

## Модифицированный осесимметричный контактный метод гидродинамики сглаженных частиц с возможностью моделирования поверхностного натяжения

Г. Д. Рублев

Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики имени Н. Л. Духова,  
Москва, Российская Федерация

Объединенный институт высоких температур РАН,  
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0009-0008-5616-2355, e-mail: [rublev\\_gd\\_97@vk.com](mailto:rublev_gd_97@vk.com)

**Аннотация:** Математические модели многих физических явлений представляют собой законы сохранения массы, импульса и энергии. При численном моделировании таких явлений важна точность выполнения законов сохранения. В частности, при моделировании течений со свободной поверхностью невыполнение законов сохранения может привести к неправильной деформации свободных поверхностей. Поскольку стандартный осесимметричный метод CSPH (Contact Smoothed Particle Hydrodynamics), разработанный А. Н. Паршиковым, не удовлетворяет законам сохранения, в данной работе предлагается модифицированный осесимметричный метод CSPH для повышения точности сохранения полного импульса и полной энергии. Предлагается новый подход к моделированию поверхностного натяжения через взаимодействие с фиктивными частицами для метода CSPH. Верификация модели поверхностного натяжения проводится для трех тестовых случаев: моделирование установления давления Лапласа в капле воды, моделирование малых колебаний капли воды (сравнение периода малых колебаний с соответствующим значением, полученным по формуле Рэлея) и моделирование действия поверхностного натяжения на тонкую пленку (сравнение скорости продвижения создаваемых поверхностным натяжением “валиков” с предсказанием, следующим из формулы Тейлора–Кулика). Выполняется численное моделирование развития неустойчивости Рэлея–Плато.

**Ключевые слова:** контактный метод SPH, поверхностное натяжение, осевая симметрия, консервативность метода SPH, методы Годунова, фиктивные частицы.

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № 075–00269–25–00). Автор благодарит С. А. Дьячкова, С. Ю. Григорьева и профессора В. В. Жаховского за полезные комментарии и предложения.

**Для цитирования:** Рублев Г.Д. Модифицированный осесимметричный контактный метод гидродинамики сглаженных частиц с возможностью моделирования поверхностного натяжения // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 4. 422–437. doi 10.26089/NumMet.v26r428.



# Modified axisymmetric contact smoothed particle hydrodynamics method with surface tension modeling capability

Georgii D. Rublev

Dukhov Research Institute of Automatics, Moscow, Russia

Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, Russia

ORCID: 0009-0008-5616-2355, e-mail: [rublev\\_gd\\_97@vk.com](mailto:rublev_gd_97@vk.com)

**Abstract:** Mathematical models of numerous physical phenomena are represented by conservation laws for mass, momentum, and energy. In the context of numerical simulations of such phenomena, the accuracy of adherence to these conservation laws is of high importance. In particular, when simulating flows with free surfaces, the failure to comply with the conservation laws can result in erroneous deformation of the free surfaces. Because the standard axisymmetric CSPH (Contact Smoothed Particle Hydrodynamics) method of Parshikov does not satisfy the conservation laws, in this paper a modified axisymmetric CSPH method is proposed to improve the accuracy of preserving the total momentum and the total energy. A novel approach to modeling surface tension via interaction with fictitious particles is introduced for the CSPH method. The verification of the surface tension model is performed for three test cases: simulation of Laplace pressure establishment in a water droplet, modeling small oscillations of a water droplet (comparing the period of small oscillations with the corresponding value obtained from the Rayleigh's formula), and modeling the effect of surface tension on a thin film (comparing the velocity of propagation of rims created by surface tension with the prediction derived from the Taylor–Culick formula). A simulation of the development of the Rayleigh–Plateau instability is conducted.

**Keywords:** contact SPH, surface tension, axisymmetric SPH schemes, conservative SPH schemes, Riemann solver, ghost particles.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under Grant No. 075-00269-25-00. The author expresses his gratitude to S. A. Dyachkov, S. Yu. Grigoryev and Prof. V. V. Zhakhovsky for their helpful comments and suggestions.

**For citation:** G. D. Rublev, “Modified axisymmetric contact smoothed particle hydrodynamics method with surface tension modeling capability,” Numerical Methods and Programming. **26** (4), 422–437 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r428.

---

**1. Введение.** Бессеточный метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH) имеет широкую область применения при моделировании различных задач механики сплошных сред. Он особенно удобен в задачах с большими деформациями границ, в том числе свободных поверхностей. Простота программной реализации и отсутствие необходимости перестраивать сетку при больших деформациях стали причиной стремительного роста популярности метода SPH — это произошло вскоре после того, как идея метода была впервые высказана Люси [1] и Монаганом [2] в 1977 г. В последующие годы было предложено большое количество модификаций метода SPH.

В 1999 г. в работе А. Н. Паршикова [3] были впервые представлены уравнения метода CSPH (“контактный” SPH), в котором взаимодействие контактирующих частиц рассматривалось как распад произвольного разрыва. В этом смысле CSPH реализует принцип расчета потоков через границы ячеек, аналогичный сеточным методам Годунова [4]. Метод CSPH позволяет отказаться от искусственной вязкости, подбор параметров которой не всегда очевиден.

Трехмерное моделирование в декартовой системе координат требует большого числа частиц и может занимать продолжительное время. В некоторых случаях для практически важных задач, таких как, например, моделирование пузырьков в жидкости [5], моделирование взрывов в атмосфере, под водой и под землей, моделирование внешнего воздействия на капли жидкости [6], можно использовать двумерное осесимметричное моделирование, что позволяет существенно ускорить процесс расчета и снизить вычислительную нагрузку. В предлагаемой работе рассматривается осесимметричный вариант метода CSPH.

Впервые осесимметричный метод SPH был предложен в 1985 г. Коулманом и Бикнеллом [7]. В 1993 г. в работе [8] был предложен осесимметричный вариант метода SPH, полученный прямым переходом от трехмерного декартового случая с гауссовым ядром к двумерному осесимметричному путем интегрирования по углу. В последующие годы было предложено еще несколько вариантов осесимметричного метода SPH, где предполагалось использование искусственной вязкости (см., например, [5, 9]).

Оsesимметричный метод CSPH, основанный на решении задачи Римана, был впервые предложен в работе [10], однако эта схема не являлась консервативной. Нарушение консервативности в схеме из работы [10] является не только следствием применения дополнительных процедур (например, использования зеркально отраженных частиц относительно оси симметрии), но и свойством самих уравнений схемы. Как можно более точное сохранение полного импульса и полной энергии важно при моделировании многих задач, в том числе связанных с поверхностным натяжением, поскольку нефизичное ускорение может привести к неверной деформации свободных поверхностей. Для улучшения консервативности в данной работе предлагается модифицированная схема осесимметричного метода CSPH, удовлетворяющая законам сохранения полного импульса и полной энергии. Тем не менее, применение некоторых дополнительных алгоритмов, таких как, например, взаимодействие граничных частиц с фиктивными, может приводить к нарушению законов сохранения.

Метод SPH с искусственной вязкостью широко используется для моделирования задач с поверхностным натяжением [11–13]. В упомянутых работах для моделирования поверхностного натяжения к поверхностным частицам прикладывается сила, величина которой вычисляется напрямую по кривизне поверхности в данной точке или с помощью “цветовой” функции.

В этой работе предлагается новое численное граничное условие для метода CSPH, которое заключается в характере взаимодействия граничных частиц с фиктивными частицами, вклад которых в суммы выбирается так, чтобы скомпенсировать недостаток соседних частиц в пределах слаживающей длины граничных частиц. Это граничное условие применено для моделирования поверхностного натяжения.

Моделирование поверхностного натяжения основано на подходе Continuum Surface Force (CSF) Брэклила [14]. Модель CSF впервые была применена к методу SPH Моррисом в 2000 г. в работе [11]. Далее подход был развит другими авторами [13, 15]. В отличие от ранее опубликованных методов, в данной работе сила, действующая на поверхностные частицы, определяется взаимодействием поверхностных частиц с фиктивными частицами. Такой подход обеспечивает большую гибкость, поскольку позволяет задавать комбинированные граничные условия путем независимого определения параметров фиктивных частиц — таких как скорость частиц, давление, плотность и скорость звука.

Стоит также отметить, что некоторые исследователи рассматривают принципиально другие подходы к моделированию поверхностного натяжения в методе SPH. Эти подходы основаны на введении межчастичных сил взаимодействия с использованием различных потенциалов по аналогии с методом молекулярной динамики [16–18]. Такие модели просты в реализации, позволяют точно сохранять полный импульс, тривиально обобщаются на взаимодействие различных материалов, однако у них есть ряд существенных недостатков. Во-первых, результирующее поверхностное натяжение необходимо откалибровать с помощью численного эксперимента. Во-вторых, поверхностное натяжение зависит от разрешения и не стремится к фиксированному значению при его увеличении [15]. В-третьих, точность моделирования при использовании таких моделей значительно хуже, чем при использовании моделей типа CSF [15].

**2. Осесимметричный контактный метод SPH.** Для удобства в статье используются тензорные обозначения вместо индексных. Прямым жирным шрифтом обозначаются тензоры, а наклонным полу-жирным шрифтом — векторы. Выпишем определения используемых далее тензорных операций (предлагается суммирование по повторяющимся индексам):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{\alpha \dots \beta} B_{\beta \dots \gamma}, \quad \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{\alpha \dots \beta} B_{\gamma \dots \delta}.$$

Для описания сжимаемых сред в осесимметричном случае используются уравнения неразрывности, движения и энергии в дифференциальной форме. Уравнение неразрывности удобно записать в терминах



объемных деформаций:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{U} + \frac{U^r}{r}, \quad (1)$$

где  $\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U^r}{\partial r} + \frac{\partial U^z}{\partial z}$ ,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$ ,  $\mathbf{U} = (U^r, U^z)^T$  — скорость вещества,  $\rho$  — плотность вещества.

Уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}^{\text{st}}, \quad (2)$$

где  $P$  — давление,  $\mathbf{f}^{\text{st}}$  — сила, действующая на границе со свободной поверхностью (учитывает действие поверхностного натяжения).

Закон изменения внутренней (тепловой) энергии с учетом введенных выше обозначений имеет вид:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{U} - \frac{PU^r}{\rho r}, \quad (3)$$

где  $e$  — внутренняя энергия единицы массы вещества (удельная внутренняя энергия).

Система уравнений (1)–(3) замыкается уравнением состояния

$$P = P(\rho, e).$$

Метод SPH основан на аппроксимации значений физических величин и их пространственных производных с использованием функции сглаживающего ядра  $W$ . В осесимметричном случае для заданной в полуплоскости  $rz$  ( $r > 0$ ) гладкой функции  $F(\mathbf{r})$  в точке  $\mathbf{r} = (r, z)^T$  можно записать:

$$F(\mathbf{r}) = \int dr' \int dz' F(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/h; h) + O(h^2) = \int ds' F(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/h; h) + O(h^2), \quad (4)$$

где  $ds = dr dz$  — элемент площади. Сглаживающее ядро  $W(q; h)$  является функцией от  $q = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/h$  и зависит от сглаживающей длины  $h$  как от параметра. Сглаживающая длина  $h$  определяет радиус носителя функции сглаживающего ядра. В данной работе используется сглаживающее ядро Wendland  $C^2$ :

$$W(q; h) = \frac{7}{\pi h^2} \begin{cases} (1+4q)(1-q)^4, & 0 \leq q \leq 1, \\ 0, & q > 1, \end{cases} \quad W'(q; h) = \frac{dW}{dq}(q; h) = -\frac{140}{\pi h^2} \begin{cases} q(1-q)^3, & 0 \leq q \leq 1, \\ 0, & q > 1. \end{cases}$$

После дискретизации расчетная область представляется с помощью произвольного набора точек (SPH-частиц), а выражение (4) приближенно заменяется на

$$\langle F \rangle_a = \sum_b F_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b} W_{ab}, \quad (5)$$

где  $m_a$  — масса  $a$ -го тороидального элемента вещества (SPH-частицы) радиуса  $r_a$ . Размер частиц  $D_a$  в двумерном осесимметричном случае равен  $\sqrt{m_a/(2\pi r_a \rho_a)}$ . После дифференцирования уравнения (5) получаем оценку градиента функции  $F$  в точке  $a$ :

$$\langle \nabla F \rangle_a = \sum_b F_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b} \nabla_a W_{ab}, \quad (6)$$

где  $\nabla_a W_{ab} = -W'_{ab} \mathbf{e}_{ba}^R / h_{ab}$ ,  $\mathbf{e}_{ba}^R = (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) / |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|$ ,  $h_{ab} = \theta(D_a + D_b)$  — сглаживающая длина,  $\theta$  — параметр сглаживающей длины. Как правило, значение параметра  $\theta$  выбирается в диапазоне от 0.5 до 0.75.

Аналогично для векторного поля  $\mathbf{F}$  можно получить:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{F} \rangle_a = \sum_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b} \mathbf{F}_b \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (7)$$

Для краткости в дальнейшем угловые скобки будут опускаться при записи SPH-аппроксимации.

**2.1. Модифицированная осесимметрическая схема CSPH с улучшенной консервативностью.** Концепция контактного метода CSPH основана на замене средних значений скоростей и давлений между парами взаимодействующих частиц в SPH-аппроксимации на соответствующие значения, полученные из решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва на контактной поверхности [3, 10]. Поэтому для построения осесимметрической схемы CSPH требуется получить базовые уравнения в таком виде, где средние значения скоростей и давлений легко можно заменить на соответствующие контактные значения, полученные из решения задачи Римана.

Осьсимметричная схема CSPH А. Н. Паршикова [10] описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b h_{ab}} 2 (U_{ab}^{R*} - U_a^R) W'_{ab} + \frac{U_a^r}{r_a}, \quad (8)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b \rho_a} 2 P_{ab}^* \nabla_a W_{ab}, \quad (9)$$

$$\frac{dE_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b \rho_a h_{ab}} 2 P_{ab}^* U_{ab}^{R*} W'_{ab} - \frac{P_a U_a^r}{r_a \rho_a}, \quad (10)$$

где

$$P_{ab}^* = \frac{P_b Z_a + P_a Z_b - Z_a Z_b (U_b^R - U_a^R)}{Z_a + Z_b}, \quad (11)$$

$$U_{ab}^{R*} = \frac{U_a^R Z_a + U_b^R Z_b - P_b + P_a}{Z_a + Z_b}. \quad (12)$$

Здесь  $Z = \rho C$  — акустическая жесткость материала,  $C$  — скорость звука,  $E = e + U^2/2$  — полная удельная энергия,  $U_{ab}^{R*}$  — компонента скорости вдоль оси  $R$  локальной системы координат  $RT$ , вычисленная в точке контакта частиц (рис. 1). Ось  $R$  соединяет центры частиц и направлена из точки  $a$  в точку  $b$ .

Эта схема не удовлетворяет законам сохранения даже при отсутствии граничных условий.

Для получения модифицированной осьсимметричной схемы CSPH потребуются следующие тождества:

$$\nabla P = \frac{\nabla(f(r; A)P) - P \nabla f(r; A)}{f(r; A)} = \frac{\nabla(f(r; A)P) + P \nabla f(r; A)}{f(r; A)} - 2P \frac{f'(r; A)}{f(r; A)} \mathbf{e}^r, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\nabla \cdot (f(r; A)\mathbf{U}) - \mathbf{U} \cdot \nabla f(r; A)}{f(r; A)}, \quad (14)$$

где  $f(r; A)$  — некоторая гладкая функция радиальной координаты  $r$ , зависящая от параметра  $A$ ,  $\mathbf{e}^\alpha$  ( $\alpha = r, z$ ) — единичные орты цилиндрической системы координат  $rz$ .

Используя (13) и (6), получим уравнение движения в виде:

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi \rho_b \rho_a r_b} \frac{f(r_b; A)}{f(r_a; A)} (P_a + P_b) \nabla_a W_{ab} + 2 \frac{P_a f'(r_a; A)}{\rho_a f(r_a; A)} \mathbf{e}^r. \quad (15)$$

Используя (14) и (7), получим уравнение неразрывности в виде:

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{2\pi \rho_b r_b} \frac{f(r_b; A)}{f(r_a; A)} (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_a) \cdot \nabla_a W_{ab} + \frac{U_a^r}{r_a}. \quad (16)$$

Уравнение для внутренней энергии запишем следующим образом:

$$\frac{de_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi \rho_b \rho_a r_b} \frac{f(r_b; A)}{f(r_a; A)} \frac{P_a + P_b}{2} (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_a) \cdot \nabla_a W_{ab} - \frac{P_a U_a^r}{\rho_a r_a}.$$

Тогда уравнение для полной энергии принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dE_a}{dt} &= \frac{de_a}{dt} + \mathbf{U}_a \cdot \frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = \\ &= -\sum_b \frac{m_b}{2\pi \rho_b \rho_a r_b} \frac{f(r_b; A)}{f(r_a; A)} \frac{P_a + P_b}{2} (\mathbf{U}_b + \mathbf{U}_a) \cdot \nabla_a W_{ab} + \left( \frac{2f'(r_a; A)}{f(r_a; A)} - \frac{1}{r_a} \right) \frac{P_a U_a^r}{\rho_a}. \end{aligned} \quad (17)$$

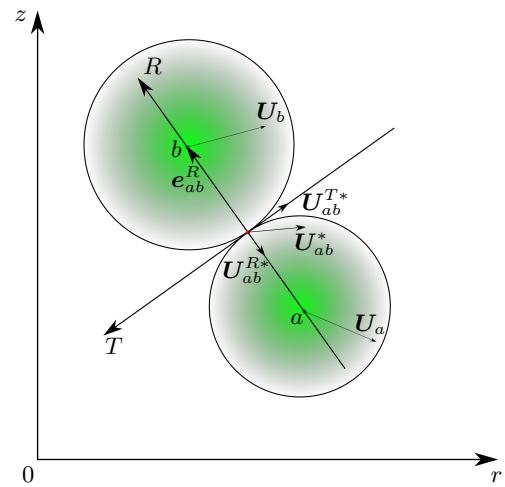


Рис. 1. Взаимодействие частиц в локальной системе координат

Fig. 1. Particle interaction in the local coordinate system



Пусть теперь в уравнениях (15)–(17)  $A = r_a$ , а  $f(r; r_a) = (r + r_a)/(2r_a)$ . Тогда после подстановки решения задачи Римана в уравнения (15)–(17) получим схему осесимметричного контактного метода SPH, описываемую следующими уравнениями:

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = - \sum_b \frac{m_b}{\pi \rho_b h_{ab}} \frac{(r_a + r_b)}{2r_a r_b} (U_{ab}^{R*} - U_a^R) W'_{ab} + \frac{U_a^r}{r_a}, \quad (18)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = - \sum_b \frac{m_b}{\pi \rho_b \rho_a} \frac{(r_a + r_b)}{2r_a r_b} P_{ab}^* \nabla_a W_{ab} + \frac{P_a}{\rho_a r_a} \mathbf{e}^r, \quad (19)$$

$$\frac{dE_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{\pi \rho_b \rho_a h_{ab}} \frac{(r_a + r_b)}{2r_a r_b} P_{ab}^* U_{ab}^{R*} W'_{ab}. \quad (20)$$

Поскольку в правых частях уравнений (18)–(20) сформировалась комбинация  $(r_a + r_b)/(2r_a r_b)$ , равная обратной величине от среднего гармонического  $r_a$  и  $r_b$ , то эта схема будет называться схемой “среднее гармоническое”.

Легко заметить, что схема “среднее гармоническое” удовлетворяет закону сохранения полной энергии (предполагается, что никакие дополнительные алгоритмы не применяются, в том числе граничные условия):

$$\frac{dE}{dt} = \sum_a \sum_b \frac{m_b}{\pi \rho_b \rho_a h_{ab}} \frac{(r_a + r_b)}{2r_a r_b} P_{ab}^* U_{ab}^{R*} W'_{ab} = \sum_a \sum_{b < a} \frac{m_b}{\pi \rho_b \rho_a h_{ab}} \frac{(r_a + r_b)}{2r_a r_b} P_{ab}^* (U_{ab}^{R*} + U_{ba}^{R*}) W'_{ab} = 0,$$

так как проекция контактной скорости  $U_{ab}^{R*}$  на ось  $R$  локальной системы координат меняет знак при перестановке индексов  $a$  и  $b$ , то есть при переходе от локальной системы координат  $RT$ , связанной с частицей  $a$ , к локальной системе координат  $RT$ , связанной с частицей  $b$ . По той же причине схема “среднее гармоническое” удовлетворяет закону сохранения импульса.

В целях снижения схемной вязкости в формулах (11) и (12) вместо значений физических величин, относящихся к частицам  $a$  и  $b$ , можно использовать значения  $\{P, \rho, C, U^\alpha\} = \Phi$  “справа” (со стороны частицы  $b$ , далее используется индекс  $r$ ) и “слева” (со стороны частицы  $a$ , далее используется индекс  $l$ ), которые реконструируются на контакте частиц при помощи градиентов (Smoothed Particle Hydrodynamics method with Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws (MUSCL-SPH) [19, 20]):

$$\Phi_l = \Phi_a + \frac{1}{2} \delta\Phi_l, \quad \Phi_r = \Phi_b - \frac{1}{2} \delta\Phi_r.$$

Величины  $\delta\Phi_l$  и  $\delta\Phi_r$  рассчитываются с использованием ограничителя наклона “minmod”:

$$\delta\Phi_l = \text{minmod}(\Phi_b - \Phi_a, \nabla\Phi_a \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)), \quad \delta\Phi_r = \text{minmod}(\nabla\Phi_b \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a), \Phi_b - \Phi_a).$$

Для поддержания оптимальной упаковки SPH-частиц используется алгоритм сдвига частиц из работы [21].

Для интегрирования скорости, энергии и координат по времени используется схема Эйлера первого порядка:

$$\mathbf{U}_a^{n+1} = \mathbf{U}_a^n + \left( \frac{d\mathbf{U}_a}{dt} \right)^n \Delta t^n, \quad E_a^{n+1} = E_a^n + \left( \frac{dE_a}{dt} \right)^n \Delta t^n, \quad \mathbf{r}_a^{n+1} = \mathbf{r}_a^n + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_a^{n+1} + \mathbf{U}_a^n) \Delta t^n,$$

а для интегрирования плотности используется уравнение

$$\rho_a^{n+1} = \rho_a^n \exp \left( -\Delta t^n \left( \frac{d\varepsilon_a}{dt} \right)^n \right).$$

Шаг выбирается по критерию Куранта

$$\Delta t = \text{CFL} \min_a \left( \frac{D_a}{\sqrt{C_a^2 + (4D_a d\varepsilon_a/dt)^2}} \right),$$

где, как правило, для схемы CSPH используется  $\text{CFL} = 0.3 \div 0.5$ , а для MUSCL-SPH полагается  $\text{CFL} = 0.1$ .

Предложенная осесимметричная схема “среднее гармоническое” ориентирована на моделирование сжимаемых сред, хотя может быть применена и для моделирования слабосжимаемых сред за счет выбора уравнения состояния [15].

## 2.2. Условие вблизи оси симметрии.

У частиц вблизи оси симметрии условие нормировки

$$\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b|r_b|} W_{ab} = 1$$

существенно нарушается, так как для них отсутствуют соседние частицы при  $r < 0$ . Чтобы решить эту проблему, необходимо ввести особое граничное условие на оси симметрии, при котором для каждой частицы расчетной области вблизи оси создается ее зеркальная копия (за счет зеркального отражения за ось симметрии) в виртуальной области.

Схема “среднее гармоническое” позволяет производить учет взаимодействия частиц с отраженными относительно оси симметрии частицами. Однако практика показывает, что лучшие результаты достигаются при локальном переходе к численной схеме А. Н. Паршикова [10] вблизи оси симметрии (в приведенных ниже формулах вместо  $r_b$  написано  $|r_b|$ , так как эти уравнения используются при взаимодействии с частицами в виртуальной области, где  $r_b < 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_a}{dt} &= - \sum_b \frac{m_b}{\pi|r_b|\rho_b h_{ab}} (U_{ab}^{R*} - U_a^R) W'_{ab} + \frac{U_a^r}{r_a}, \\ \frac{d\mathbf{U}_a}{dt} &= - \sum_b \frac{m_b}{\pi|r_b|\rho_b \rho_a} P_{ab}^* \nabla_a W_{ab}, \\ \frac{dE_a}{dt} &= \sum_b \frac{m_b}{\pi|r_b|\rho_b \rho_a h_{ab}} U_{ab}^{R*} P_{ab}^* W'_{ab} - \frac{P_a U_a^r}{r_a \rho_a}, \end{aligned}$$

где суммирование по индексу  $b$  распространяется не только на физических соседей частицы  $a$ , но и на все зеркально отраженные частицы из области влияния частицы  $a$ , включая ее саму. При отражении относительно оси симметрии преобразуются скорости и координаты частиц:  $r'_a = -r_a$ ,  $(U_a^r)' = -U_a^r$ . Локальный переход осуществляется только для частиц, находящихся ближе к оси  $z$ , чем удвоенная сглаживающая длина  $h$  ( $r < 2h$ ).

**2.3. Задание граничных условий. Моделирование поверхностного натяжения.** Для моделирования действия внешнего давления используются фиктивные частицы, с которыми взаимодействуют граничные частицы. Каждая граничная частица взаимодействует со своей фиктивной частицей. Алгоритм определения граничных частиц был взят из работы [22]. Он основан на вычислении минимального собственного значения  $\lambda_{\min}$  матрицы

$$\mathbf{L}_a = \sum_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b} \nabla_a W_{ab} \otimes (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a). \quad (21)$$

Если  $\lambda_{\min} < 0.75$ , то частица считается граничной. Для частиц, находящихся вблизи оси, вклад в сумму (21) вносят не только соседние частицы, но и частицы, отраженные относительно оси симметрии.

При постоянном давлении  $P_0$  и отсутствии внешних сил ускорение должно равняться нулю:

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = - \frac{1}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b} 2P_0 \nabla_a W_{ab} = 0.$$

Из этих соображений можно определить вес фиктивных частиц. Под весом частицы  $b$ , которая является соседней для частицы  $a$ , здесь понимается вектор, стоящий в SPH-сумме при  $-2P_{ab}^*/\rho_a$  в уравнении движения, которое определяет ускорение частиц. Он должен быть выбран таким образом, чтобы ускорение граничных частиц равнялось нулю при равенстве внутреннего давления и давления в фиктивной частице (пусть давление равно  $P_0$ ):

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = - \sum_b \frac{m_b}{\pi \rho_b \rho_a} \frac{(r_a + r_b)}{2r_a r_b} P_0 \nabla_a W_{ab} + \frac{P_0}{\rho_a r_a} \mathbf{e}^r - \frac{2P_0}{\rho_a} \mathbf{b} \mathbf{w}_a = 0, \quad (22)$$

откуда весовой вектор для фиктивной частицы, связанной с частицей  $a$ , равен:

$$\mathbf{b} \mathbf{w}_a = - \sum_b \frac{m_b}{2\pi \rho_b} \frac{r_a + r_b}{2r_a r_b} \nabla_a W_{ab} + \frac{\mathbf{e}^r}{2r_a}. \quad (23)$$

Действие фиктивной частицы  $g$  на граничную частицу с номером  $a$  описывается при помощи следующих уравнений:

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{\pi\rho_b h_{ab}} \frac{r_a + r_b}{2r_a r_b} (U_{ab}^{R*} - U_a^R) W'_{ab} + \frac{U_a^r}{r_a} + 2(U_{ag}^{R*} - U_a^R) |\mathbf{bw}_a|, \quad (24)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{\pi\rho_b \rho_a} \frac{r_a + r_b}{2r_a r_b} P_{ab}^* \nabla_a W_{ab} + \frac{P_a}{\rho_a r_a} \mathbf{e}^r - \frac{2P_{ag}^*}{\rho_a} \mathbf{bw}_a, \quad (25)$$

$$\frac{dE_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{\pi\rho_a \rho_b h_{ab}} \frac{r_a + r_b}{2r_a r_b} P_{ab}^* U_{ab}^{R*} W'_{ab} - \frac{1}{\rho_a} 2P_{ag}^* U_{ag}^{R*} |\mathbf{bw}_a|. \quad (26)$$

При учете взаимодействия с фиктивной частицей (последние слагаемые уравнений (24)–(26)) единичный орт оси  $R$  локальной системы координат определяется как  $\mathbf{e}_{ag}^R = -\mathbf{bw}_a / |\mathbf{bw}_a|$ .

Стоит отметить, что описанное граничное условие применимо не только для осесимметричного случая. Оно прямо переносится на метод CSPH в декартовых координатах. Кроме того, данное граничное условие является довольно общим. За счет выбора состояния фиктивной частицы (то есть выбора ее скорости, давления, плотности и скорости звука) можно задавать различные граничные условия.

В случае невязкой жидкости с постоянным коэффициентом поверхностного натяжения на границе действует сила, направленная вдоль внешней нормали  $\mathbf{n}$  внутрь жидкости, удельное значение которой (на единицу площади поверхности) равно [23]

$$-\mathbf{n}P^* = -\mathbf{n}\sigma\kappa,$$

где  $\kappa$  — кривизна,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. В контексте контактного метода SPH величина  $P^*$  — давление на контакте между граничной частицей и фиктивной.

Для моделирования поверхностного натяжения давление в фиктивной частице  $g$ , взаимодействующей с граничной частицей  $a$ , задается равным давлению Лапласа  $\sigma\kappa$ , скорость — равной скорости граничной частицы  $a$ , а акустическую жесткость фиктивной частицы целесообразно выбрать равной соответствующей жесткости внешней среды. В данной работе акустическая жесткость фиктивной частицы равна акустической жесткости воздуха (стоит заметить, что при таком выборе  $Z_g \ll Z_a$  и, согласно (11),  $P_{ag}^* \approx \sigma\kappa$ ).

Для определения кривизны  $\kappa$  и внешней нормали используется алгоритм из работы [13]. Вектор внешней нормали к свободной поверхности определяется следующим образом:

$$\mathbf{n}_a = \frac{\boldsymbol{\nu}_a}{|\boldsymbol{\nu}_a|}, \quad \boldsymbol{\nu}_a = \sum_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b} \nabla_a W_{ab}.$$

Кривизна равна

$$\kappa = 2 \frac{\sum_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b} (\mathbf{n}_b - \mathbf{n}_a) \cdot \nabla_a W_{ab}}{\sum_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) \cdot \nabla_a W_{ab}} + \frac{n^r_a}{r_a},$$

где  $n^r$  — радиальная компонента вектора внешней нормали к поверхности. Для повышения точности оценки кривизны  $\kappa$  нормали  $\mathbf{n}$  вычисляются с использованием увеличенной сглаживающей длины.

### 3. Примеры численных расчетов.

**3.1. Влияние граничного условия вблизи оси симметрии на консервативность.** Предлагаемая схема осесимметричного метода CSPH консервативна, однако описанное выше граничное условие вблизи оси симметрии нарушает консервативность, что приводит к изменению полного импульса и полной энергии. Для оценки изменения полной энергии и полного импульса, связанного с граничным условием вблизи оси симметрии, рассмотрим задачу о соударении двух капель воды разного размера. Модель поверхностного натяжения не применяется. Начальные радиусы капель равны 1 мм и 0.5 мм. Начальные скорости капель равны 50 м/с, параллельны оси  $z$  и противоположно направлены друг другу. Начальные размеры SPH-частиц равны  $D_0 = 10$  мкм. Пространственная дискретизация капель была выполнена с помощью расстановки SPH-частиц полукругом (пример такой расстановки (упаковки) SPH-частиц показан

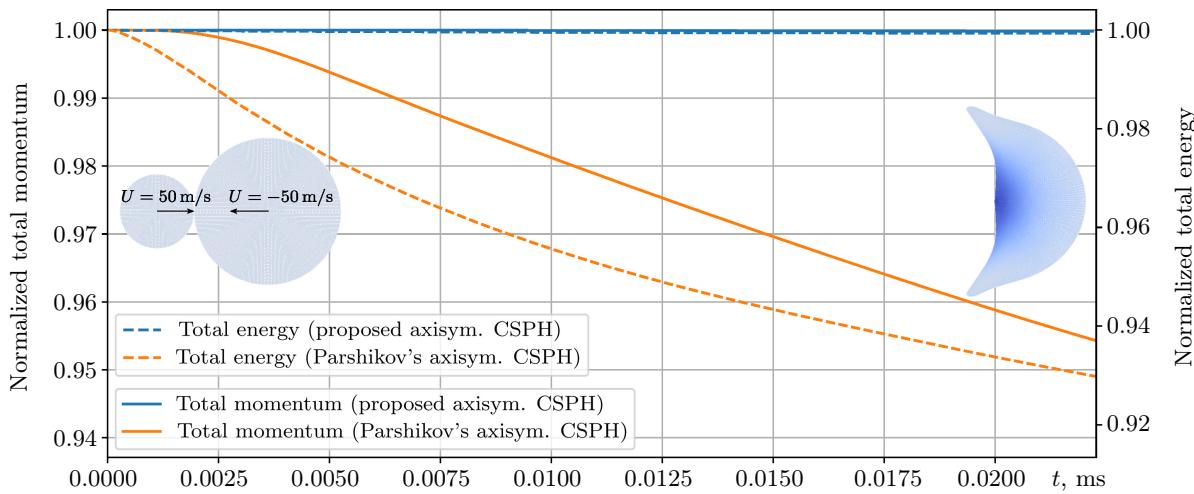


Рис. 2. Графики изменения полного импульса и полной энергии в задаче о соударении двух капель воды при использовании предложенной осесимметричной схемы CSPH “среднее гармоническое” и схемы осесимметричного метода CSPH А. Н. Паршикова [10]. Для наглядности на рисунке также показано как выглядели капли до и после столкновения

Fig. 2. Graphs illustrating the change in total momentum and total energy in the problem of the collision of two water droplets, using the proposed axisymmetric CSPH “harmonic mean” scheme and the axisymmetric CSPH method of A. N. Parshikov [10]. For clarity, the figure also depicts the droplet configuration before and after the collision

на рис. 4 с). Общее число SPH-частиц равно 20045, а множитель CFL = 0.5. Для моделирования воды использовалось уравнение состояния в форме Ми–Грюнайзена

$$P = P_{\text{ref}} + \gamma \rho (e - e_{\text{ref}})$$

с двумя опорными кривыми:

$$P_{\text{ref}} = \begin{cases} \rho_0 c_a^2 \frac{1-x}{(1-s_a(1-x))^2}, & x \leq 1, \\ \rho_0 c_a^2 (1-x), & x > 1, \end{cases} \quad e_{\text{ref}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \frac{c_a(1-x)}{1-s_a(1-x)} \right]^2, & x \leq 1, \\ c_a^2 (1-x)^2 / 2, & x > 1, \end{cases}$$

где  $x = \rho_0 / \rho$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_a = 1483 \text{ м/с}$ ,  $s_a = 2$ ,  $\gamma = 2$ .

На рис. 2 показана эволюция полного импульса и полной энергии (нормированных на начальные значения) при использовании предлагаемой осесимметричной схемы CSPH “среднее гармоническое” и схемы осесимметричного метода CSPH А. Н. Паршикова [10]. С физической точки зрения нормированные значения полного импульса и полной энергии должны быть равны единице и не должны меняться. По приведенным данным видно, что предлагаемая в настоящей работе схема значительно точнее сохраняет полный импульс и полную энергию, так как она консервативна, а привнесенные ошибки носят локальный характер вблизи оси симметрии.

**3.2. Применение схемы “среднее гармоническое” к моделированию ударных волн.** Для демонстрации работы предложенной осесимметричной схемы при моделировании сжимаемых течений рассмотрим осесимметричную задачу о распаде разрыва в идеальном газе [4]. Начальные условия задаются следующим образом:

$$\rho = \begin{cases} 1 \text{ кг/м}^3, & r \leq 0.4 \text{ м}, \\ 0.125 \text{ кг/м}^3, & r > 0.4 \text{ м}, \end{cases} \quad P = \begin{cases} 1 \text{ Па}, & r \leq 0.4 \text{ м}, \\ 0.1 \text{ Па}, & r > 0.4 \text{ м}. \end{cases}$$

В начальный момент времени газ поконится. Моделируется идеальный газ с уравнением состояния  $P = (\gamma - 1)\rho e$  и  $\gamma = 1.4$ . Расчет ведется до момента времени  $t = 0.25$  с. На рис. 3 показаны профили плотности и давления, полученные с помощью схемы “среднее гармоническое”, поведение которых сравнивается с

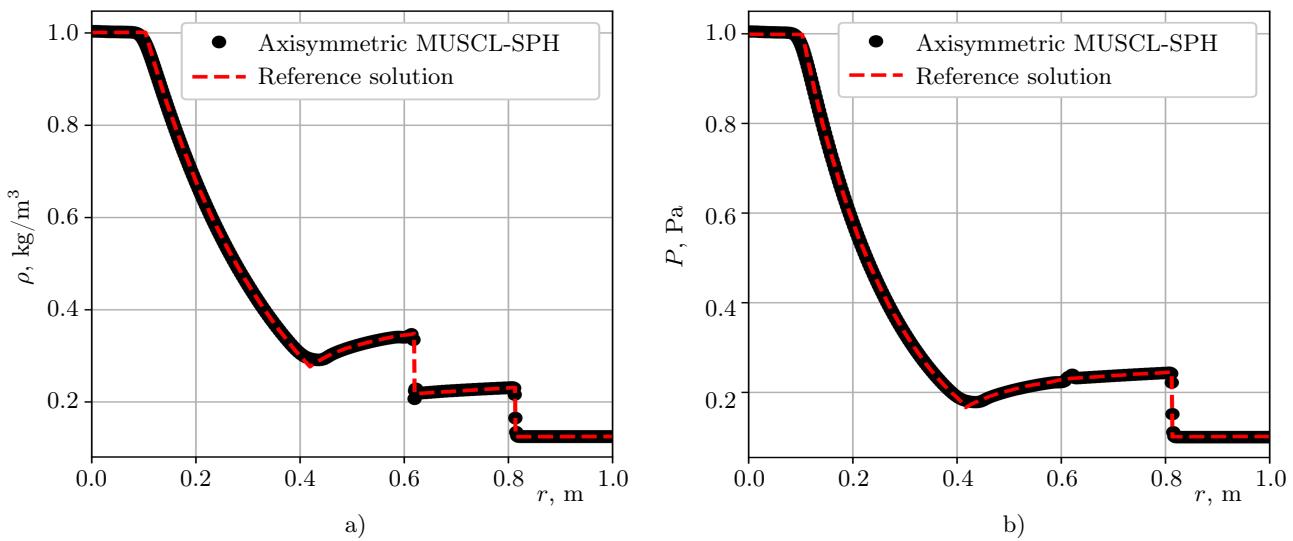


Рис. 3. Моделирование распада разрыва в идеальном газе с помощью схемы “среднее гармоническое” с кусочно-линейной реконструкцией значений на контакте (MUSCL-SPH): а) распределение плотности; б) распределение давления. Референсное решение взято из работы [4]

Fig. 3. Simulation of the Riemann problem in an ideal gas using the “harmonic mean” scheme with piecewise linear reconstruction at the contact plane (MUSCL-SPH): a) density distribution; b) pressure distribution.

The reference solution is taken from [4]

референсным решением [4]. При моделировании использовалось 500 частиц с начальным размером  $D_0 = 0.002$  м. Параметр сглаживающей длины  $\theta = 0.57$ . Начальная упаковка частиц была равномерной с шагом  $D_0$ , а множитель CFL = 0.1.

Результаты моделирования совпадают с референсным решением, что подтверждает применимость разработанной схемы к моделированию ударных волн и корректность условия вблизи оси симметрии. Небольшой скачок в окрестности контактного разрыва ( $r \approx 0.62$  м) связан с тем, что в этой области присутствует переход от более крупных частиц к более мелким.

**3.3. Установление давления Лапласа в капле.** Базовым тестом модели поверхностного натяжения является тест на установление давления Лапласа, соответствующего заданному коэффициенту поверхностного натяжения. Этот тест часто используется в литературе для валидации модели поверхностного натяжения [13, 17, 18]. Избыток давления под искривленной поверхностью согласно формуле Лапласа равен:

$$P_{\text{Laplace}} = \frac{2\sigma}{R}, \quad (27)$$

где  $R$  — радиус капли.

На рис. 4 а приведено заданное значение коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  (сплошная линия), а также найденное по формуле (27), где вместо давления  $P_{\text{Laplace}}$  подставлялось давление, полученное по результатам моделирования при помощи осесимметричного метода CSPH с предложенной моделью поверхностного натяжения при разных размерах капли. Капля состоит из воды. Коэффициент поверхностного натяжения был задан равным  $\sigma = 0.074$  Н/м. Для моделирования использовалось линейное уравнение состояния:

$$P = C_0^2(\rho - \rho_0),$$

где  $C_0 = 1483$  м/с,  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Были проведены расчеты для трех различных размеров капель: 0.46 мкм, 0.93 мкм и 1.4 мкм. Начальные размеры частиц в этих трех случаях равнялись 8.33 нм, 16.66 нм и 25 нм. Во всех случаях при моделировании использовалось 3600 частиц. Изначально частицы занимали прямоугольную область на плоскости  $rz$  (соответствует круговому цилиндру в 3D), затем они приходили в движение под действием поверхностного натяжения и занимали полукруг на плоскости  $rz$  (соответствует шаровой капле в 3D). Параметр сглаживающей длины  $\theta = 0.5$ , множитель CFL = 0.5.

Видно, что полученные результаты с высокой точностью согласуются с формулой Лапласа.

**3.4. Малые колебания капли.** Данный тест широко используется в литературе [12, 13, 17, 18] и имеет целью продемонстрировать корректность модели поверхностного натяжения в динамических задачах. Известно [24], что период малых колебаний капли определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho R^3}{8\sigma}}, \quad (28)$$

где  $R$  — равновесный радиус капли,  $\rho$  — плотность капли.

Рассматривается капля воды радиусом  $R = 25$  нм. При моделировании использовалось линейное уравнение состояния. Начальный размер частиц равен  $D_0 = 0.71$  нм. Количество участвовавших в моделировании частиц равнялось 2021. Начальная упаковка частиц показана на рис. 4 с. Параметр слаживающей длины  $\theta = 0.5$ , множитель CFL = 0.1.

В начальный момент времени в капле задается поле скоростей:

$$U^r = 10 \frac{r}{R} \left(1 - \frac{z^2}{R\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{R}\right),$$

$$U^z = -10 \frac{z}{R} \left(1 - \frac{r^2}{R\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{R}\right).$$

Начальная плотность соответствовала давлению Лапласа.

На рис. 4 б показана зависимость периода осцилляций капли от коэффициента поверхностного натяжения, полученная при использовании предложенного осесимметричного метода с кусочно-линейной реконструкцией значений на контакте частиц MUSCL, а также приведена кривая  $T(\sigma)$  (28). Полученные значения периода малых колебаний капли согласуются с формулой Рэлея с точностью не хуже 9%. Небольшое увеличение периода, вероятно, связано с влиянием схемной вязкости. При малых значениях коэффициента поверхностного натяжения влияние схемной вязкости на период малых колебаний максимально. При  $\sigma = 0.074$  Н/м различие периода колебаний с формулой Рэлея составило 6%.

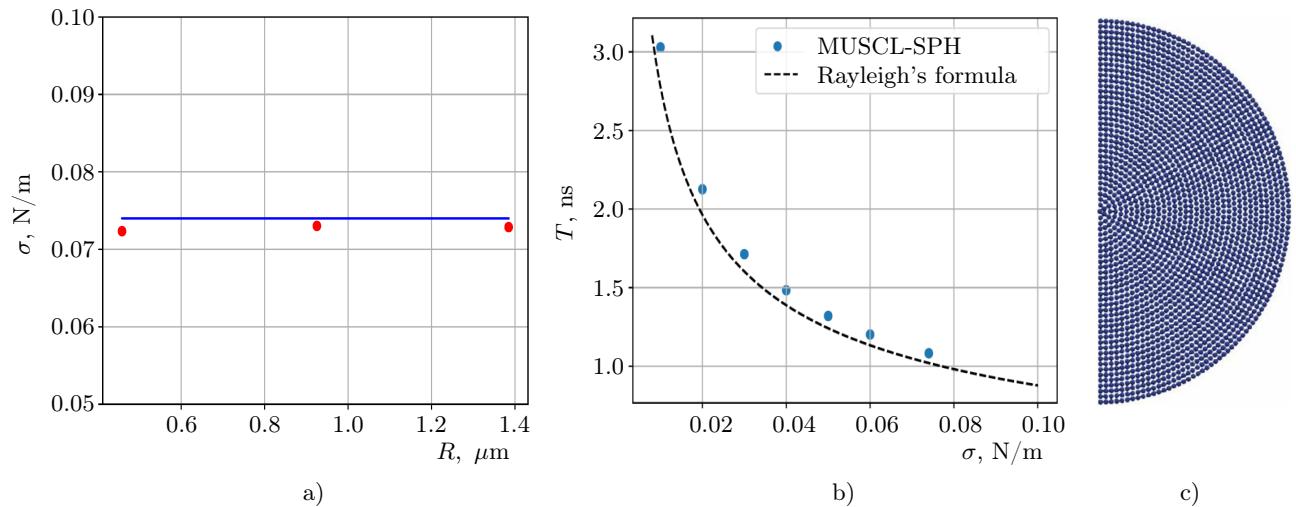


Рис. 4. Моделирование эффектов поверхностного натяжения: а) сравнение коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$ , рассчитанного по установившемуся давлению в капле воды при разных радиусах капли (красные точки), с заданным значением поверхностного натяжения (сплошная линия); б) зависимость периода малых осцилляций капли воды от коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  (проводится сравнение с результатами, следующими из формулы Рэлея); в) начальная упаковка SPH-частиц в тесте с малыми колебаниями капли

Fig. 4. Simulation of surface tension effects: a) comparison of the surface tension coefficient  $\sigma$  calculated from the equilibrium pressure within a water droplet for different droplet radii (red points) with the prescribed surface tension value (solid line); b) dependence of the period of small-amplitude oscillations of a water droplet on the surface tension coefficient  $\sigma$  (compared with results following from Rayleigh's formula); c) initial packing of SPH particles in the small-amplitude droplet oscillation test



**3.5. Скорость Тейлора–Кулика.** Рассматривается задача о стягивании тонкой пленки со свободных границ под действием поверхностного натяжения. Материал — вода с линейным уравнением состояния. Скорость движения возмущения с границы (точки перехода от пленки к “валику”, образованному поверхностным натяжением) зависит от толщины пленки и коэффициента поверхностного натяжения и определяется формулой Тейлора–Кулика [25]:

$$U_{TC} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho\Delta H}}.$$

В расчете рассмотрена пленка с толщиной  $\Delta H = 0.5$  мкм. Радиус пленки выбран достаточно большим (это необходимо при сравнении со скоростью, следующей из формулы Тейлора–Кулика, поскольку последняя справедлива для тонких пленок с неискривленными границами). Пленка имеет отверстие в центре в начальный момент времени. Начальный внутренний радиус пленки равен 1 м, а начальный внешний радиус равен 1.00001 м. На рис. 5 а) представлены результаты моделирования стягивания тонкой пленки со свободных границ под действием поверхностного натяжения предложенным осесимметричным методом CSPH в момент времени  $t = 0.19$  мкс. Для наглядности на рис. 5 б) показана трехмерная визуализация течения в небольшом отрезке пленки. Изначально частицы занимали прямоугольную область на плоскости  $rz$ . Начальная упаковка SPH-частиц является равномерной квадратной упаковкой. Начальный размер SPH-частиц равен  $D_0 = 12.5$  нм. Всего при моделировании использовалось 32000 частиц. Параметр сглаживающей длины был равен  $\theta = 0.5$ , множитель CFL = 0.1. Моделирование проводилось с использованием разработанного осесимметричного метода с кусочно-линейной реконструкцией значений на контакте MUSCL-SPH.

Теоретическое значение скорости  $U_{TC}$  по формуле Тейлора–Кулика равно 17.2 м/с. Полученное в численном эксперименте значение равно 17.1 м/с. Приведенные результаты свидетельствуют о применимости рассматриваемой модели поверхностного натяжения при моделировании динамических задач со сложной геометрией.

**3.6. Развитие неустойчивости Рэлея–Плато.** Рассматривается цилиндрическая струя воды в периодических граничных условиях с небольшим возмущением скорости в начальный момент времени. Аналогичная задача исследовалась в работах [18, 26]. Радиус цилиндра в начальный момент времени равен  $R_0 = 10$  нм. Период возмущения скорости равен  $\lambda = 10R_0$ ,  $kR_0 = 2\pi/10$ , где  $k$  — волновое число. Возмущение скорости имеет вид:

$$U^z = U_0 \sin(2\pi z/\lambda),$$

где  $U_0 = 1$  м/с.

Вода моделируется с помощью линейного уравнения состояния. Начальный размер SPH-частиц равен  $D_0 = 0.17$  нм. Всего при моделировании использовалось 36000 частиц. Начальная упаковка SPH-частиц — равномерная квадратная упаковка. Параметр сглаживающей длины  $\theta = 0.5$ , множитель CFL = 0.3.

Так как изучение свойств схемной вязкости осесимметричного метода CSPH не является целью данной работы, то ограничимся линейной теорией капиллярной неустойчивости невязких жидкых струй. Согласно работе Рэлея [27], скорость роста возмущений  $\kappa$  ( $r \propto \exp(\kappa t)$ , где  $r$  — радиус центрального утолщения) определяется формулой

$$\kappa^2 = \frac{\sigma}{\rho R_0^3} \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} kR_0 (1 - (kR_0)^2).$$

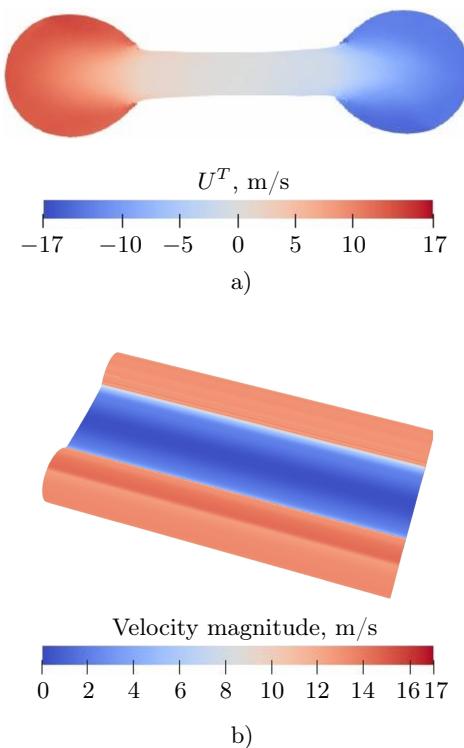


Рис. 5. Действие поверхностного натяжения на тонкую пленку: а) результат осесимметричного моделирования; б) трехмерная визуализация части пленки

Fig. 5. Action of surface tension on a thin film:  
 a) result of axisymmetric simulation;  
 b) three-dimensional visualization of a partial region of the film

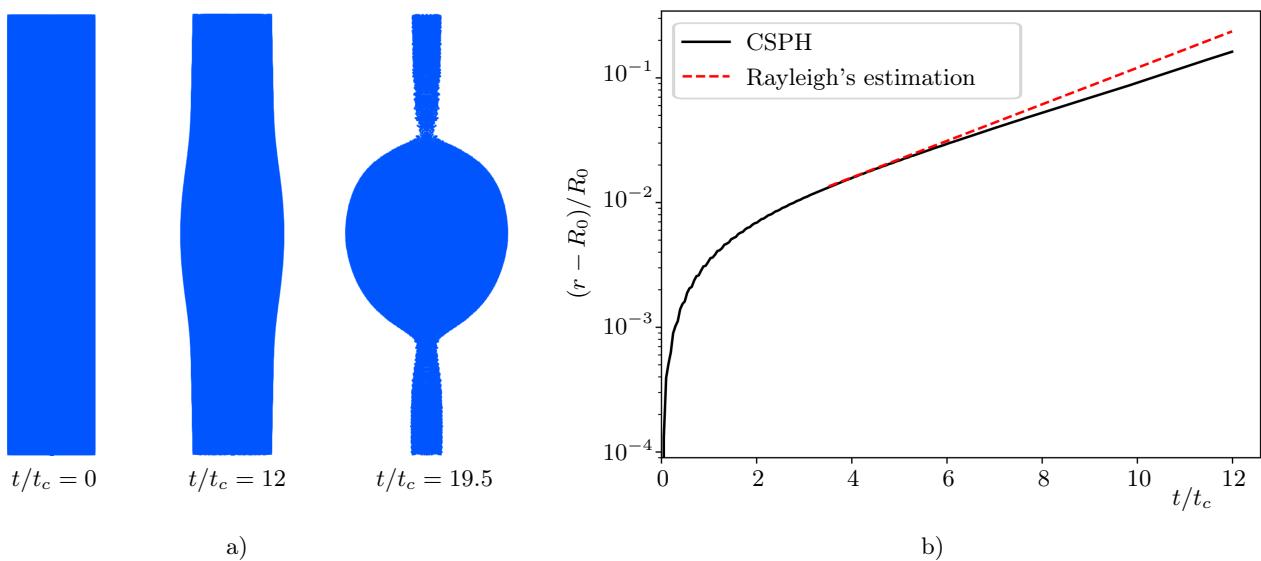


Рис. 6. Развитие неустойчивости Рэлея–Плато: а) эволюция малых возмущений; б) сравнение скорости роста возмущений с предсказанием, следующим из формулы Рэлея

Fig. 6. Development of the Rayleigh–Plateau instability: a) evolution of small perturbations; b) comparison of the perturbation growth rate with the prediction according to Rayleigh's formula

Здесь  $I_0(\cdot)$  и  $I_1(\cdot)$  — модифицированные функции Бесселя чисто мнимого аргумента первого рода (функции Инфельда). Характерное время развития неустойчивости равно  $t_c = \sqrt{\rho R_0^3/\sigma} = 0.116$  нс. На рис. 6 а демонстрируется эволюция развития малых возмущений в цилиндрической струе по результатам моделирования предложенным осесимметричным методом CSPH. На рис. 6 б показано сравнение эволюции радиуса центральной капли с предсказанием по формуле Рэлея. В момент времени  $t/t_c \approx 3.5$  происходит переход к экспоненциальному росту. Скорость роста возмущений близка к оценке Рэлея, однако CSPH-кривая идет несколько ниже, что согласуется с результатами моделирования другими методами [26] и является следствием наличия схемной вязкости.

**4. Заключение.** В настоящей работе предложена схема осесимметричного контактного метода SPH с улучшенной точностью сохранения полного импульса и полной энергии. В общем случае, когда вблизи оси симметрии присутствуют SPH-частицы, применяется специальное граничное условие. Условие вблизи оси симметрии нарушает консервативность, однако, благодаря тому, что консервативность нарушается за счет частиц вблизи оси, а не во всей расчетной области в целом, численное (то есть нефизическое) изменение полного импульса и полной энергии значительно меньше, чем в классической осесимметричной схеме А. Н. Паршикова [10].

В предложенную схему введена модель поверхностного натяжения. Она реализована с использованием фиктивных частиц, с которыми взаимодействуют частицы на свободной поверхности.

Верификация предложенных численных алгоритмов для моделирования течений сжимаемых жидкостей с учетом поверхностного натяжения проведена на задачах об установлении давления Лапласа, малых колебаниях капли и скорости стягивания тонкой пленки. Полученные результаты хорошо согласуются с теоретическими оценками. Проведено моделирование развития неустойчивости Рэлея–Плато. Скорость роста возмущений близка к оценке Рэлея, однако наблюдается влияние схемной вязкости, которая приводит к немного заниженным значениям. Учет физической вязкости и корректировка схемной вязкости требуют дальнейшего развития предложенной осесимметричной схемы. Для этого можно воспользоваться идеями из работы [28].

## Список литературы

1. Lucy L.B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // The Astronomical Journal. 1977. **82**, N 12. 1013–1024. doi [10.1086/112164](https://doi.org/10.1086/112164).



2. Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. **181**, N 3. 375–389. doi [10.1093/mnras/181.3.375](https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375).
3. Паршиков А.Н. Применение решения задачи Римана в методе частиц // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. **39**, № 7. 1216–1225. <https://www.mathnet.ru/links/5b072952639f95bbff3a74ed2d0873aa/zvmmf1657.pdf>. (Дата обращения: 17 октября 2025).
4. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction. Heidelberg: Springer Berlin, 2009. doi [10.1007/b79761](https://doi.org/10.1007/b79761).
5. Li M.-K., Zhang A.-M., Ming F.-R., Sun P.-N., Peng Y.-X. An axisymmetric multiphase SPH model for the simulation of rising bubble // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. **366**, 113039. doi [10.1016/j.cma.2020.113039](https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113039).
6. Kurilovich D., Basko M.M., Kim D.A., Torretti F., Schupp R., Visschers J.C., Scheers J., Hoekstra R., Ubachs W., Versolato O.O. Power-law scaling of plasma pressure on laser-ablated tin microdroplets // Physics of Plasmas. 2018. **25**, 012709. doi [10.1063/1.5010899](https://doi.org/10.1063/1.5010899).
7. Coleman C.S., Bicknell G.V. Jets with entrained clouds — I. Hydrodynamic simulations and magnetic field structure // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1985. **214**. 337–355. doi [10.1093/mnras/214.3.337](https://doi.org/10.1093/mnras/214.3.337).
8. Petschek A.G., Libersky L.D. Cylindrical smoothed particle hydrodynamics // Journal of Computational Physics. 1993. **109**, N 1. 76–83. doi [10.1006/jcph.1993.1200](https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1200).
9. Omang M., Børve S., Trulsen J. SPH in spherical and cylindrical coordinates // Journal of Computational Physics. 2006. **213**, N 1. 391–412. doi [10.1016/j.jcp.2005.08.023](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.08.023).
10. Parshikov A.N., Medin S.A., Loukashenko I.I., Milekhin V.A. Improvements in SPH method by means of interparticle contact algorithm and analysis of perforation tests at moderate projectile velocities // International Journal of Impact Engineering. 2000. **24**, N 8. 779–796. doi [10.1016/S0734-743X\(99\)00168-2](https://doi.org/10.1016/S0734-743X(99)00168-2).
11. Morris J.P. Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2000. **33**, N 3. 333–353. doi [10.1002/1097-0363\(20000615\)33:3<333::aid-fld11>3.0.co;2-7](https://doi.org/10.1002/1097-0363(20000615)33:3<333::aid-fld11>3.0.co;2-7).
12. Hu X.Y., Adams N.A. A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows // Journal of Computational Physics. 2006. **213**, N 2. 844–861. doi [10.1016/j.jcp.2005.09.001](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.09.001).
13. Adami S., Hu X.Y., Adams N.A. A new surface-tension formulation for multi-phase SPH using a reproducing divergence approximation // Journal of Computational Physics. 2010. **229**, N 13. 5011–5021. doi [10.1016/j.jcp.2010.03.022](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.03.022).
14. Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // Journal of Computational Physics. 1992. **100**, N 2. 335–354. doi [10.1016/0021-9991\(92\)90240-y](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90240-y).
15. Wang Z.-B., Chen R., Wang H., Liao Q., Zhu X., Li S.-Z. An overview of smoothed particle hydrodynamics for simulating multiphase flow // Applied Mathematical Modelling. 2016. **40**, N 23. 9625–9655. doi [10.1016/j.apm.2016.06.030](https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.06.030).
16. Nugent S., Posch H.A. Liquid drops and surface tension with smoothed particle applied mechanics // Phys. Rev. E. 2000. **62**, N 4. 4968–4975. doi [10.1103/PhysRevE.62.4968](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.4968).
17. Tartakovsky A., Meakin P. Modeling of surface tension and contact angles with smoothed particle hydrodynamics // Phys. Rev. E. 2005. **72**, N 2. 026301. doi [10.1103/PhysRevE.72.026301](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.026301).
18. Kondo M., Matsumoto J. Surface tension and wettability calculation using density gradient potential in a physically consistent particle method // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2021. **385**, 114072. doi [10.1016/j.cma.2021.114072](https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114072).
19. Fang X.-L., Colagrossi A., Wang P.-P., Zhang A.-M. An accurate and robust axisymmetric SPH method based on Riemann solver with applications in ocean engineering // Ocean Engineering. 2022. **244**, 110369. doi [10.1016/j.oceaneng.2021.110369](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.110369).
20. Rublev G.D., Parshikov A.N., Dyachkov S.A. Improving approximation accuracy in Godunov-type smoothed particle hydrodynamics methods // Applied Mathematics and Computation. 2025. **488**, 129128. doi [10.1016/j.amc.2024.129128](https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.129128).
21. Michel J., Vergnaud A., Oger G., Hermange C., Le Touzé D. On Particle Shifting Techniques (PSTs): Analysis of existing laws and proposition of a convergent multi-invariant law // Journal of Computational Physics. 2022. **459**, 110999. doi [10.1016/j.jcp.2022.110999](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.110999).
22. Marrone S., Colagrossi A., Le Touzé D., Graziani G. Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers // Journal of Computational Physics. 2010. **229**, N 10. 3652–3663. doi [10.1016/j.jcp.2010.01.019](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.01.019).
23. Ландау Л.Д., Либштадт Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
24. Strutt J.W. (Lord Rayleigh, F.R.S.). VI. On the capillary phenomena of jets // Proceedings of the Royal Society of London. 1879. **29**, N 196–199. 71–97. doi [10.1098/rsppl.1879.0015](https://doi.org/10.1098/rsppl.1879.0015).

25. *Taylor G.I.* The dynamics of thin sheets of fluid II. Waves on fluid sheets // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1959. **253**, N 1274. 296–312. doi [10.1098/rspa.1959.0195](https://doi.org/10.1098/rspa.1959.0195).
26. *Dai M., Schmidt D.P.* Adaptive tetrahedral meshing in free-surface flow // Journal of Computational Physics. 2005. **208**, N 1. 228–252. doi [10.1016/j.jcp.2005.02.012](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.02.012).
27. *Lord Rayleigh.* On the instability of jets // Proceedings of the London Mathematical Society. 1878. **s1-10**, N 1. 4–13. doi [10.1112/plms/s1-10.1.4](https://doi.org/10.1112/plms/s1-10.1.4).
28. *Parshikov A.N., Medin S.A., Rublev G.D., Dyachkov S.A.* Numerical viscosity control in Godunov-like smoothed particle hydrodynamics for realistic flows modeling // Physics of Fluids. 2024. **36**, N 1. 013101. doi [10.1063/5.0181276](https://doi.org/10.1063/5.0181276).

Получена  
31 июля 2025 г.

Принята  
26 сентября 2025 г.

Опубликована  
23 октября 2025 г.

### Информация об авторе

Георгий Дмитриевич Рублев — науч. сотр.; 1) Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики имени Н. Л. Духова, ул. Сущевская, 22, 127030, Москва, Российская Федерация; 2) Объединенный институт высоких температур РАН, ул. Ижорская, 13, стр. 2, 125412, Москва, Российская Федерация.

### References

1. L. B. Lucy, “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis,” *The Astronomical Journal*. **82** (12), 1013–1024 (1977). doi [10.1086/112164](https://doi.org/10.1086/112164).
2. R. A. Gingold, J. J. Monaghan, “Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. **181** (3), 375–389 (1977). doi [10.1093/mnras/181.3.375](https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375).
3. A. N. Parshikov, “Application of a solution to the Riemann problem in the SPH method,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **39** (7), 1216–1225 (1999). <https://www.mathnet.ru/links/5b072952639f95bbff3a74ed2d0873aa/zvmmf1657.pdf>. Cited October 17, 2025 [in Russian].
4. E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction* (Springer Berlin, Heidelberg, 2009). doi [10.1007/b79761](https://doi.org/10.1007/b79761).
5. M.-K. Li, A.-M. Zhang, F.-R. Ming, P.-N. Sun, Y.-X. Peng, “An axisymmetric multiphase SPH model for the simulation of rising bubble,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **366**, 113039 (2020). doi [10.1016/j.cma.2020.113039](https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113039).
6. D. Kurilovich, M. M. Basko, D. A. Kim, F. Torretti, R. Schupp, J. C. Visschers, J. Scheers, R. Hoekstra, W. Ubachs, O. O. Versolato, “Power-law scaling of plasma pressure on laser-ablated tin microdroplets,” *Phys. Plasmas*. **25**, 012709 (2018). doi [10.1063/1.5010899](https://doi.org/10.1063/1.5010899).
7. C. S. Coleman, G. V. Bicknell, “Jets with entrained clouds — I. Hydrodynamic simulations and magnetic field structure,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. **214** (3), 337–355 (1985). doi [10.1093/mnras/214.3.337](https://doi.org/10.1093/mnras/214.3.337).
8. A. G. Petschek, L. D. Libersky, “Cylindrical smoothed particle hydrodynamics,” *Journal of Computational Physics*. **109** (1), 76–83 (1993). doi [10.1006/jcph.1993.1200](https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1200).
9. M. Omang, S. Børve, J. Trulsen, “SPH in spherical and cylindrical coordinates,” *Journal of Computational Physics*. **213** (1), 391–412 (2006). doi [10.1016/j.jcp.2005.08.023](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.08.023).
10. A. N. Parshikov, S. A. Medin, I. I. Loukashenko, V. A. Milekhin, “Improvements in SPH method by means of interparticle contact algorithm and analysis of perforation tests at moderate projectile velocities,” *International Journal of Impact Engineering*. **24** (8), 779–796 (2000). doi [10.1016/S0734-743X\(99\)00168-2](https://doi.org/10.1016/S0734-743X(99)00168-2).
11. J. P. Morris, “Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. **33** (3), 333–353 (2000). doi [10.1002/1097-0363\(20000615\)33:3<333::aid-flid11>3.0.co;2-7](https://doi.org/10.1002/1097-0363(20000615)33:3<333::aid-flid11>3.0.co;2-7).
12. X. Y. Hu, N. A. Adams, “A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows,” *Journal of Computational Physics*. **213** (2), 844–861 (2006). doi [10.1016/j.jcp.2005.09.001](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.09.001).
13. S. Adami, X. Y. Hu, N. A. Adams, “A new surface-tension formulation for multi-phase SPH using a reproducing divergence approximation,” *Journal of Computational Physics*. **229** (13), 5011–5021 (2010). doi [10.1016/j.jcp.2010.03.022](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.03.022).



14. J. U. Brackbill, D. B. Kothe, C. Zemach, “A continuum method for modeling surface tension,” *Journal of Computational Physics*. **100** (2), 335–354 (1992). doi [10.1016/0021-9991\(92\)90240-y](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90240-y).
15. Z.-B. Wang, R. Chen, H. Wang, Q. Liao, X. Zhu, S.-Z. Li, “An overview of smoothed particle hydrodynamics for simulating multiphase flow,” *Applied Mathematical Modelling*. **40** (23), 9625–9655 (2016). doi [10.1016/j.apm.2016.06.030](https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.06.030).
16. S. Nugent, H. A. Posch, “Liquid drops and surface tension with smoothed particle applied mechanics,” *Phys. Rev. E*. **62** (4), 4968–4975 (2000). doi [10.1103/PhysRevE.62.4968](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.4968).
17. A. Tartakovsky, P. Meakin, “Modeling of surface tension and contact angles with smoothed particle hydrodynamics,” *Phys. Rev. E*. **72** (2), 026301 (2005). doi [10.1103/PhysRevE.72.026301](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.026301).
18. M. Kondo, J. Matsumoto, “Surface tension and wettability calculation using density gradient potential in a physically consistent particle method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **385**, 114072 (2021). doi [10.1016/j.cma.2021.114072](https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114072).
19. X.-L. Fang, A. Colagrossi, P.-P. Wang, A.-M. Zhang, “An accurate and robust axisymmetric SPH method based on Riemann solver with applications in ocean engineering,” *Ocean Engineering*. **244**, 110369 (2022). doi [10.1016/j.oceaneng.2021.110369](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.110369).
20. G. D. Rublev, A. N. Parshikov, S. A. Dyachkov, “Improving approximation accuracy in Godunov-type smoothed particle hydrodynamics methods,” *Applied Mathematics and Computation*. **488**, 129128 (2024). doi [10.1016/j.amc.2024.129128](https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.129128).
21. J. Michel, A. Vergnaud, G. Oger, C. Hermange, D. Le Touzé, “On particle shifting techniques (PSTs): Analysis of existing laws and proposition of a convergent multi-invariant law,” *Journal of Computational Physics*. **459**, 110999 (2022). doi [10.1016/j.jcp.2022.110999](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.110999).
22. S. Marrone, A. Colagrossi, D. Le Touzé, G. Graziani, “Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers,” *Journal of Computational Physics*. **229** (10), 3652–3663 (2010). doi [10.1016/j.jcp.2010.01.019](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.01.019).
23. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. VI: Fluid Mechanics* (Nauka, Moscow, 1986; Pergamon, Oxford, 1987).
24. J. W. Strutt (Rayleigh Lord, F.R.S.), “VI. On the capillary phenomena of jets,” *Proceedings of the Royal Society of London*. **29** (196–199), 71–97 (1879). doi [10.1098/rspl.1879.0015](https://doi.org/10.1098/rspl.1879.0015).
25. G. I. Taylor, “The dynamics of thin sheets of fluid II. Waves on fluid sheets,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. **253** (1274), 296–312 (1959). doi [10.1098/rspa.1959.0195](https://doi.org/10.1098/rspa.1959.0195).
26. M. Dai, D. P. Schmidt, “Adaptive tetrahedral meshing in free-surface flow,” *Journal of Computational Physics*. **208** (1), 228–252 (2005). doi [10.1016/j.jcp.2005.02.012](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.02.012).
27. Rayleigh Lord, “On the instability of jets,” *Proceedings of the London Mathematical Society*. **s1-10** (1), 4–13 (1878). doi [10.1112/plms/s1-10.1.4](https://doi.org/10.1112/plms/s1-10.1.4).
28. A. N. Parshikov, S. A. Medin, G. D. Rublev, S. A. Dyachkov, “Numerical viscosity control in Godunov-like smoothed particle hydrodynamics for realistic flows modeling,” *Physics of Fluids*. **36** (1), 013101 (2024). doi [10.1063/5.0181276](https://doi.org/10.1063/5.0181276).

Received  
July 31, 2025

Accepted  
September 26, 2025

Published  
October 23, 2025

#### Information about the author

Georgii D. Rublev – Researcher; 1) Dukhov Research Institute of Automatics, Sushchevskaya ulitsa, 22, 127030, Moscow, Russia; 2) Joint Institute for High Temperatures of RAS, Izhorskaya ulitsa, 13, building 2, 125412, Moscow, Russia.