

Структурно-ориентированное сглаживание для расчета распространения волн лучевым методом с учетом частотной зависимости

А. Д. Штейн

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0009-0000-8870-7382, e-mail: shteynad@ipgg.sbras.ru

М. И. Протасов

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0000-0003-0449-1639, e-mail: protasovmi@ipgg.sbras.ru

Аннотация: Рассматривается эмпирический метод получения частотно-зависимой скоростной модели с использованием структурно-ориентированного сглаживания. Сглаживание выполняется в зависимости от положения источника, частоты и поля времен. Реализованы три метода сглаживания: сглаживание вдоль локально плоского фронта, сглаживание с помощью анизотропной диффузии и объемное сглаживание по зоне Френеля. Время сглаживания анизотропной диффузии сопоставлено с частотой сглаживания по зоне Френеля. Проведено сравнение методов сглаживания, согласно которому наиболее стабильным решением является объемное сглаживание в зоне Френеля.

Ключевые слова: структурно-ориентированное сглаживание, частотная зависимость, сглаживание, сглаживание Ломакса, анизотропная диффузия, зона Френеля, сглаживание Гаусса.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант № 21-71-20002-П.

Для цитирования: Штейн А.Д., Протасов М.И. Структурно-ориентированное сглаживание для расчета распространения волн лучевым методом с учетом частотной зависимости // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 3. 304–321. doi 10.26089/NumMet.v26r321.

Structure-oriented smoothing for wave propagation modelling by beam method with frequency dependence

Aleksandr D. Stein

Trofimuk Institute of Petroleum-Gas Geology and Geophysics SB RAS,
Novosibirsk, Russia

ORCID: 0009-0000-8870-7382, e-mail: shteynad@ipgg.sbras.ru

Maksim I. Protasov

Trofimuk Institute of Petroleum-Gas Geology and Geophysics SB RAS,
Novosibirsk, Russia

ORCID: 0000-0003-0449-1639, e-mail: protasovmi@ipgg.sbras.ru

Abstract: This paper considers an empirical method for obtaining a frequency-dependent velocity model using structure-oriented smoothing. Smoothing is performed depending on the source position, frequency, and time field. Three smoothing methods are implemented: smoothing along a locally flat wavefront, smoothing by anisotropic diffusion and volumetric smoothing in the Fresnel zone. Anisotropic diffusion smoothing time is compared with the frequency of the smoothing in the Fresnel zone. A comparison of smoothing methods is carried out, showing that volumetric smoothing in the Fresnel zone provides the most stable solution.

Keywords: structure-oriented smoothing, frequency dependence, smoothing, Lomax smoothing, anisotropic diffusion, Fresnel zone, Gauss smoothing.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 21–71–20002–II).

For citation: A. D. Stein, M. I. Protasov, “Structure-oriented smoothing for wave propagation modelling by beam method with frequency dependence,” Numerical Methods and Programming. **26** (3), 304–321 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r321.

1. Введение. Лучевой метод — один из основных асимптотических методов в теории волн. Асимптотический подход к моделированию волнового поля на основе лучевых решений позволяет выполнять расчет модели значительно быстрее, чем при использовании метода конечных разностей или конечных элементов.

Классический лучевой метод основан на высокочастотном приближении, с линейной зависимостью фазы от частоты [1]. Это накладывает ограничение на гладкость модели, при невыполнении которого решение может быть неустойчивым. Для обеспечения устойчивости лучевого метода применяют частотно-зависимое трассирование лучей, обоснованное тем, что время пробега волны в ограниченном диапазоне частот связано с объемным интегралом от медленности по волновому пути между источником и приемником, где волновой путь зависит от частоты [1].

Известны различные способы расчета частотно-зависимых лучей. В работе [2] частотно-зависимые лучи рассчитываются на основе решения уравнения Гельмгольца, однако такой подход имеет низкую вычислительную эффективность, так как решение уравнения Гельмгольца требует значительных вычислительных затрат, превышающих затраты на расчет лучей. В работе [3] используется приближение к уравнению Гельмгольца, где рассчитывается медленность, которая зависит от частоты, и далее применяется стандартное лучевое трассирование. Недостаток такого подхода в том, что решение на низких частотах зависит от решения на высоких частотах, что дополнительность может приводить к численно неустойчивому решению. В работе [4] предложен способ расчета частотно-зависимых лучей при учете зоны Френеля. Такой способ, однако, имеет схожие ограничения на гладкость модели, что и классическое трассирование лучей. Известен подход, при котором частотная зависимость учитывается на границах с резким перепадом скоростей на основе интегралов, полученных из интеграла Кирхгофа [5]. Для этого

необходимо определение таких границ либо вручную, либо при использовании отдельного алгоритма, что значительно усложняет практическое применение этого метода.

Приведенные алгоритмы выполняют частотно-зависимое трассирование лучей. Однако они не подходят для вычислительно эффективного расчета частотно-зависимых лучевых решений для сложных анизотропных сред. Интересное решение для достижения частотной зависимости при использовании лучевого метода было предложено в работе [6], метод основан на частотно-зависимом сглаживании скоростной модели и последующем стандартном расчете лучей. Простота используемого метода и активное его применение в задачах лучевого трассирования в последние годы [7] вдохновили на реализацию алгоритмов, описанных в данной работе.

Идея, для реализации которой необходимы алгоритмы, исследуемые в работе, заключается в том, чтобы учесть частотную зависимость для трассирования лучей отдельно от самого трассирования. Для этого необходимо выполнить сглаживание скоростной модели. Однако обычное сглаживание приводит к противоречивой схеме, поскольку модель сглаженной скорости является кинематически некорректной. При сглаживании скоростной модели хочется учесть наличие геологических структур. Структурами могут быть разломы, характерная слоистость, соляные тела или какие-либо другие объекты интереса. Для учета структур при обработке изображения используют соответствующий тип фильтров, выполняющий структурно-ориентированное сглаживание. Таким образом, объектом исследования является фильтр, выполняющий частотно-зависимое структурно-ориентированное сглаживание.

Среди класса структурно-ориентированных фильтров можно выделить несколько подклассов. Широко распространены фильтры “с сохранением границ” (англ. edge-preserving), к которым относятся фильтры типа Кувахара [8, 9] и фильтры на основе анизотропной диффузии [10, 11]. Так как сглаживание скоростной модели нужно выполнять в основном на контрастных границах, данный класс фильтров для этого не подходит. Сглаживание Ломакса [6] в этом смысле является подходящим решением, это сглаживание учитывает значения скоростей только вдоль линии локально плоского фронта волны. Переход к учету значений в пространственном окне может повысить устойчивость алгоритма и обеспечить гладкость выходных моделей. Существует реализация структурно-ориентированного сглаживания Гаусса [12], усредняющая скорость в окне.

В данной работе рассматриваются три программных реализации алгоритма структурно-ориентированного сглаживания для расчета частотно-зависимых скоростных моделей. Структурная ориентация определяется производными поля времен. Скалярное поле времен $T(x, y, z)$ рассчитывается при решении уравнения эйконала методом быстрой маршировки [13], используется реализация из программного пакета Madagascar [14]. Производные рассчитываются на сеточной модели конечно-разностными схемами второго порядка аппроксимации. Сглаженные скоростные модели зависят от частоты, поля времен и положения источника сейсмических волн.

2. Реализованные методы сглаживания. При использовании сглаживания за основу был взят одинаковый для всех методов структурный тензор, компоненты которого являются производными от поля времен. Сначала было реализовано сглаживание, представленное в работе [6]. Из множества вариантов этот метод был выбран в связи с активным применением лучевого трассирования Ломакса [7]. Поскольку результаты этого метода оказались неудовлетворительными, были рассмотрены альтернативные варианты. Так, был исследован метод сглаживания анизотропной диффузией [10, 11], который имеет широкое применение в различных задачах сейсмики [15–18]. Наконец, как результат улучшения сглаживания Ломакса, реализован алгоритм сглаживания по зоне Френеля.

2.1. Сглаживание вдоль локально плоского фронта. Идея сглаживания, предложенная в работе [6], заключается в том, чтобы определить в точке локально плоский волновой фронт и сглаживать вдоль него. Учитывается конечное число контрольных точек, которые вносят вклад в зависимости от выбранной весовой функции. Скорость в точке рассчитывается по формуле

$$\bar{\mathbf{c}}(x_v, z_v) = \frac{\sum_{n=-N}^N w_n \mathbf{c}(x_n, z_n)}{\sum_{n=-N}^N w_n},$$

где $\bar{\mathbf{c}}(x_v, z_v)$ — сглаженная скорость в точке (x_v, z_v) , $\mathbf{c}(x_n, z_n)$ — исходная скорость в контрольной точке (x_n, z_n) , w_n — значение весовой функции в контрольной точке (x_n, z_n) . Положение контрольных точек



задается следующим образом:

$$(x_n, z_n) = \begin{cases} (x_v, z_v), & n = 0; \\ (x_{n-1}, z_{n-1}) + \frac{\theta_{\max} \lambda}{4\pi N} \mathbf{c}(x_{n+1}, z_{n+1}) \hat{\mathbf{n}}, & n > 0; \\ (x_{n+1}, z_{n+1}) - \frac{\theta_{\max} \lambda}{4\pi N} \mathbf{c}(x_{n+1}, z_{n+1}) \hat{\mathbf{n}}, & n < 0, \end{cases}$$

где θ_{\max} определяет, какую часть длины волны мы принимаем в рассмотрение при выборе апертуры сглаживания, λ — длина волны, N задает число контрольных точек, $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор, перпендикулярный лучу (или градиенту поля времен) в точке (x_v, z_v) , $\hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{\partial T}{\partial z}, -\frac{\partial T}{\partial x} \right)$. В качестве весовой функции используется функция Гаусса:

$$w_n(x_v, z_v) = -4 \ln(2) \frac{[(x_n - x_v) + (z_n - z_v)]^2}{k^2 \theta_{\max}^2 \gamma^2},$$

где γ — параметр, задающий затухание функции и контролирующий ее форму.

2.2. Сглаживание анизотропной диффузии. Для сглаживания на основе решения уравнения диффузии за основу взят алгоритм, изложенный в статье [12]. Идея данного сглаживания заключается в применении процесса диффузии к изображению с привлечением структурного тензора, который задает направление сглаживания:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(D \nabla u), \quad (1)$$

где u — изображение, t — время, D — тензор диффузии.

В нашем случае в качестве изображения используется скоростная модель, которую необходимо сгладить. Для построения тензора D рассчитывается структурный тензор S , который состоит из производных от поля времен:

$$S = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \\ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} & \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \end{bmatrix}.$$

Далее выполняется сглаживание структурного тензора в масштабе σ , на этом этапе происходит свертка с обычным фильтром Гаусса:

$$S_\sigma(i_0, j_0) = \sum_{i=i_0-\sigma}^{i_0+\sigma} \sum_{j=j_0-\sigma}^{j_0+\sigma} e^{-\sigma^{-2} |\mathbf{p}|^2 / 2} S(i, j), \quad (2)$$

где $\mathbf{p} = (x_i - x_{i0}, z_i - z_{i0})$. Спектральное разложение S_σ :

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^2 \lambda_i v_i v_i^T, \quad \lambda_1 < \lambda_2.$$

Тензор диффузии D строится из собственных чисел и собственных векторов тензора S_σ :

$$D = \sum_{i=1}^2 \mu_i v_i v_i^T, \quad \mu_1 = 0, \mu_2 = 1. \quad (3)$$

Таким образом, собственный вектор, параллельный структуре, получает собственное значение 1, а собственный вектор, перпендикулярный структуре, получает собственное значение 0.

Для численного решения уравнения диффузии (1) можно использовать метод Эйлера

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \nabla(D_n \nabla u_n),$$

который можно переписать в следующем виде [17]:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left(\frac{\partial D_{11}}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial z} + D_{12} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial z} + \frac{\partial D_{21}}{\partial z} \frac{\partial u_n}{\partial x} + D_{21} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z \partial x} + \frac{\partial D_{22}}{\partial z} \frac{\partial u_n}{\partial z} + D_{22} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right). \quad (4)$$

Производные первого и второго порядка в уравнении (4) вычисляются схемами центральных разностей второго порядка аппроксимации:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{(\Delta x)^2}.$$

Смешанные производные также вычисляются центральной разностью второго порядка аппроксимации:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, z_j) = \frac{f(x_{i+1}, z_{j+1}) + f(x_{i-1}, z_{j-1}) + f(x_{i+1}, z_{j-1}) + f(x_{i-1}, z_{j+1})}{4\Delta x \Delta z}.$$

Для устойчивости предложенной схемы (4) необходимо выполнение условия Куранта–Фридрихса–Леви:

$$\Delta t \leq \frac{C}{\max\left(\frac{|D_{11}|}{(\Delta x)^2} + \frac{|D_{12}|}{\Delta x \Delta z} + \frac{|D_{21}|}{\Delta x \Delta z} + \frac{|D_{22}|}{(\Delta z)^2}\right)},$$

где C — число Куранта. При решении уравнения диффузии явной схемой $C = 0.5$ [19].

Учитывая, что в экспериментах, представленных в данной работе, тензор диффузии принимает значения от -1 до 1 , а шаг по пространству выбран 10 м для обоих направлений, итоговое условие на шаг по времени получается следующим:

$$\Delta t \leq 12.5 \text{ с.}$$

Поэтому в приведенных ниже экспериментах условие Куранта–Фридрихса–Леви в реализованном алгоритме выполняется, шаг по времени для численного решения уравнения диффузии (4) равен 1 с.

2.3. Объемное сглаживание по зоне Френеля. При ограниченном диапазоне частот на свойства волны, распространяющейся вдоль рассматриваемого луча, влияет не только структура вдоль луча, но и структура в некоторой окрестности луча [4]. Эта область в окрестности луча уже давно является предметом интереса и многочисленных теоретических и экспериментальных исследований. Результаты таких исследований обычно выражаются в терминах хорошо известных первых зон Френеля и их трехмерных пространственных эквивалентов, объемов Френеля. Для каждой точки на рассматриваемом луче радиус зоны Френеля обратно пропорционален корню из частоты [4]. Реализован алгоритм сглаживания, в котором учитывается влияние зоны Френеля.

При объемном сглаживании по зоне Френеля используется модификация сглаживания на основе функции Гаусса. В результате скорость в точке рассчитывается по формуле

$$\mathbf{c}_{\text{sm}}(x_{i_0}, z_{j_0}) = \frac{\sum_{i=i_0-N_x}^{i_0+N_x} w_{ij} \mathbf{c}(x_i, z_j)}{\sum_{i=i_0-N_x}^{i_0+N_x} w_{ij}},$$

где $\mathbf{c}_{\text{sm}}(x_{i_0}, z_{j_0})$ — сглаженная скорость в точке, $\mathbf{c}(x_i, z_j)$ — исходная скорость в точке (i, j) окна сглаживания, w_{ij} — весовая функция, состоящая из двух экспонент, отвечающих за сглаживание вдоль и поперек градиента поля времен. Весовая функция w_{ij} рассчитывается по формуле

$$w_{ij} = e^{-4\alpha_{ij}|\mathbf{p}|^2(\cos \beta)^2} \cdot e^{-\alpha_{ij}|\mathbf{p}|^2(1-\cos \beta^2)}, \quad (5)$$

где β — угол между вектором $\mathbf{p} = (x_i - x_{i_0}, z_j - z_{j_0})$ из точки (x_{i_0}, z_{j_0}) в точку (x_i, z_j) и вектором $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial T(x_i, z_j)}{\partial x}, \frac{\partial T(x_i, z_j)}{\partial z}\right)$ градиента поля времен $T(x_i, z_j)$ в точке (x_i, z_j) , α_{ij} — коэффициент, вносящий зависимость от физических свойств. Коэффициент α_{ij} вычисляется по формуле

$$\alpha_{ij} = \left(\frac{m\lambda_{ij}}{2}\right)^{-2} = \frac{4\nu^2}{m^2 c_{ij}^2}, \quad (6)$$

где ν — частота, m — номер зоны Френеля. Выражение $\cos \beta$ задает направление сглаживания и вычисляется по формуле

$$\cos \beta(x_i, z_j) = \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})}{|\mathbf{p}||\mathbf{n}|}.$$



В уравнении (5) в экспоненте, которая отвечает за сглаживание вдоль градиента поля времен, присутствует коэффициент, равный 4. Он выбран в соответствии с границами зоны Френеля (рис. 1).

Наличие резкого перепада скоростей в исходной модели приводит к еще более значительному перепаду значений в массиве α_{ij} , так как $\alpha_{ij} \propto \frac{1}{c_{ij}^2}$. При практическом применении алгоритма было установлено, что алгоритм может работать некорректно на низких частотах на моделях с резкими перепадами скоростей. Эффективным решением может быть двухэтапное сглаживание, при котором расчет α_{ij} происходит не по исходной модели, а по равномерно и слабо сглаженной модели. Двухэтапное сглаживание выполняется следующим образом:

1. Расчет α_{\min_ij} при использовании в формуле (6) минимальной скорости во всей модели $\min(c_{ij})$ вместо c_{ij} — скорости, определенной в каждой точке.
2. Сглаживание исходной скоростной модели с использованием α_{\min} — получение модели $c_{\text{sm_min}}$.
3. Расчет α_{ij} по формуле (6) с использованием скоростей $c_{\text{sm_min_ij}}$ из сглаженной модели вместо c_{ij} .
4. Выполнение сглаживания исходной скоростной модели с использованием массива α_{ij} , рассчитанного по сглаженной скоростной модели.

3. Результаты. Алгоритмы сглаживания исследованы на скоростной модели SEG_Salt2D (рис. 2 а), имеющей резкий перепад скоростей на границе с соляным телом. Для получения сглаженных моделей были использованы производные поля времен, показанные на рис. 2 б, с.

3.1. Результаты применения сглаживания вдоль локально плоского фронта. В первую очередь было исследовано сглаживание вдоль локально плоского фронта, приведены результаты применения алгоритма к модели SEG_Salt2D на частоте 20, 10, 5 и 2 Гц (рис. 3). Присутствует зависимость от частоты, положения источника и поля времен. Данный алгоритм работает некорректно на низких частотах, модель получается недостаточно гладкой: на частоте 10 Гц видны резкие скачки скоростей на границе с соляным телом, которых не было в исходной модели; с понижением частоты этот эффект усиливается.

3.2. Результаты применения сглаживания анизотропной диффузией. После получения неудовлетворительного результата сглаживания вдоль локально плоского фронта было принято решение рассмотреть известный и активно применяемый метод сглаживания анизотропной диффузией. По производным поля времен (рис. 2 б, с) были рассчитаны два тензора диффузии (3), полученные при сглаживании структурного тензора с разными масштабами σ (2). Компонента D_{11} (4) для двух тензоров диффузии показана на рис. 4. Были выбраны пространственные окна 110×110 м и 510×510 м и рассчитаны гауссианы таким образом, чтобы функция ограничивалась четырьмя стандартными отклонениями на границах пространственного окна.

Модели SEG_Salt2D, полученные алгоритмом сглаживания на основе решения уравнения диффузии, показаны на рис. 5 и 6. Результат сглаживания зависит главным образом от времени диффузии. Большие значения времени в алгоритме диффузии соответствуют низким частотам. Показаны модели при времени сглаживания 500, 1000, 2000 и 3000 с. При сглаживании структурного тензора в маленьком окне (рис. 5) наблюдаются области аномально низких значений скоростей, которых не было в начальной модели (2000 с, рис. 5 с), при этом скорости могут быть отрицательными (3000 с, рис. 5 д), что является неприемлемым результатом. Сглаживание структурного тензора с большим окном позволяет получать более гладкие решения (рис. 6) для низкочастотной аппроксимации. Показаны модели при времени сглаживания 500, 1000, 3000 и 5000 с. Однако для низкочастотных решений сглаживание диффузией работает недостаточно эффективно, так как присутствуют области с резким контрастом скоростей — на рис. 6 д можно наблюдать дугообразные области над соляным телом на отметках 2700 м и 4200 м по оси x . Длина волны на низких частотах может достигать нескольких километров, при этом сглаженные анизотропной диффузией модели не имеют такой степени сглаживания.

Обычно при сглаживании диффузией используют структурный тензор, рассчитанный по той же модели, для которой выполняется диффузия. В данной работе структурный тензор рассчитывается по полу времени, а диффузия применяется для скоростной модели. Такой подход можно использовать на высоких

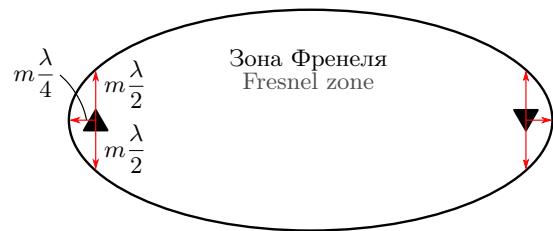


Рис. 1. Зона Френеля

Fig. 1. Fresnel zone

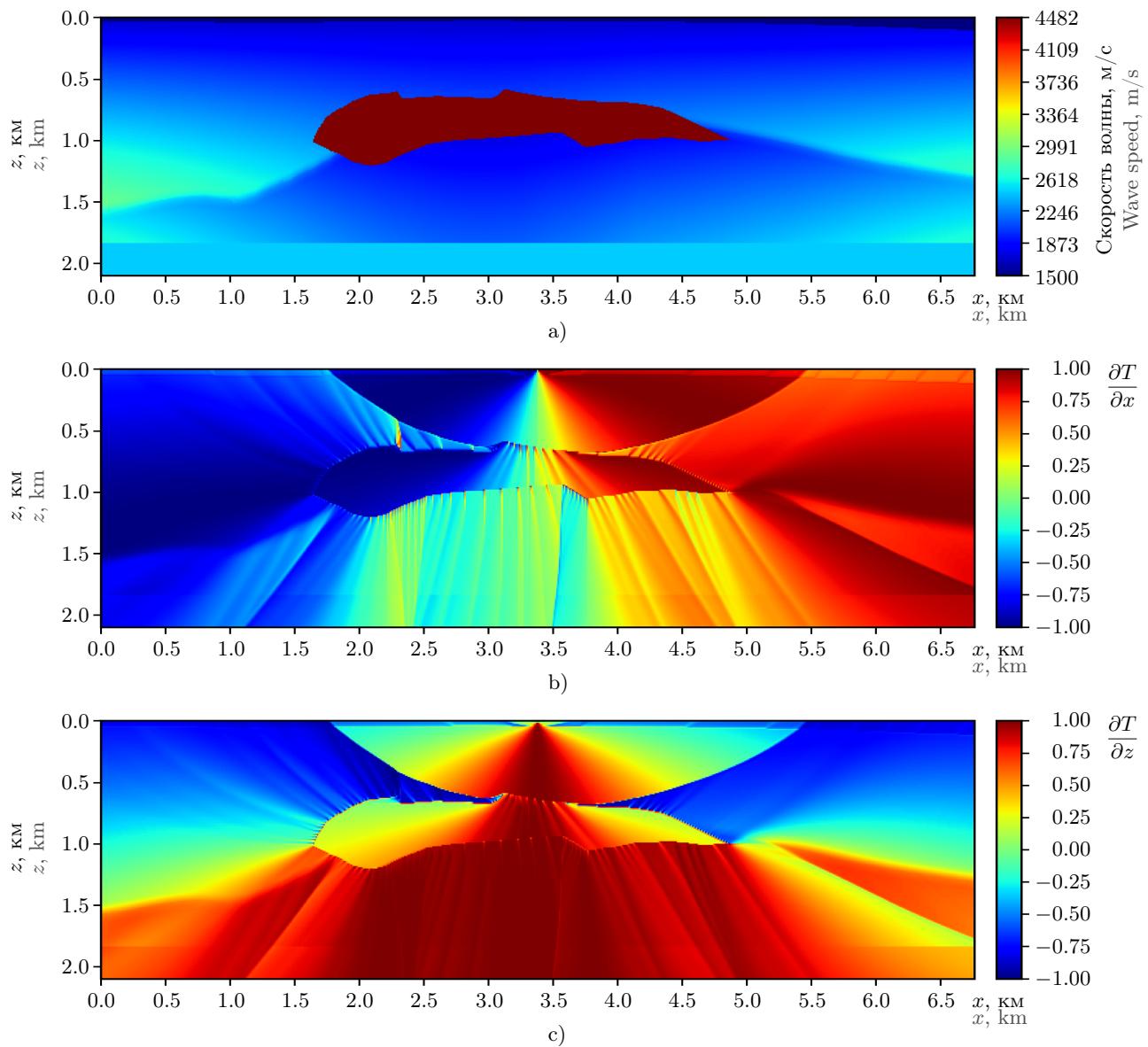


Рис. 2. Начальные данные для алгоритмов сглаживания: а) скоростная модель SEG_Salt2D; б) $\frac{\partial T}{\partial x}$; в) $\frac{\partial T}{\partial z}$

Fig. 2. Initial data for smoothing algorithms: a) velocity model SEG_Salt2D; b) $\frac{\partial T}{\partial x}$; c) $\frac{\partial T}{\partial z}$

частотах. Стоит отметить, что обычно сглаживание анизотропной диффузией используется для регуляризации решения, и время диффузии выбирается небольшое: в работе [15] для сглаживания сейсмических данных применяют от 1 до 9 шагов диффузии, в работе [17] время диффузии составляет 400 с.

3.3. Результаты применения объемного сглаживания по зоне Френеля. В последнюю очередь был реализован метод объемного сглаживания по зоне Френеля. В ходе применения алгоритма на скоростной модели SEG_Salt2D было выполнено сравнение одноэтапного и двухэтапного сглаживания по зоне Френеля. На рис. 7 показаны сглаженные по зоне Френеля ($m = 1$) скоростные модели на частоте 5 Гц: на рис. 7 а показан результат одноэтапного сглаживания, на рис. 7 б — результат двухэтапного сглаживания. На рис. 7 а присутствуют аномальные значения скоростей на границе с соляным телом. Видно, что при двухэтапном сглаживании модель не содержит скоростных аномалий. Коррекция выполняется главным образом на границе с соляным телом, не затрагивая остальную часть модели. На рис. 8 показаны массивы α_{ij} для одноэтапного (сверху) и двухэтапного (снизу) сглаживания. Несглаженный массив α_{ij} имеет резкий перепад значений, на нижней границе соляного тела значения могут различаться в 6

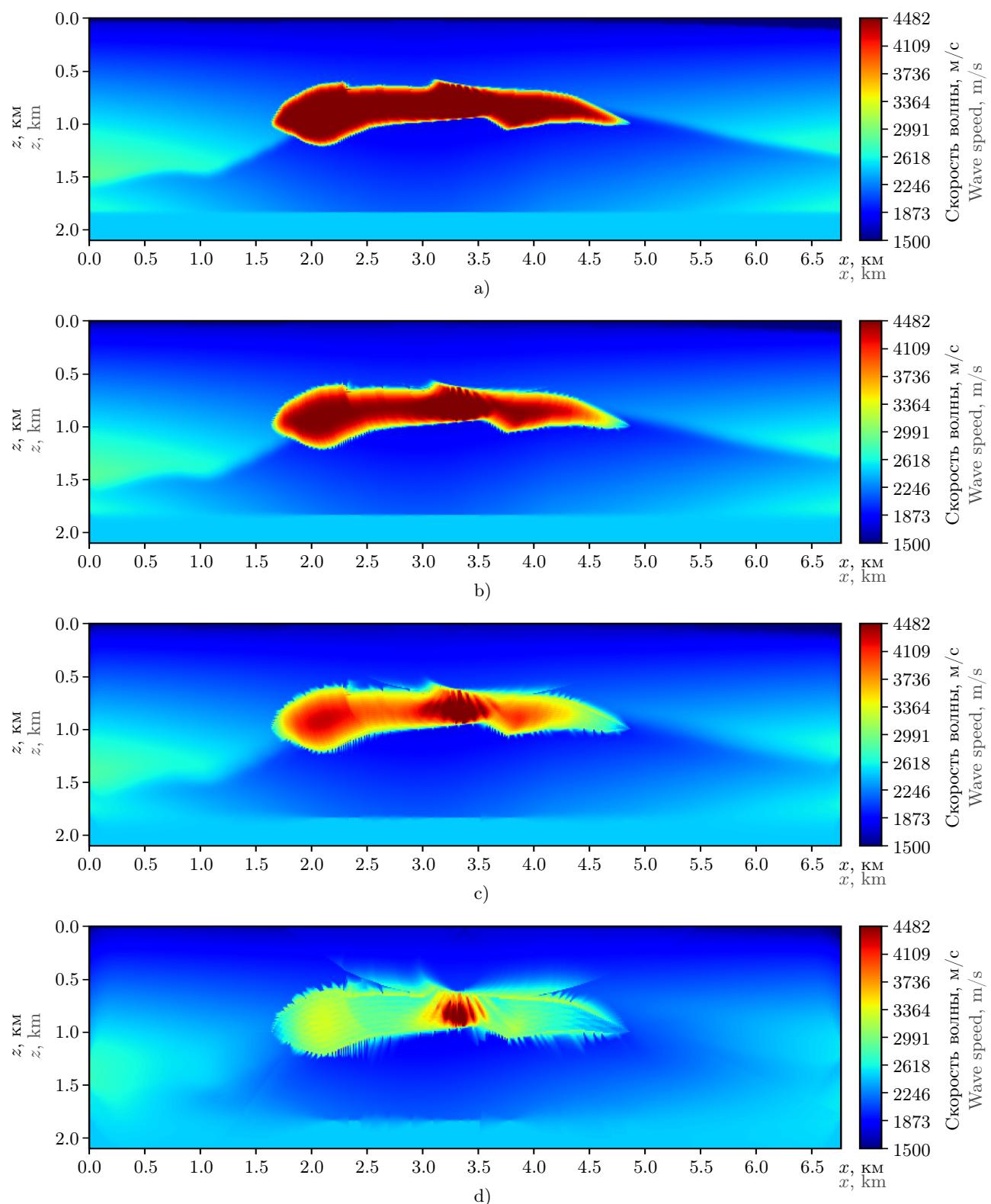


Рис. 3. Результаты применения сглаживания вдоль локально плоского фронта к модели SEG_Salt2D на разных частотах: а) 20 Гц; б) 10 Гц; в) 5 Гц; г) 2 Гц

Fig. 3. Results of applying the smoothing along a locally flat front to the SEG_Salt2D model at different frequencies:
 a) 20 Hz; b) 10 Hz; c) 5 Hz; d) 2 Hz

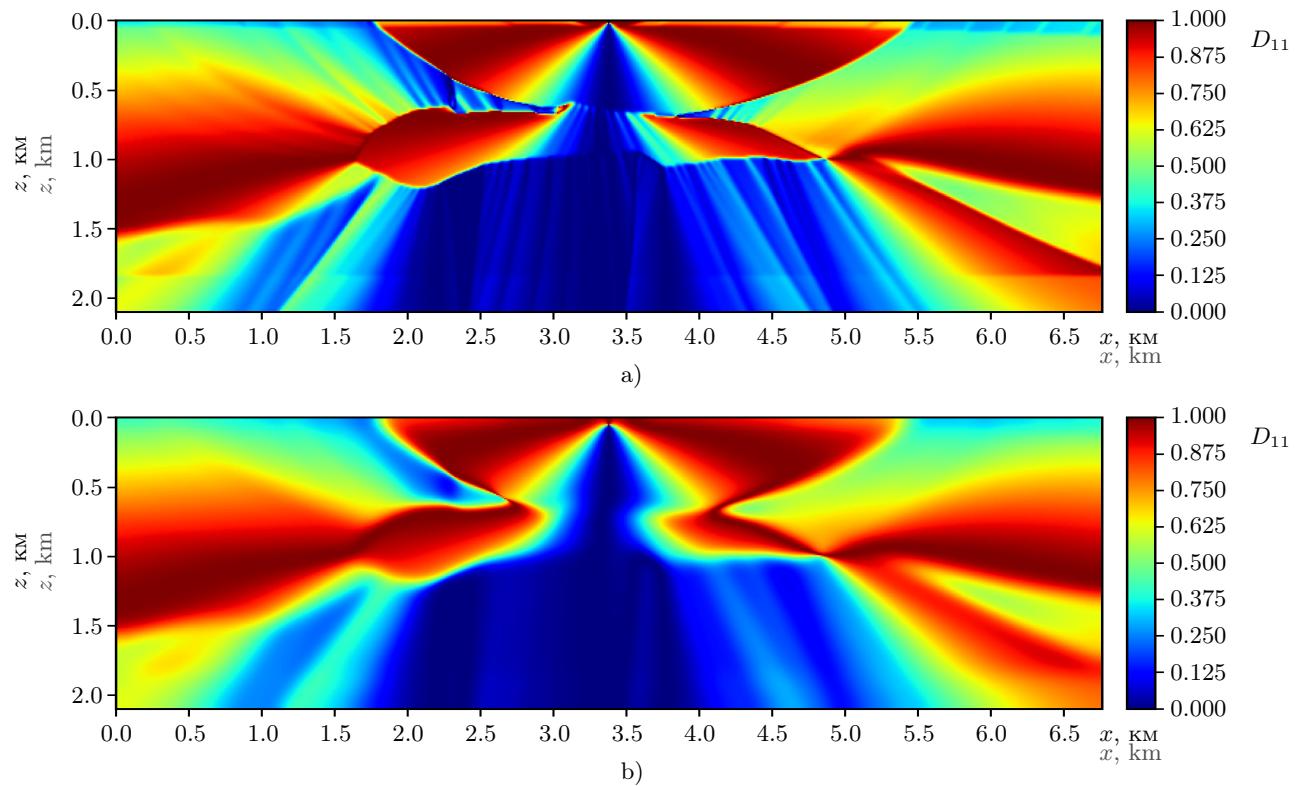


Рис. 4. Компонента D_{11} тензора диффузии, рассчитанная для модели SEG_Salt2D: а) при маленьком окне сглаживания структурного тензора; б) при большом окне сглаживания структурного тензора

Fig. 4. The component D_{11} of the diffusion tensor calculated for the SEG_Salt2D model: a) for small smoothing window of the structural tensor; b) for large smoothing window of the structural tensor

раз в соседних узлах сеточной модели. При двухэтапном сглаживании массив α_{ij} получается гладким, вследствие чего сглаженная скоростная модель также получается гладкой.

Показаны результаты применения алгоритма двухэтапного сглаживания по зоне Френеля ($m = 1$) к модели SEG_Salt2D на частоте 20, 10, 5 и 2 Гц (рис. 9). Сглаженные модели в этом случае не содержат аномальных скачков скоростей, данный алгоритм устойчиво работает как на высоких, так и на низких частотах и обеспечивает достаточно гладкое решение.

3.4. Сопоставление времени сглаживания диффузии с частотой сглаживания по зоне Френеля. Для сглаживания диффузии основным параметром, влияющим на сглаживание, является время диффузии. Большие времена в алгоритме диффузии соответствуют более сглаженной модели и, следовательно, низким частотам. Выполнено сопоставление между моделями, сглаженными при разном времени диффузии, с моделями, сглаженными по зоне Френеля на разных частотах. В качестве метрики используется нормированное среднеквадратическое отклонение (RMSE), выраженное в процентах:

$$Err = 100 \sqrt{\frac{1}{n_x \cdot n_z} \sum_{i=1}^{n_x \cdot n_z} \left(\frac{c_{\text{diffusion}} - c_{\text{Fresnel}}}{c_{\text{Fresnel}}} \right)^2}, \quad (7)$$

где n_x, n_z — размеры модельной стеки, $c_{\text{diffusion}}$ — скорость в точке i , полученная при сглаживании диффузией, c_{Fresnel} — скорость в точке i , полученная при сглаживании по зоне Френеля.

Для модели SEG_Salt2D (рис. 2) было рассчитано 300 и 500 моделей, сглаженных диффузией при времени от 10 до 3000 с и от 10 до 5000 с для двух тензоров диффузии, сглаженных с маленьким и большим масштабом σ (2) соответственно. Для сглаживания по зоне Френеля диапазон частот составил от 10 до 100 Гц с шагом 0.5 Гц. На рис. 10 а показано сопоставление времени диффузии с частотой. Каждая точка на графике показывает значения времени диффузии и частоты, при которых метрика Err принимает наименьшее значение. Более низкие частоты соответствуют большему времени диффузии. Красным цве-

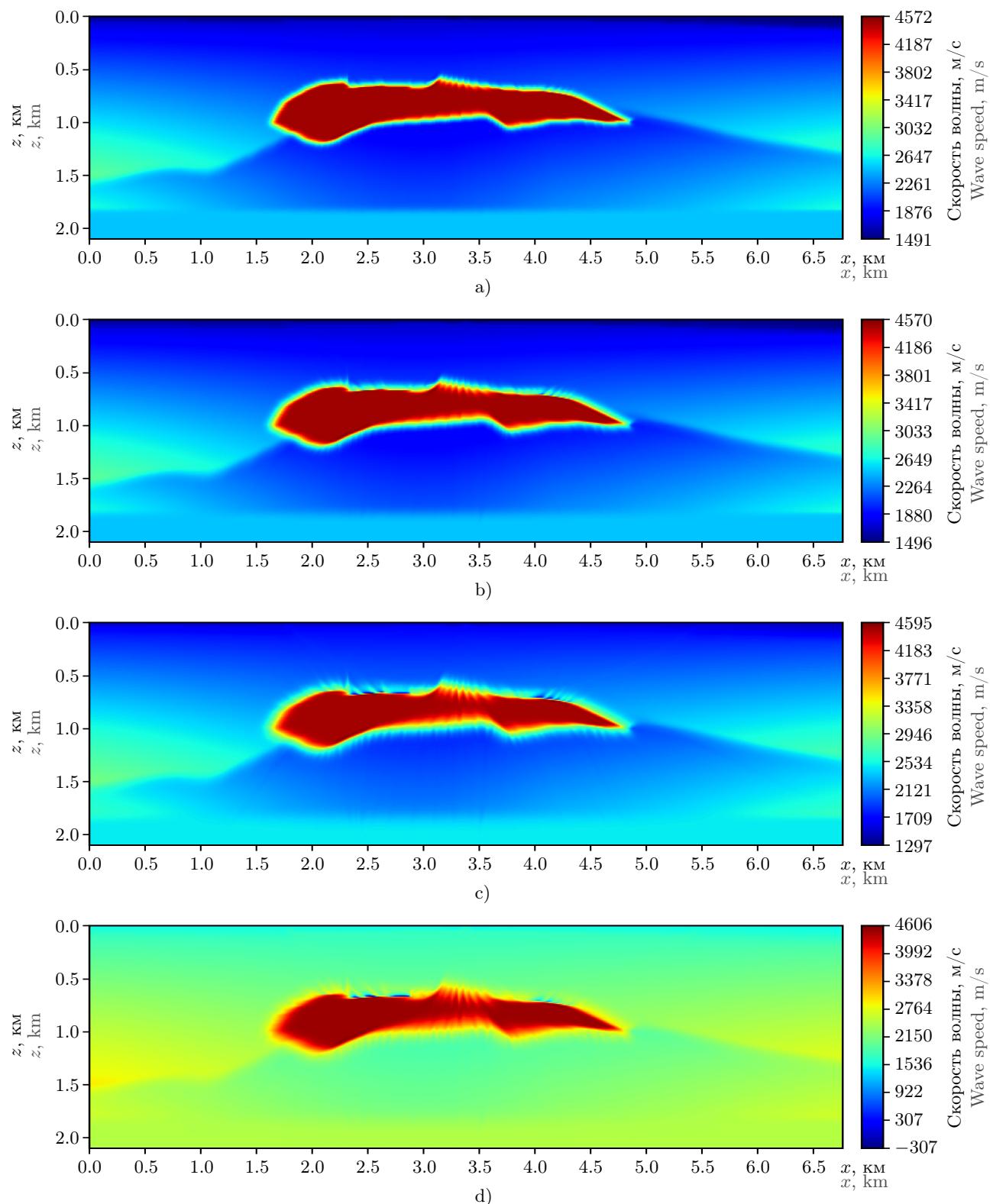


Рис. 5. Результаты применения сглаживания диффузией к модели SEG_Salt2D при маленьком окне сглаживания структурного тензора. Показаны результаты при разном времени диффузии:
 a) 500 с; b) 1000 с; c) 2000 с; d) 3000 с

Fig. 5. Results of applying the diffusion smoothing to the SEG_Salt2D model with small smoothing window of the structural tensor. Results are shown for different diffusion times:
 a) 500 s; b) 1000 s; c) 2000 s; d) 3000 s

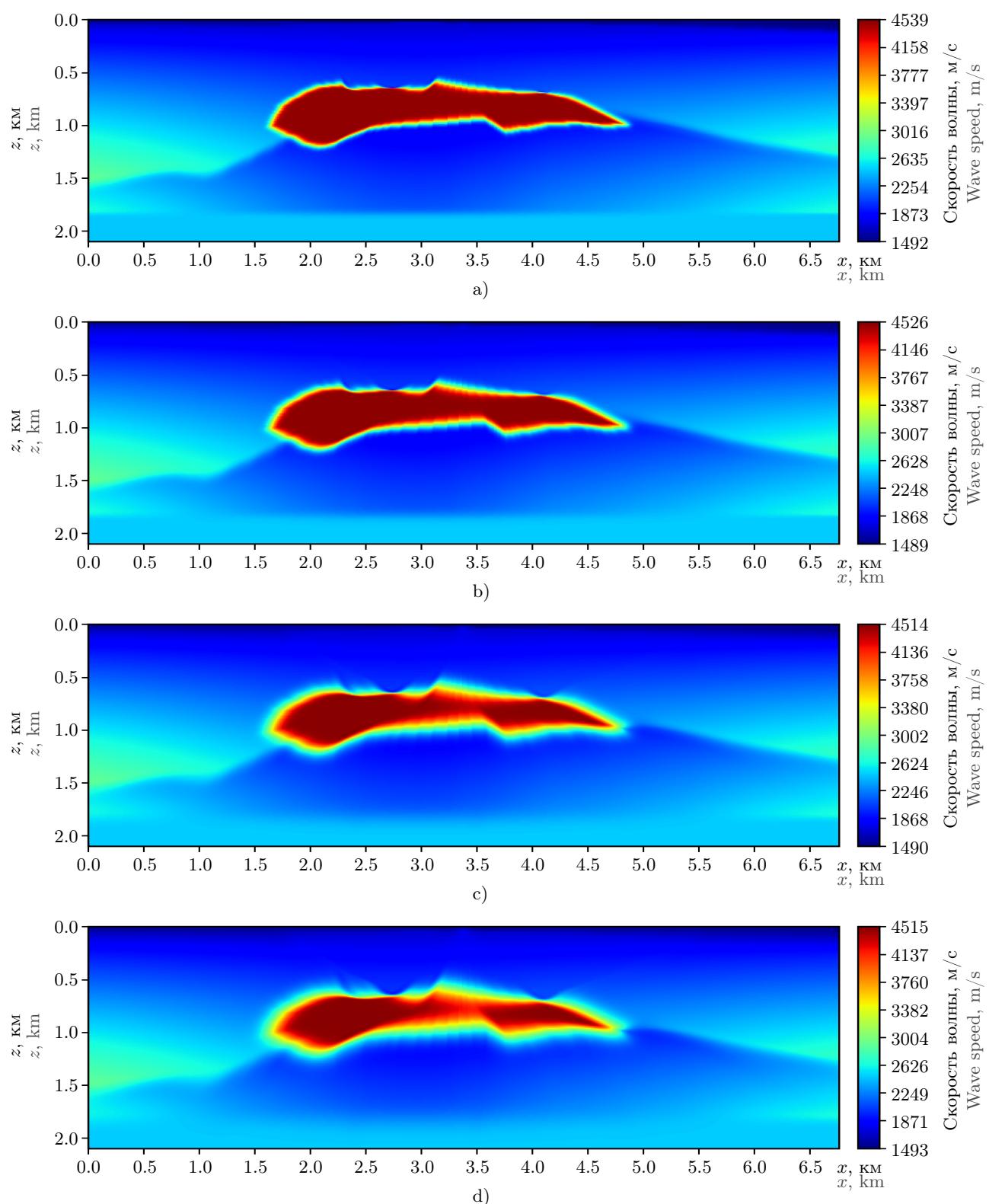


Рис. 6. Результаты применения сглаживания диффузией к модели SEG_Salt2D при большом окне сглаживания структурного тензора. Показаны результаты при разном времени диффузии: а) 500 с; б) 1000 с; в) 3000 с; г) 5000 с

Fig. 6. Results of applying the diffusion smoothing to the SEG_Salt2D model with large smoothing window of the structural tensor. Results are shown for different diffusion times: a) 500 s; b) 1000 s; c) 3000 s; d) 5000 s

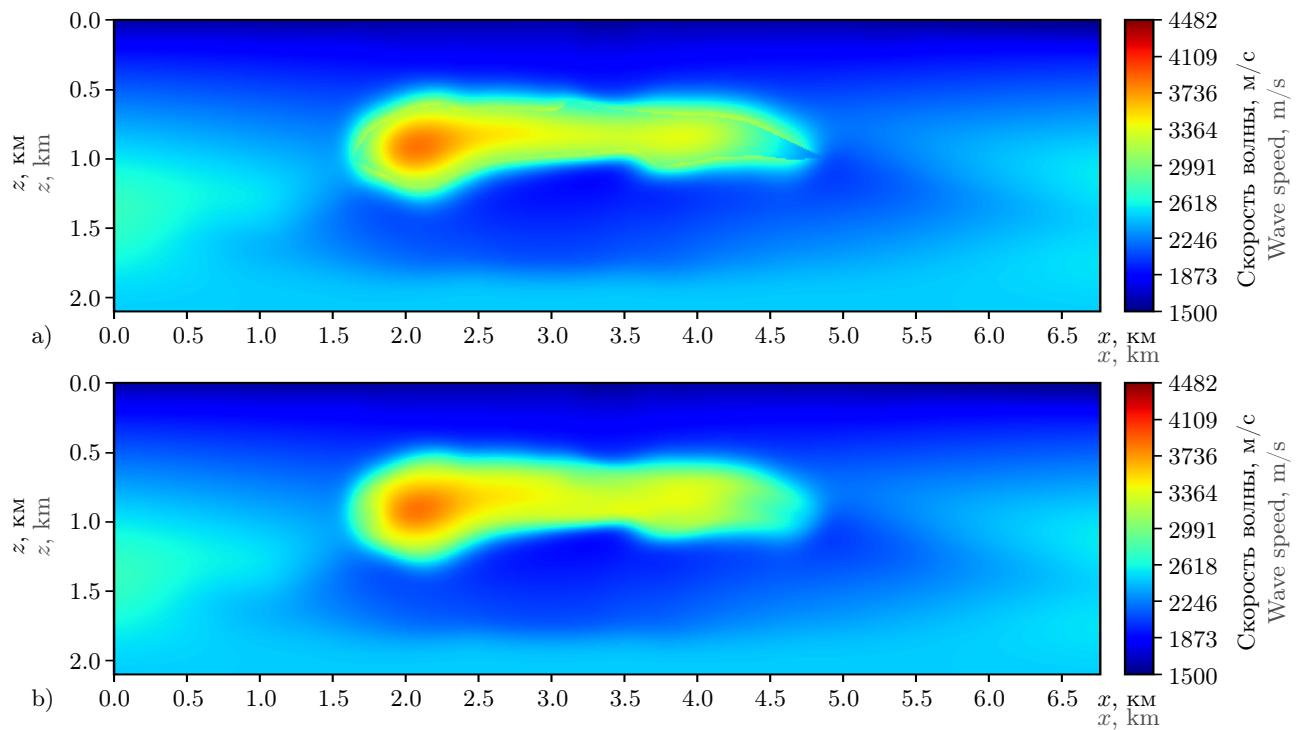


Рис. 7. Результаты применения алгоритмов сглаживания по зоне Френеля к скоростной модели SEG_Salt2D на частоте 5 Гц: а) одноэтапное сглаживание; б) двухэтапное сглаживание

Fig. 7. Results of applying the Fresnel smoothing algorithms to the SEG_Salt2D model at a frequency of 5 Hz:
 a) one-stage smoothing; b) two-stage smoothing

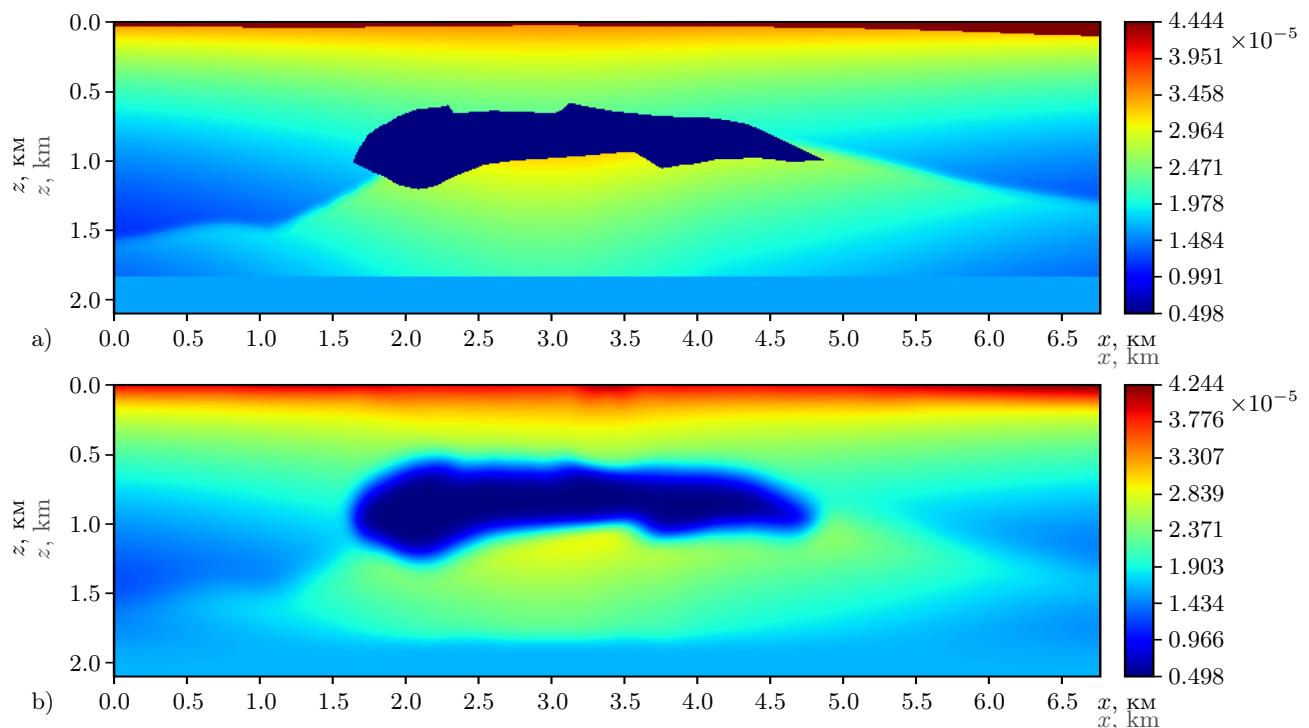


Рис. 8. Массив α_{ij} , рассчитанный в модели SEG_Salt2D на частоте 5 Гц: а) при одноэтапном сглаживании; б) при двухэтапном сглаживании

Fig. 8. Array α_{ij} calculated for the SEG_Salt2D model at a frequency of 5 Hz: a) with one-stage smoothing; b) with two-stage smoothing

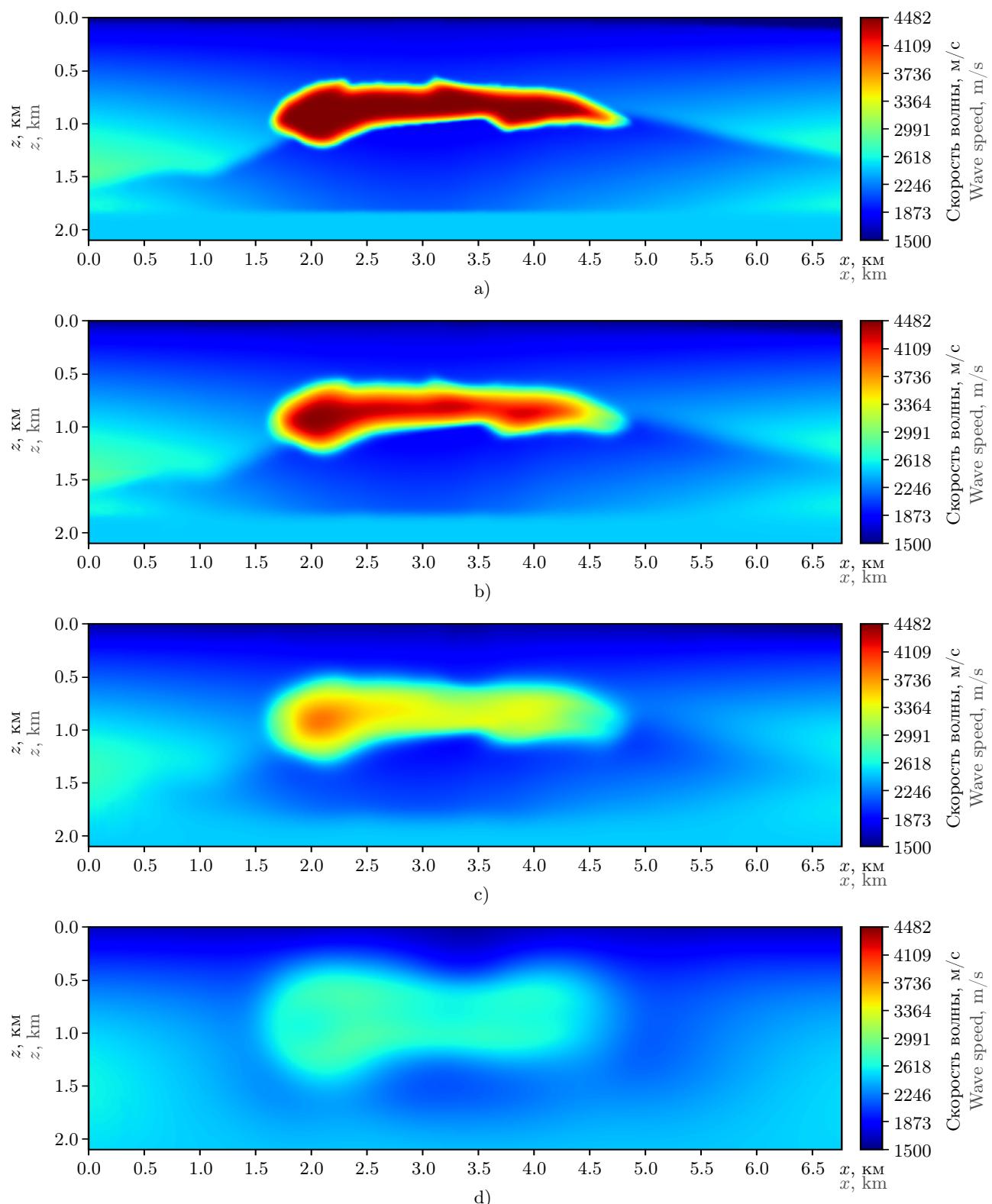


Рис. 9. Результаты применения двухэтапного сглаживания по зоне Френеля к модели SEG_Salt2D на разных частотах: а) 20 Гц; б) 10 Гц; в) 5 Гц; г) 2 Гц

Fig. 9. Results of applying the two-stage Fresnel zone smoothing to the SEG_Salt2D model at different frequencies:
 а) 20 Hz; б) 10 Hz; в) 5 Hz; г) 2 Hz

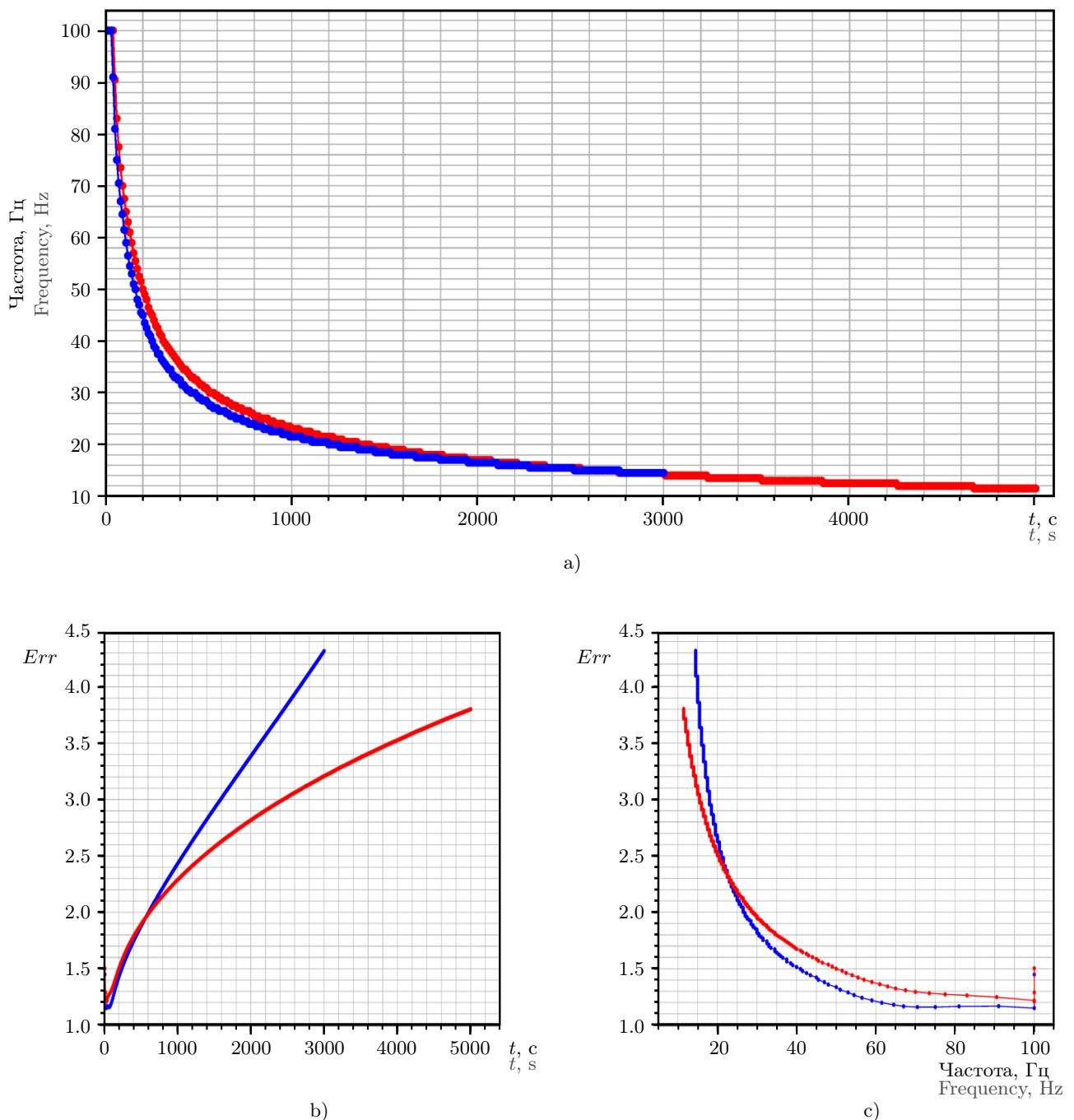


Рис. 10. Сопоставление времени сглаживания диффузией с частотой сглаживания по зоне Френеля по метрике Err (7): а) зависимость частоты от времени диффузии; б) значение метрики Err в зависимости от времени диффузии; в) значение метрики Err в зависимости от частоты сглаживания. Синим цветом показана кривая для моделей, сглаженных диффузией, где структурный тензор был сглажен в малом окне (110×110 м), красным цветом показана кривая для моделей, сглаженных диффузией, где структурный тензор был сглажен в большом окне (510×510 м)

Fig. 10. Comparison of the diffusion smoothing time with the Fresnel smoothing frequency using the Err (7) metric: a) frequency dependence on diffusion time; b) value of the Err metric depending on diffusion time; c) value of the Err metric depending on smoothing frequency. The blue color shows the curve for models smoothed by diffusion, where the structural tensor was smoothed in a small window (110×110 m), the red color shows the curve for models smoothed by diffusion, where the structural tensor was smoothed in a large window (510×510 m)

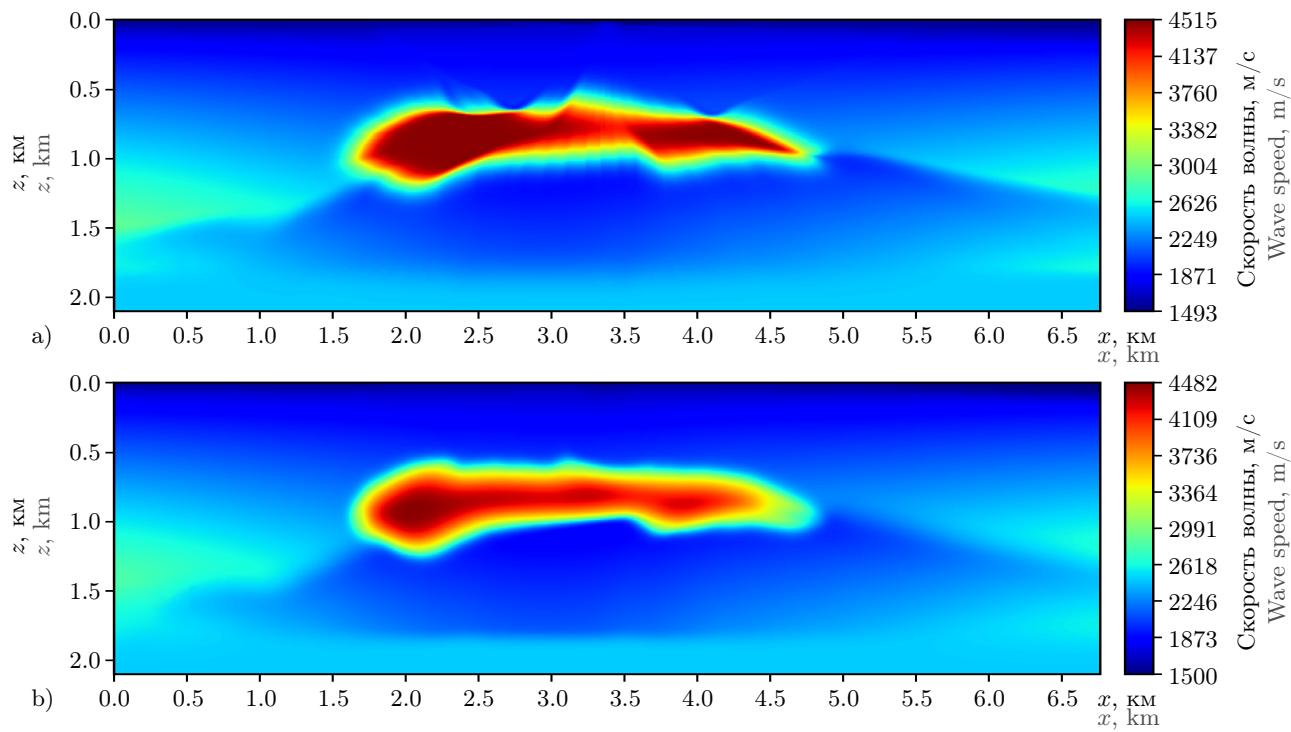


Рис. 11. Модель SEG_Salt2D: а) сглаженная диффузией при времени диффузии 5000 с; б) сглаженная по зоне Френеля на частоте 10 Гц

Fig. 11. The SEG_Salt2D model: a) smoothed by diffusion at a diffusion time of 5000 s; b) smoothed by Fresnel zone at a frequency of 10 Hz

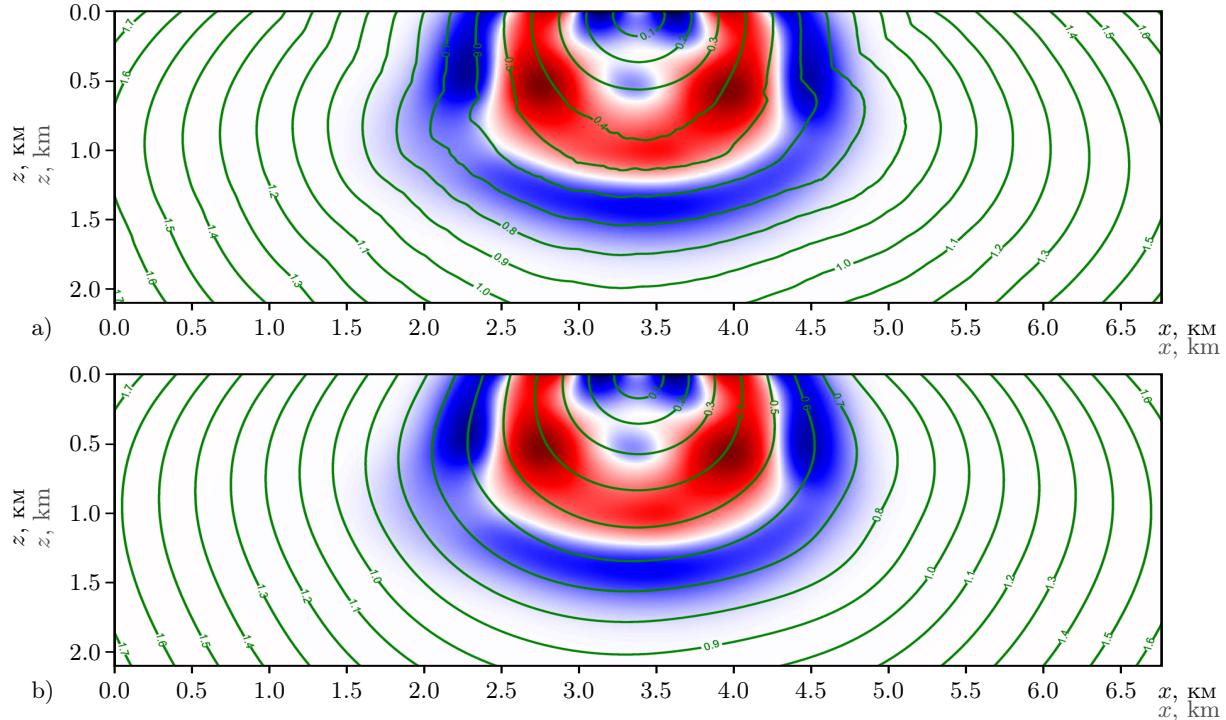


Рис. 12. Мгновенные снимки волнового поля на частоте 2 Гц для $t = 1$ с, рассчитанные в скоростной модели SEG_Salt2D. Также показаны изохроны поля времени: а) для модели, сглаженной вдоль локально плоского фронта; б) для модели, сглаженной по зоне Френеля

Fig. 12. Snapshots of the wave field at a frequency of 2 Hz for $t = 1$ s calculated in the SEG_Salt2D velocity model. The isochrons of the time field are also shown: a) for a model smoothed along a locally flat front; b) for a model smoothed along the Fresnel zone

том показана кривая, полученная при использовании тензора диффузии с большим масштабом σ , синим цветом показана кривая, полученная при использовании тензора диффузии с маленьким масштабом σ . Кривые отражают схожую закономерность: при увеличении времени сглаживания диффузией модель наилучшим образом сопоставляется с более низкочастотным результатом сглаживания по зоне Френеля. Таким образом, можно использовать полученный график (рис. 10 а) для сопоставления времени диффузии с частотой сглаживания.

На рис. 10 также приведено значение метрики Err в зависимости от частоты (рис. 10 б) и времени диффузии (рис. 10 с). Наблюдается закономерность: чем ниже частота сглаживания и чем больше время диффузии, тем сильнее различаются модели согласно метрике Err . Стоит также отметить, что красная кривая имеет значительно меньшее значение метрики Err при большом времени диффузии. Начиная с частоты 23 Гц и ниже, решения сглаживания по зоне Френеля лучше соотносятся с решениями сглаживания диффузией при использовании тензора с большим масштабом σ . Более высокочастотные решения сглаживания по зоне Френеля лучше соотносятся с решениями сглаживания диффузией при использовании тензора с маленьким масштабом σ .

На рис. 11 показан результат сглаживания диффузией модели SEG_Salt2D при времени диффузии 5000 с и результат сглаживания по зоне Френеля на частоте 10 Гц. Согласно полученному графику зависимости времени диффузии от частоты (рис. 10 а), эти модели имеют схожую степень сглаживания. Однако модель, сглаженная диффузией, содержит большие контрасты скоростей, чего не должно быть в сглаженной модели.

3.5. Сопоставление поля времен сглаженных моделей с волновым полем. Волновое поле характеризуется регулярностью. Волновой фронт распространяется непрерывно, а фазы распространяющейся волны обладают гладкостью. Для обеспечения корректного сопоставления кинематики лучевых решений с волновым полем необходимо получать гладкое поле времен. На рис. 12 показаны мгновенные снимки волнового поля на частоте 2 Гц для $t = 1$ с, рассчитанные в скоростной модели SEG_Salt2D. Также показаны изохроны поля времен для модели, сглаженной вдоль локально плоского фронта (рис. 12 а), и для модели, сглаженной по зоне Френеля (рис. 12 б). На изохронах, рассчитанных в модели, сглаженной вдоль локально плоского фронта, можно наблюдать локальные возмущения, которые не соответствуют характеру распространения волнового поля. Изохроны, рассчитанные в модели, сглаженной по зоне Френеля, обладают достаточной гладкостью и в значительной степени соответствуют волновому полю.

4. Заключение. В работе реализованы и исследованы три алгоритма структурно-ориентированного частотно-зависимого сглаживания скоростных моделей: 1) сглаживание вдоль локально плоского фронта; 2) объемное сглаживание по зоне Френеля; 3) сглаживание на основе решения уравнения диффузии. Сглаживание зависит от частоты, положения источника и поля времен. Структурная ориентация задается производными поля времен. Проведено сопоставление между временем диффузии и частотой сглаживания по зоне Френеля. Результаты исследования показывают, что низкочастотные решения, полученные алгоритмом сглаживания вдоль локально плоского фронта, являются недостаточно гладкими. Решения, полученные алгоритмом сглаживания на основе анизотропной диффузии, могут быть использованы для высокочастотных приближений, однако плохо соотносятся с низкочастотными приближениями ввиду недостаточной гладкости. В то же время, структурно-ориентированное частотно-зависимое объемное сглаживание по зоне Френеля обеспечивает необходимую гладкость как на высоких, так и на низких частотах и является наиболее оптимальным решением, рекомендуемым к использованию.

Список литературы

1. Woodward M.J. Wave-equation tomography // Geophysics. 1992. **57**, N 1. 15–26. doi [10.1190/1.1443179](https://doi.org/10.1190/1.1443179).
2. Foreman T.L. An exact ray theoretical formulation of the Helmholtz equation // J. Acoust. Soc. Am. 1989. **86**, N 1. 234–246. doi [10.1121/1.398339](https://doi.org/10.1121/1.398339).
3. Biondi B. Solving the frequency-dependent eikonal equation // 62nd Annual Int. SEG Meeting Expan. Abstr. 1992. **11**. 1315–1319. doi [10.1190/1.1821982](https://doi.org/10.1190/1.1821982).
4. Červený V., Soares J.E.P. Fresnel volume ray tracing // Geophysics. 1992. **57**, N 7. 902–915. doi [10.1190/1.1443303](https://doi.org/10.1190/1.1443303).
5. Протасов М.И., Осипов К.С. Частотно зависимое лучевое трассирование для неплоских границ // Технологии сейсморазведки. 2014. № 3. 25–31. <https://elibrary.ru/item.asp?edn=tmigfj>. Cited August 23, 2025.
6. Lomax A. The wavelength-smoothing method for approximating broad-band wave propagation through complicated velocity structures // Geophys. J. Int. 1994. **117**, N 2. 313–334. doi [10.1111/J.1365-246X.1994.TB03935.X](https://doi.org/10.1111/J.1365-246X.1994.TB03935.X).

7. Неклюдов Д.А., Протасов М.И. Частотно-зависимые лучи Ломакса для квазипродольных волн в трехмерных трансверсально-изотропных средах с наклонной осью симметрии // Геофизические технологии. 2024. № 2. 40–54. doi [10.18303/2619-1563-2024-2-40](https://doi.org/10.18303/2619-1563-2024-2-40).
8. Kuwahara M., Hachimura K., Eiho S., Kinoshita M. Processing of RI-angiographic images // Digital Processing of Biomedical Images. Boston: Springer, 1976. 187–202. doi [10.1007/978-1-4684-0769-3_13](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0769-3_13).
9. Nagao M., Matsuyama T. Edge preserving smoothing // Computer Graphics and Image Processing. 1979. **9**, N 4. 394–407. doi [10.1016/0146-664x\(79\)90102-3](https://doi.org/10.1016/0146-664x(79)90102-3).
10. Perona P., Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1990. **12**, N 7. 629–639. doi [10.1109/34.56205](https://doi.org/10.1109/34.56205).
11. Weickert J. Anisotropic diffusion in image processing. Stuttgart: Teubner, 1998. <https://isbnsearch.org/isbn/9783519026068>. Cited August 23, 2025.
12. Wang W., Gao J., Li K., et al. Structure-oriented Gaussian filter for seismic detail preserving smoothing // 16th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), November 7–10, 2009, Cairo, Egypt. 601–604. doi [10.1109/icip.2009.5413869](https://doi.org/10.1109/icip.2009.5413869).
13. Rickett J., Fomel S. A second-order fast marching eikonal solver // Stanford Exploration Project, Technical Report No. 100. 1999. 287–293.
14. Madagascar main page. https://ahay.org/index.php/Main_Page. Cited August 23, 2025.
15. Fehmers G.C., Höcker C.F.W. Fast structural interpretation with structure-oriented filtering // Geophysics. 2003. **68**, N 4. 1286–1293. doi [10.1190/1.1598121](https://doi.org/10.1190/1.1598121).
16. Hale D. Structure-oriented smoothing and semblance // Center for Wave Phenomena Report. 2009. **635**. 261–270.
17. Yao G., da Silva N.V., Wu D. Reflection-waveform inversion regularized with structure-oriented smoothing shaping // Pure and Applied Geophysics. 2019. **176**, N 1. 5315–5335. doi [10.1007/s0024-019-02265-6](https://doi.org/10.1007/s0024-019-02265-6).
18. Luo L., Rao Y., Zhao Z., Zhang J. Adaptive structure-based full-waveform inversion // Geophysics. 2024. **89**, N 3. R303–R313. doi [10.1190/GEO2023-0273.1](https://doi.org/10.1190/GEO2023-0273.1).
19. Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. Numerical recipes in C: the art of scientific computing. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. <https://isbnsearch.org/isbn/0521431085> Cited August 23, 2025.

Получена
14 июля 2025 г.

Принята
16 июля 2025 г.

Опубликована
9 сентября 2025 г.

Информация об авторах

Александр Денисович Штейн — инженер; Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, пр-кт Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Максим Игоревич Протасов — д.ф.-м.н., заведующий лабораторией; Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, пр-кт Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. M. J. Woodward, “Wave-Equation Tomography,” Geophysics **57** (1), 15–26 (1992). doi [10.1190/1.1443179](https://doi.org/10.1190/1.1443179).
2. T. L. Foreman, “An Exact Ray Theoretical Formulation of the Helmholtz Equation,” J. Acoust. Soc. Am. **86** (1), 234–246 (1989). doi [10.1121/1.398339](https://doi.org/10.1121/1.398339).
3. B. Biondi, “Solving the Frequency-Dependent Eikonal Equation,” 62nd Annual Int. SEG Meeting Expan. Abstr. **11**, 1315–1319 (1992). doi [10.1190/1.1821982](https://doi.org/10.1190/1.1821982).
4. V. Červený and J. E. P. Soares, “Fresnel Volume Ray Tracing,” Geophysics **57** (7), 902–915 (1992). doi [10.1190/1.1443303](https://doi.org/10.1190/1.1443303).
5. M. I. Protasov and K. S. Osipov, “Frequency Dependent Ray Tracing for Irregular Boundaries,” Seismic Technol. **11** (3), 1–11 (2014).
6. A. Lomax, “The Wavelength-Smoothing Method for Approximating Broad-Band Wave Propagation through Complicated Velocity Structures,” Geophys. J. Int. **117** (2), 313–334 (1994). doi [10.1111/J.1365-246X.1994.TB03935.X](https://doi.org/10.1111/J.1365-246X.1994.TB03935.X).
7. D. A. Neklyudov and M. I. Protasov, “Frequency Dependent qP-Lomax Rays in Three-Dimensional Weak TTI Media,” Russ. J. Geophys. Technol. **2**, 40–54 (2024). doi [10.18303/2619-1563-2024-2-40](https://doi.org/10.18303/2619-1563-2024-2-40).



8. M. Kuwahara, K. Hachimura, S. Eiho, and M. Kinoshita, “Processing of RI-Angiocardiographic Images,” in *Digital Processing of Biomedical Images* (Springer, Boston, 1976), pp. 187–202. doi [10.1007/978-1-4684-0769-3_13](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0769-3_13).
9. M. Nagao and T. Matsuyama, “Edge Preserving Smoothing,” *Comput. Graphics Image Process.* **9** (4), 394–407 (1979). doi [10.1016/0146-664x\(79\)90102-3](https://doi.org/10.1016/0146-664x(79)90102-3).
10. P. Perona and J. Malik, “Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **12** (7), 629–639 (1990). doi [10.1109/34.56205](https://doi.org/10.1109/34.56205).
11. J. Weickert, *Anisotropic Diffusion in Image Processing* (Teubner, Stuttgart, 1998). <https://isbnsearch.org/isbn/9783519026068>. Cited August 23, 2025.
12. W. Wang, J. Gao, K. Li, et al., “Structure-Oriented Gaussian Filter for Seismic Detail Preserving Smoothing,” in *16th IEEE Int. Conf. on Image Processing, Cairo, Egypt, November 7–10, 2009*, pp. 601–604. doi [10.1109/icip.2009.5413869](https://doi.org/10.1109/icip.2009.5413869).
13. J. Rickett and S. Fomel, *A Second-Order Fast Marching Eikonal Solver*, Stanford Exploration Project, Technical Report No. 100, 1999. pp. 287–293.
14. Madagascar main page. https://ahay.org/index.php/Main_Page. Cited August 23, 2025.
15. G. C. Fehmers and C. F. W. Höcker, “Fast Structural Interpretation with Structure-Oriented Filtering,” *Geophysics* **68** (4), 1286–1293 (2003). doi [10.1190/1.1598121](https://doi.org/10.1190/1.1598121).
16. D. Hale, “Structure-Oriented Smoothing and Semblance,” *Center for Wave Phenomena Report* **635**, 261–270 (2009).
17. G. Yao, N. V. da Silva, and D. Wu, “Reflection-Waveform Inversion Regularized with Structure-Oriented Smoothing Shaping,” *Pure Appl. Geophys.* **176** (1), 5315–5335 (2019). doi [10.1007/s00024-019-02265-6](https://doi.org/10.1007/s00024-019-02265-6).
18. L. Luo, Y. Rao, Z. Zhao, and J. Zhang, “Adaptive Structure-Based Full-Waveform Inversion,” *Geophysics* **89** (3), R303–R313 (2024). doi [10.1190/GEO2023-0273.1](https://doi.org/10.1190/GEO2023-0273.1).
19. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992). <https://isbnsearch.org/isbn/0521431085>. Cited August 23, 2025.

Received
July 14, 2025

Accepted
July 16, 2025

Published
September 9, 2025

Information about the authors

Aleksandr D. Stein — Engineer; Trofimuk Institute of Petroleum-Gas Geology and Geophysics SB RAS, Koptyug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.

Maksim I. Protasov — Dr. Sci., Head of the Laboratory; Trofimuk Institute of Petroleum-Gas Geology and Geophysics SB RAS, Koptyug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.