения при уменьшении значений малого параметра. Это дает основание использовать данный подход для приближенного решения существенно некорректной обратной задачи для уравнения теплопроводности.

Список литературы

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1994.
3. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

2026, **27** (1), 19–26. doi 10.26089/NumMet.v27r102

4. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
5. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
6. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
7. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
8. *Иванов В.К.* Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике // Дифференц. уравн. 1972. **8**, № 4. 652–658. https://www.mathnet.ru/de1532. (Дата обращения: 19 января 2026).
9. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004.
10. *Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д.* О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом квазиобращения // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2012. № 6. 8–13. https://www.mathnet.ru/rus/vyurm100. (Дата обращения: 19 января 2026).
11. *Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-заде А.Т.* Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложением к задачам геодинамики // Известия Уральского государ. университета. 2008. № 58. 78–87. http://elar.urfu.ru/handle/10995/24610. (Дата обращения: 20 января 2026).
12. *Денисов А.М.* Приближенное решение обратной задачи для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. **63**, № 5. 795–802. doi 10.31857/S0044466923050095.
13. *Levashova N., Gorbachev A., Argun R., Lukyanenko D.* The problem of the non-uniqueness of the solution to the inverse problem of recovering the symmetric states of a bistable medium with data on the position of an autowave front // Symmetry. 2021. **13**, N 5. Article Number 860. doi 10.3390/sym13050860.
14. *Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A.* Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. **99**. Article Number 105824. doi 10.1016/j.cnsns.2021.105824.
15. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction-diffusion-advection equation // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2019. **27**, N 5. 745–758. doi 10.1515/jiip-2017-0074.
16. *Денисов А.М.* Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. **61**, № 12. 2040–2049. doi 10.31857/S0044466921120085.
17. *Денисов А.М., Соловьева С.И.* Численное решение задач определения начального условия в задачах Коши для гиперболического уравнения с малым параметром // Прикладная математика и информатика. 2017. **54**. 5–12.
18. *Денисов А.М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. **53**, № 5. 744–752. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf/v53/i5/p744. (Дата обращения: 21 января 2026).
19. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Гостехиздат, 1956.
20. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики, 4-е изд. М.: Наука, 1972.
21. *Bateman H.* Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill, 1953.

Получена	*Принята*	*Опубликована*
26 октября 2025 г.	*2 января 2026 г.*	*28 января 2026 г.*

Информация об авторе

Даниил Сергеевич Андрианов — аспирант; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 1, стр. 52, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. A. N. Tikhonov and V. Ia. Arsenin, *Methods for Solving Incorrect Problems* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
2. A. M. Denisov, *Introduction to the Theory of Inverse Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1994) [in Russian].
3. M. M. Lavrentév, V. G. Romanov, and S. P. Shishatskii, *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].

2026, **27** (1), 19–26. doi 10.26089/NumMet.v27r102

4. V. K. Ivanov, V. V. Vasin, and V. P. Tanana, *Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
5. V. G. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
6. S. I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems* (Sib. Nauchn. Izd., Novosibirsk, 2009) [in Russian].
7. R. Lattes and J.-L. Lions, *The Method of Quasi-inversion and Its Applications* (Mir, Moscow, 1970) [in Russian].
8. V. K. Ivanov, "The Quasi-inversion Problem for the Heat Equation in the Uniform Metric," Differ. Uravn. **8** (4), 652–658 (1972). https://www.mathnet.ru/de1532. Cited January 19, 2026.
9. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics* (Editorial URSS, Moscow, 2004) [in Russian].
10. E. V. Tabarintseva, L. D. Menikhes, and A. D. Drozin, "On solving an inverse boundary problem for a parabolic equation by the quasi-revesibility method," Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Fiz., No. 6, 8–13 (2012). https://www.mathnet.ru/rus/vyurm100. Cited January 19, 2026.
11. A. I. Korotkii, I. A. Tsepelev, and A. T. Ismail-Zadeh, "Numerical Modeling of the Inverse Retrospective Problem of Thermal Convection with Applications to Geodynamic Problems," Izv. Ural. Gos. Univ., No. 58, 78–87 (2008). http://elar.urfu.ru/handle/10995/24610. Cited January 20, 2026.
12. A. M. Denisov, "Approximate Solution of an Inverse Problem for a Singularly Perturbed Integro-Differential Heat Equation," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **63** (5), 795–802 (2023) [Comput. Math. Math. Phys. **63** (5), 837–844 (2023)]. https://doi.org/10.1134/S0965542523050081. Cited January 20, 2026.
13. N. Levashova, A. Gorbachev, R. Argun, and D. Lukyanenko, "The Problem of the Non-Uniqueness of the Solution to the Inverse Problem of Recovering the Symmetric States of a Bistable Medium with Data on the Position of an Autowave Front," Symmetry **13** (5), Article Number 860 (2021). doi 10.3390/sym13050860.
14. D. V. Lukyanenko, A. A. Borzunov, and M. A. Shishlenin, "Solving Coefficient Inverse Problems for Nonlinear Singularly Perturbed Equations of the Reaction-Diffusion-Advection Type with Data on the Position of a Reaction Front," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **99**, Article Number 105824 (2021). doi 10.1016/j.cnsns.2021.105824.
15. D. V. Lukyanenko, M. A. Shishlenin, and V. T. Volkov, "Asymptotic Analysis of Solving an Inverse Boundary Value Problem for a Nonlinear Singularly Perturbed Time-Periodic Reaction-Diffusion-Advection Equation," J. Inverse Ill-Posed Probl. **27** (5), 745–758 (2019). doi 10.1515/jiip-2017-0074.
16. A. M. Denisov, "Approximate Solution of Inverse Problems for the Heat Equation with a Singular Perturbation," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **61** (12), 2040–2049 (2021) [Comput. Math. Math. Phys. **61** (12), 2004–2014 (2021)]. doi 10.1134/S0965542521120071.
17. A. M. Denisov and S. I. Solovéva, "Numerical Solution of Problems of Determining the Initial Condition in Cauchy Problems for a Hyperbolic Equation with a Small Parameter," Prikl. Mat. Inform. **54**, 5–12 (2017).
18. A. M. Denisov, "Asymptotic Expansions of Solutions to Inverse Problems for a Hyperbolic Equation with a small Parameter Multiplying the Highest Derivative," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **53** (5), 744–752 (2013) [Comput. Math. Math. Phys. **53** (5), 580–587 (2013)]. https://doi.org/10.1134/S0965542513050047. Cited January 21, 2026.
19. B. M. Budak, A. A. Samarskii, and A. N. Tikhonov, *A Collection of Problems on Mathematical Physics* (Gostekhizdat, Moscow, 1956) [in Russian].
20. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, 4th ed. (Nauka, Moscow, 1972) [in Russian].
21. H. Bateman, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 2 (McGraw-Hill, New York, 1953).

Received	Accepted	Published
October 26, 2025	*January 2, 2026*	*January 28, 2026*

Information about the author

Daniil S. Andrianov — Graduate Student; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia.