

Структурный двухуровневый нейросетевой подход к совместной инверсии гравитационных и магнитных полей

Янфей Ван

Институт геологии и геофизики Китайской академии наук, Пекин, Китай
ORCID: 0000-0001-7992-3999, e-mail: yfwang@mail.iggcas.ac.cn

Д. В. Чурбанов

Московский физико-технический институт,
кафедра высшей математики, Долгопрудный, Российская Федерация
ORCID: 0009-0007-3799-9419, e-mail: churbanov.dv@phystech.edu

Р. Л. Аргун

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-3749-1811, e-mail: argun.r114@physics.msu.ru

А. В. Горбачев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-7054-5191, e-mail: gorbachev.av17@physics.msu.ru

А. С. Леонов

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
кафедра высшей математики, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-9659-0305, e-mail: asleonov@mephi.ru

Д. В. Лукьяненко

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-5140-3617, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

Аннотация: В работе предлагается новый двухуровневый нейросетевой подход к совместной инверсии гравитационных и магнитных полей в задаче поиска полезных ископаемых. Нижний уровень использует две эквивалентные по архитектуре нейронные сети. Одна вычисляет распределение источников гравитационного поля в заданной области по измерениям этого поля на некоторой удаленной поверхности. Вторая находит в той же области распределение источников магнитного поля по измерениям магнитного поля. На верхнем уровне вычисляется структурная невязка двух полученных распределений источников, которая определяет “степень различия” их геометрий. Результирующая нейронная сеть обучается таким образом, чтобы структурная невязка была минимальной. В итоге эта двухуровневая система реализует вычислительный алгоритм, который находит геометрически близкие источники полей различной природы. Тестовые расчеты демонстрируют высокое качество совместной инверсии модельных гравитационных и магнитных полей в рамках предложенного подхода.

Ключевые слова: обратная задача, совместная обработка гравитационных и магнитных полей, нейронные сети, структурная невязка.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект RSF–NSFC № 23–41–00002) и Государственного фонда естественных наук Китая (проект NSFC–RSF № 12261131494). Тестовые расчеты выполнены с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М. В. Ломоносова [1].

Для цитирования: Ван Я., Чурбанов Д.В., Аргун Р.Л., Горбачев А.В., Леонов А.С., Лукьяненко Д.В. Структурный двухуровневый нейросетевой подход к совместной инверсии гравитационных и магнитных полей // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 3. 322–339. doi 10.26089/NumMet.v26r322.



A structural two-level neural network approach to joint inversion of gravitational and magnetic fields

Yanfei Wang

Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China

ORCID: 0000-0001-7992-3999, e-mail: yfwang@mail.igcas.ac.cn

Dmitry V. Churbanov

Moscow Institute of Physics and Technology, Department of Higher Mathematics, Dolgoprudny, Russia

ORCID: 0009-0007-3799-9419, e-mail: churbanov.dv@phystech.edu

Raul L. Argun

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Department of Mathematics, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0003-3749-1811, e-mail: argun.rl14@physics.msu.ru

Alexander V. Gorbachev

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Department of Mathematics, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0002-7054-5191, e-mail: gorbachev.av17@physics.msu.ru

Alexander S. Leonov

National Research Nuclear University MEPhI, Department of Higher Mathematics, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0001-9659-0305, e-mail: asleonov@mephi.ru

Dmitry V. Lukyanenko

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Department of Mathematics, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0001-5140-3617, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

Abstract: The paper proposes a new two-level neural network approach to joint inversion of gravitational and magnetic fields in the problem of mineral exploration. The lower level uses two neural networks with equivalent architecture. The first network calculates the distribution of gravitational field sources in a given domain based on measurements of this field on a certain remote surface. The second one finds the distribution of magnetic field sources in the same area based on magnetic field measurements. At the upper level, a structural residual between the two obtained source distributions is calculated, which determines the “degree of difference” of their geometries. The resulting neural network is trained to minimize this structural discrepancy. As a result, this two-level system implements a computational algorithm that finds geometrically close sources of fields of different nature. Test simulations demonstrate the high quality of joint inversion of model gravitational and magnetic fields within the proposed approach.

Keywords: inverse problem, joint processing of gravitational and magnetic fields, neural networks, structural residual.

Acknowledgements: This work was supported by Russian Science Foundation (RSF–NSFC project No. 23–41–00002) and National Science Foundation of China (NSFC–RSF project No. 12261131494). The testing calculations are carried out using the equipment of the shared research facilities of HPC computing resources at Lomonosov Moscow State University [1].

For citation: Y. Wang, D. V. Churbanov, R. L. Argun, A. V. Gorbachev, A. S. Leonov, D. V. Lukyanenko, “A structural two-level neural network approach to joint inversion of gravitational and magnetic fields,” **26** (3), 322–339 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r322.

1. Введение. Задачи инверсии потенциальных полей, которые часто возникают в гравиразведке и магниторазведке, являются важной составляющей практического поиска полезных ископаемых. Среди таких задач существенный интерес представляют те, которые связаны с восстановлением формы и места залегания трехмерных рудных структур. Данными здесь служат различные измерения гравитационных и магнитных полей. Поиск по этим данным распределений источников гравитационного (магнитного) поля принято называть обратной задачей гравиметрии (магнитометрии). Как правило, соответствующие

обратные задачи математически ставились и решались раздельно [2–5]. Однако в последнее время возник большой интерес к их совместному решению (см., например, обзор [6]).

Каждая из указанных обратных задач является некорректно поставленной, и при их раздельном решении часто используется тихоновская регуляризация [4, 7, 8]. Как пример, можно привести работу [9]. Также используются методы, в которых регуляризация обеспечивается достаточно детальной априорной информацией о решении. Априорная информация может быть использована и для упрощения процедур решения. Например, если известно, что восстанавливаемый подземный объект имеет слоистую структуру с известной плотностью каждого слоя, то можно поставить обратную задачу о восстановлении формы поверхности, разделяющих эти слои [10, 11]. В этом случае исходная задача восстановления трехмерной области залегания рудного пласта сводится к двумерной задаче определения поверхностей раздела. Полученное понижение размерности решаемой задачи существенно уменьшает ее вычислительную сложность. Если же никакой априорной информации о решении нет, то задачи инверсии потенциальных полей приходится решать в общей (трехмерной) постановке. Это, в свою очередь, сопряжено со значительными теоретическими и вычислительными трудностями. Еще большие сложности возникают при попытках *совместной инверсии полей*.

В данной работе мы рассматриваем проблему совместной инверсии потенциальных полей, предполагая, что источники гравитационного и магнитного поля сосредоточены в одной и той же области и имеют одну и ту же параметризованную геометрическую форму. Наша цель — найти пространственную структуру и место залегания *единого рудного тела*, состоящего из этих источников. Данными для решения этой задачи служат измерения потенциальных полей (гравитационного и магнитного), создаваемых рудным телом на поверхности рельефа местности или вблизи нее. Предлагаемый нами подход к решению этой задачи будет основан на использовании нейронных сетей и методов машинного обучения [12]. Как нам представляется, такая методика открывает возможности для развития эффективных подходов именно в *трехмерной совместной инверсии* потенциальных полей. Основанием служит *выразительная способность* нейронных сетей, то есть возможность эффективно воспроизводить сложные зависимости.

При проектировании и использовании нейронных сетей необходимо решить несколько проблем: выбрать тип и архитектуру нейронной сети, выбрать параметры обучения, задать критерий обучения (*функцию потерь*, loss), адекватно задать множество данных для обучения (*датасет*, dataset). Все эти аспекты должны отражать специфику решаемой задачи, и об этом будет сказано ниже. Но для задачи совместной инверсии потенциальных полей с помощью нейронных сетей возникает и ряд дополнительных проблем. Большинство из них связано с некорректностью решаемой обратной задачи.

Прежде всего, это неединственность ее решения [2, 3, 13]. Одному и тому же набору измерений гравитационного и/или магнитного поля на заданной поверхности могут отвечать различные по геометрическим конфигурациям и физическим свойствам наборы трехмерных подземных источников. Другая проблема — это неустойчивость решений задачи инверсии по отношению к малым возмущениям данных: “близким” данным (в рассматриваемой метрике) могут соответствовать существенно разные подземные структуры. Это может приводить к неприемлемым ошибкам определения таких характерных особенностей рудных структур, как разломы и трещины. Наконец, третья проблема — это невозможность оценить точность полученных решений обратной задачи без наличия детальной априорной информации о решении. Эта проблема связана именно с некорректностью решаемой обратной задачи, и она хорошо известна из теории решения некорректно поставленных задач [8, 14].

В принципе, все эти проблемы решаются в обычных (не нейросетевых) подходах к задачам инверсии полей путем конечномерной параметризации их источников с известной плотностью или магнитными свойствами вещества. Тогда источники образуют компактное множество в соответствующем функциональном пространстве, и решение обратной задачи часто оказывается однозначным и устойчивым по отношению к возмущениям данных. На компактном классе решений можно также получить и оценку их точности [8, 14, 15]. Эту идею удобно применить также в нейросетевом подходе за счет использования специализированного датасета.

При обучении нейронных сетей весьма важен не только достаточный объем датасета, но и его качественный (по виду представителей) состав. Он должен включать в себя данные и результаты совместной инверсии именно для используемых параметрических классов источников. Желательно также включать туда результаты обработки геофизических данных, хотя количество таких результатов в открытом доступе весьма мало. Соответственно, для построения адекватного датасета приходится частично генерировать решения обратных задач из моделей и, по возможности, дополнять такие искусственные данные реаль-

ными. В общем случае при минимуме априорной информации о решении в задачах совместной инверсии полей от тел различной нерегулярной формы приходится использовать только *синтетический датасет*. Его параметризация в значительной степени влияет на устойчивость решений обратной задачи. В него удобно включать такие параметризованные формы источников потенциальных полей, как комбинации призм и ступенек различной формы с известной плотностью вещества, а также тела нерегулярной формы, которые сгенерированы на основе некоторого стохастического процесса из случайного набора кубиков меньшего размера [16]. Возможны также и другие способы получения датасета из различных трехмерных тел нерегулярной формы [17]. В любом случае такой датасет должен учитывать имеющуюся априорную информацию о решении. В частности, это может быть статистическая информация от экспертов-геологов, которая включает в себя различные геологические сценарии и оценки [18].

Обучение всякой нейронной сети основано на минимизации функции потерь — невязки точных и приближенных решений для обучающей части датасета. Эти невязки могут иметь различную форму. Поскольку нейронная сеть в конечном итоге решает некорректную обратную задачу, вид функции потерь вместе с датасетом должен обеспечивать однозначность и устойчивость решения. Выбор функции потерь определяет также качество (точность) работы нейронной сети. С другой стороны, функция потерь в нашем случае должна отражать специфику *составности* инверсии полей. Поэтому мы будем использовать для обучения нейронной сети так называемые *структурные функции потерь*. Здесь целесообразно дать краткие пояснения по этому поводу.

В геофизике для обычной (не нейросетевой) совместной обработки разнородных входных данных хорошо зарекомендовал себя с точки зрения обеспечения устойчивости решения так называемый структурный подход [19–21]. Примером популярных реализаций структурного подхода является использование в качестве функции потерь функционала *кросс-градиентов*, коэффициента “*Dice-Sorensen*” [22] и др. Эти функционалы определяют меру сходства двух множеств и могут быть использованы для сравнения пространственных структур источников гравитационного и магнитного поля при известных плотностях вещества и его магнитных характеристиках. Важной в структурном подходе является идея использования составной невязки, включающей в себя ряд функционалов различного “физического смысла” с весами. Именно ее мы и будем применять в нашем нейросетевом алгоритме.

Обсудим проблему выбора вида и архитектуры нейронной сети для решения задачи совместной инверсии потенциальных полей. Для решения многомерных задач раздельной инверсии хорошо показали себя сверточные нейронные сети (СНС, CNN, Convolutional Neural Networks) (см., например, [23, 24]). Последний всплеск интереса к нейросетевому анализу данных напрямую связан именно с их применением. В геофизике обработка данных при помощи СНС широко применяется для раздельной инверсии геофизических данных разной природы: сейсмических [25], электромагнитных [26, 27] и т.д. Для раздельной инверсии гравитационных и магнитных полей также применялись различные СНС-модели, и они продемонстрировали свою эффективность (см. [28, 29] и др.). Из нескольких архитектур таких сетей наиболее перспективной, на наш взгляд, является сверточная нейронная сеть с аббревиатурой “U-Net” [30]. Имеются различные модификации этой архитектуры (Unet++ [31], Unet3++ [32]). Применение таких сетей для решения трехмерных задач георазведки было описано в [11].

В нашей работе предлагается алгоритм совместной инверсии гравитационных и магнитных полей, основанный на так называемом *двухуровневом нейросетевом подходе*. “Нижний” уровень включает две вспомогательные нейронные сети типа U-Net. Одна вычисляет пространственное распределение источников гравитационного поля (с известной плотностью вещества) в некоторой области по измерениям этого поля на удаленной поверхности. Другая решает аналогичную задачу для источников магнитного поля (с известными магнитными характеристиками) в той же области по измерениям на той же поверхности. Геометрически датасет для совместного обучения нейронных сетей строится на основе синтетических (моделей) рудных тел различной формы, генерируемых при помощи некоторого стохастического алгоритма из элементарных объектов (например, кубиков). Для каждого такого тела путем решения прямых задач строятся включающиеся в датасет раздельные распределения гравитационного и магнитного полей на выбранной “поверхности измерений”. Выходные результаты двух нейросетей, представляющие собой распределения источников, объединяются для дальнейшего обучения на “верхнем” уровне. Непосредственно они используются для вычисления общей функции потерь (взвешенной структурной невязки). Последняя включает в себя невязочные функционалы (вообще говоря, различного вида) для гравитационных и магнитных решений так, чтобы в итоге обеспечить близость границ распределения источников гравитационного и магнитного полей. В функцию потерь могут быть включены также функционалы, отражающие

различные априорные ограничения. Эта функция потерь и используется для обучения всей нейросетевой системы.

Приведенные ниже результаты нашей работы структурированы следующим образом. В разделе 2 даются формулы решения прямой задачи для расчета гравитационного и магнитного полей в заданных точках по заданным плотностям распределения источников гравитационного и магнитного поля. В разделе 3 описывается метод решения обратной задачи с помощью нейронных сетей типа U-Net и вид структурной невязки. Также приводится описание состава и метода построения датасета. В разделе 4 обсуждаются результаты модельных вычислительных экспериментов с помощью предложенного нейросетевого метода совместной инверсии потенциальных полей.

2. Постановка прямых задач магнитометрии и гравиметрии. Для решения прямой задачи вычисления магнитного поля по распределению источников используется следующая математическая модель. Будем предполагать, что некоторый объем V заполнен магнитными массами с интенсивностью намагниченности (вектором намагниченности) $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = (M_x(\mathbf{r}), M_y(\mathbf{r}), M_z(\mathbf{r}))^T$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r} \in V$. Известно (см., например, [33]), что индукция магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}_s) = (B_x(\mathbf{r}_s), B_y(\mathbf{r}_s), B_z(\mathbf{r}_s))^T$, создаваемая в точке $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s) \notin V$, где магнитных масс нет, может быть представлена в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) d\mathbf{r}. \quad (1)$$

Для простоты будем считать, что область V есть параллелепипед вида $V = [X^{\min}, X^{\max}] \times [Y^{\min}, Y^{\max}] \times [Z^{\min}, Z^{\max}]$. Тогда соотношение (1) можно переписать в более удобной для численного решения форме:

$$\mathbf{B}(x_s, y_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{X^{\min}}^{X^{\max}} \int_{Y^{\min}}^{Y^{\max}} \int_{Z^{\min}}^{Z^{\max}} \mathbf{K}^M(x, y, z, x_s, y_s, z_s) \mathbf{M}(x, y, z) dx dy dz. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{K}^M(x, y, z, x_s, y_s, z_s)$ — матричная функция, имеющая следующий вид:

$$\mathbf{K}^M(x, y, z, x_s, y_s, z_s) = \frac{1}{R^5} \begin{pmatrix} 3(x - x_s)^2 - R^2 & 3(x - x_s)(y - y_s) & 3(x - x_s)(z - z_s) \\ 3(y - y_s)(x - x_s) & 3(y - y_s)^2 - R^2 & 3(y - y_s)(z - z_s) \\ 3(z - z_s)(x - x_s) & 3(z - z_s)(y - y_s) & 3(z - z_s)^2 - R^2 \end{pmatrix},$$

где

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}.$$

Вычисление векторного поля $\mathbf{B}(x, y, z)$ осуществляется путём дискретизации соотношения (2). Мы используем ее простейшую форму. Область V разбивается на N подобластей с номерами $\{i\}$, $i = \overline{1, N}$. Координаты (x_i, y_i, z_i) — это положение некоторого геометрического центра i -й подобласти, а ее объем есть Δv_i . В этих центрах задаются значения $\mathbf{M}(x_i, y_i, z_i)$. В результате вместо равенства (2) мы получаем систему равенств

$$\mathbf{B}(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \mathbf{K}^M(x_i, y_i, z_i, x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}) \mathbf{M}(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i, \quad j = \overline{1, S}. \quad (3)$$

Здесь набор координат $(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$, $j = \overline{1, S}$, определяет положения S точек, в которых сенсоры измеряют магнитную индукцию $\mathbf{B}(x_s, y_s, z_s)$, создаваемую телом. Мы считаем, что эти точки расположены в прямоугольнике на некоторой фиксированной плоскости, удаленной от V так, что $(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}) \in [X_s^{\min}, X_s^{\max}] \times [Y_s^{\min}, Y_s^{\max}] \times \{z_{s_j} = Z_s\}$, $Z_s \notin [Z^{\min}, Z^{\max}]$.

Равенства (3) будем представлять в матричной форме

$$b_B = A^M x_M.$$

Матрица A^M и векторы x_M и b_B имеют следующую блочную структуру:

$$A^M = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^M \Delta v_1 & \mathbf{K}_{12}^M \Delta v_2 & \dots & \mathbf{K}_{1N}^M \Delta v_N \\ \mathbf{K}_{21}^M \Delta v_1 & \mathbf{K}_{22}^M \Delta v_2 & \dots & \mathbf{K}_{2N}^M \Delta v_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{S1}^M \Delta v_1 & \mathbf{K}_{S2}^M \Delta v_2 & \dots & \mathbf{K}_{SN}^M \Delta v_N \end{pmatrix}, \quad x_M = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_N \end{pmatrix}, \quad b_B = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_S \end{pmatrix}.$$



Здесь блок \mathbf{K}_{ji}^M вычисляется для пары точек (x_i, y_i, z_i) и $(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$; блок \mathbf{M}_i вектора x_M содержит набор сеточных значений компонент вектор-функции \mathbf{M} в точке (x_i, y_i, z_i) ; блок \mathbf{B}_j вектора b_B содержит набор вычисленных в точке $(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$ компонент вектор-функции \mathbf{B} . В явном виде эти блоки задаются следующим образом:

$$\mathbf{K}_{ji}^M = \frac{1}{R_{ji}^5} \begin{pmatrix} 3(x_i - x_{s_j})^2 - R_{ji}^2 & 3(x_i - x_{s_j})(y_i - y_{s_j}) & 3(x_i - x_{s_j})(z_i - z_{s_j}) \\ 3(y_i - y_{s_j})(x_i - x_{s_j}) & 3(y_i - y_{s_j})^2 - R_{ji}^2 & 3(y_i - y_{s_j})(z_i - z_{s_j}) \\ 3(z_i - z_{s_j})(x_i - x_{s_j}) & 3(z_i - z_{s_j})(y_i - y_{s_j}) & 3(z_i - z_{s_j})^2 - R_{ji}^2 \end{pmatrix},$$

где

$$R_{ji} = \sqrt{(x_i - x_{s_j})^2 + (y_i - y_{s_j})^2 + (z_i - z_{s_j})^2};$$

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} M_x(x_i, y_i, z_i) \\ M_y(x_i, y_i, z_i) \\ M_z(x_i, y_i, z_i) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} B_x(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}) \\ B_y(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}) \\ B_z(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}) \end{pmatrix}.$$

Формулы для другой прямой задачи — вычисления потенциала гравитационного поля по распределению источников [33] — строятся в той же области их расположения и в том же прямоугольнике положений сенсоров. Если прямоугольный параллелепипед V заполнен веществом с объемной плотностью вещества $\bar{\rho}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$, то потенциал $\bar{\varphi}(\mathbf{r}_s)$ гравитационного поля, индуцируемый этим веществом в точке $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$ расположения сенсора, представляется в виде

$$\bar{\varphi}(\mathbf{r}_s) = G \iiint_V \frac{\bar{\rho}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} dv. \quad (4)$$

Здесь G — гравитационная постоянная. По аналогии с (2) равенство (4) запишем в виде:

$$\bar{\varphi}(x_s, y_s, z_s) = G \int_{X^{\min}}^{X^{\max}} \int_{Y^{\min}}^{Y^{\max}} \int_{Z^{\min}}^{Z^{\max}} K^G(x, y, z, x_s, y_s, z_s) \bar{\rho}(x, y, z) dv, \quad (5)$$

где

$$K^G(x, y, z, x_s, y_s, z_s) = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}}.$$

Используя ту же схему конечномерной аппроксимации интегрального уравнения (5), получим следующий набор равенств:

$$\bar{\varphi}(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}) = G \sum_{i=1}^N K^G(x_i, y_i, z_i, x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}) \bar{\rho}(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i, \quad j = \overline{1, S}, \quad (6)$$

который в матричной форме принимает вид

$$b_\varphi = A^G x_\rho.$$

Здесь матрица A^G и векторы x_ρ и b_φ выражаются формулами

$$A^G = G \begin{pmatrix} K_{11}^G \Delta v_1 & K_{12}^G \Delta v_2 & \dots & K_{1N}^G \Delta v_N \\ K_{21}^G \Delta v_1 & K_{22}^G \Delta v_2 & \dots & K_{2N}^G \Delta v_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{S1}^G \Delta v_1 & K_{S2}^G \Delta v_2 & \dots & K_{SN}^G \Delta v_N \end{pmatrix}, \quad x_\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{pmatrix}, \quad b_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_S \end{pmatrix},$$

причем

$$K_{ji}^G = \frac{1}{R_{ji}}, \quad \rho_i = \bar{\rho}(x_i, y_i, z_i), \quad \varphi_j = \bar{\varphi}(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}).$$

Приведенные формулы позволяют по заданному набору точек (x_i, y_i, z_i) , $i = \overline{1, N}$, значениям объемов Δv_i , источникам гравитационного поля $\rho_i = \bar{\rho}(x_i, y_i, z_i)$ в объемах Δv_i , источникам магнитного поля

(значениям плотности магнитного момента $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}(x_i, y_i, z_i)$ в Δv_i) вычислить в точках с координатами $(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$, $j = \overline{1, S}$, значения $\varphi_j = \bar{\varphi}(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$ и $\mathbf{B}_j = \mathbf{B}(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$, соответствующие гравитационному и магнитному полю.

Замечание. В случае расчетов для реальных гравитационных аномалий величины ρ_i интерпретируются как превышения элементов плотности рудного тела над плотностью окружающих грунтов. Таким образом, существенно отличные от нуля величины ρ гарантируются лишь для значительных гравитационных аномалий, вызываемых рудным телом.

Сделаем важное модельное уточнение. Из геофизических исследований известно, что намагниченность наиболее распространенных рудных тел индуцируется глобальным геомагнитным полем Земли, которое в масштабах типичных задач геологоразведки (~ 10 км) можно считать постоянным. Как следствие, все векторы намагниченности $\mathbf{M}(x, y, z)$ в различных точках исследуемой области при таких размерах исследуемого тела можно считать сонаправленными. Такое предположение в определенной степени можно интерпретировать и как неизменность вектора намагниченности при его регистрации сенсорами, которые движутся над магнитной аномалией. Это мы и будем предполагать, задавая постоянное направление орта вектора \mathbf{M} . Сделанное допущение позволяет искать только длину \bar{m} вектора \mathbf{M} . Ей будет сопоставляться не вся вектор-функция индуцированного магнитного поля \mathbf{B} , а лишь его z -компоненту, которую будем обозначать как \bar{b} , т.е. $\bar{b} = B_z$. Такое модельное предположение дает возможность работать с гравитационными и магнитными решениями одинакового размера, что несколько упрощает форму применяемого структурного нейросетевого подхода.

Замечание. Также возможно длине вектора \mathbf{M} сопоставить длину вектора \mathbf{B} . С учетом сделанного предположения это эквивалентно сопоставлению его z -компоненты или модуля вектора \mathbf{B} . При этом надо отметить, что сделанные предположения о векторе намагниченности, как и всякие дополнительные предположения, несколько сужают область практической применимости рассматриваемой математической модели.

Таким образом, формулы (3) и (6) используются при генерации датасета для обучения нейронной сети следующим образом. Для всякого допустимого набора точек $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^N$, которым сопоставлены величины $\{\Delta v_i\}_{i=1}^N$, $\{\rho_i = \bar{\rho}(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^N$, $\{m_i = \bar{m}(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^N$ и постоянное направление орта вектора \mathbf{M} , вычисляются значения гравитационного и магнитного полей $\varphi_j = \bar{\varphi}(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$ и $b_j = \bar{b}(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$ в точках с заданными координатами $(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})$, $j = \overline{1, S}$. Таким путем набору решений $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_N\}$ обратной задачи можно сопоставить набор ее данных $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_S\}$, а аналогичному набору решений $m = \{m_1, \dots, m_N\}$ — набор данных $b = \{b_1, \dots, b_S\}$.

3. Методика объединения двух нейронных сетей и структурная невязка. Как альтернатива к решению обратной задачи инверсии гравитационных и магнитных полей с помощью регуляризации обратного оператора, в нашей работе применяется так называемый *основанный на данных подход* (data-driven approach) к регуляризации с использованием нейронных сетей. В нем регуляризирующие свойства построенной нейронной сети определяются подбором параметров сети, заданием функции потерь, а также выбором датасета, на котором данная нейронная сеть предварительно обучается. Регуляризующее действие в последнем случае связано с тем, что нейронная сеть стремится воспроизводить объекты, близкие по своим характеристикам к элементам обучающего датасета.

3.1. Генерация датасета. Данные для обучения (датасеты) получались следующим образом. Рассматриваемая область V разбивалась на N подобластей (параллелепипедов) с центрами (x_i, y_i, z_i) , $i = \overline{1, N}$. Затем задавались K различных распределений гравитационных и магнитных источников на сетке величин $\{(x_i, y_i, z_i)\}$, т.е. определялись сеточные функции

$$\rho^{(k)} = \{\rho^{(k)}(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^N, \quad m^{(k)} = \{m^{(k)}(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^N, \quad k = \overline{1, K}.$$

Задавая компоненты этих распределений нулями в точках отсутствия источников, мы определяем гравитационную и магнитную геометрию k -го рудного тела, включаемого в обучающую выборку. Далее по каждому из распределений $\rho^{(k)}$ и $m^{(k)}$ по формулам из разделе 2 вычислялись сеточные распределения полей: $\varphi^{(k)} = \{\varphi^{(k)}(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})\}_{j=1}^S$ и $b^{(k)} = \{b^{(k)}(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})\}_{j=1}^S$ на сетке сенсоров $\{(x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j})\}$, $j = \overline{1, S}$. В итоге был сформирован гравиметрический датасет $\mathcal{D}_g = \{(\rho^{(k)}, \varphi^{(k)})\}_{k=1}^K$ и магнитометрический датасет $\mathcal{D}_m = \{(m^{(k)}, b^{(k)})\}_{k=1}^K$. Формально они задают соответствие входных и выходных данных нейросетей. Их можно использовать для раздельного обучения двух нейронных сетей (гравитационной и магнитной), способных восстанавливать распределения источников соответствующего поля. Можно также объединить эти датасеты в новое множество $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_g, \mathcal{D}_m\}$ для совместного обучения сетей.



3.2. Архитектура нейронной сети. Как известно из теоремы об универсальном аппроксиматоре [34], даже односвязная сеть может приблизить произвольную функцию с любой наперед заданной точностью. Однако в случае одноуровневой сети количество параметров, при которых будет достигаться заданная точность, может оказаться настолько большим, что задача обучения нейронной сети станет чрезвычайно сложной с вычислительной точки зрения. Как следствие, эффективность применения нейронной сети резко снижается. В связи с этим для уменьшения числа параметров сети в ней увеличивают количество слоев нейронов, т.е. переходят к *глубокому обучению* (deep learning). Во многих приложениях (например, в задачах обработки изображений) входные и выходные сети имеют весьма сложный вид. Это же касается и задачи инверсии потенциальных полей, где данные о полях и искомых плотностях источников имеют различную пространственную размерность и сложную пространственную структуру. В таких случаях эффективно используются сверточные нейронные сети с глубоким обучением.

В качестве базовой архитектуры нейронной сети, которая по гравитационному или магнитному полю должна восстановить пространственную структуру рудного тела, мы будем использовать архитектуру типа “U-Net” [30]. Она строится по схеме энкодер-декодер. Сначала входная информация обрабатывается энкодером, который сжимает данные в *латентное представление* меньшей размерности, но с большим числом слоев. Над данными проводятся операции специального вида (свертки и др.), после чего декодер приводит данные из сжатого латентного представления в исходную размерность или близкую к заданной, в зависимости от решаемой задачи.

Для реализации работы энкодера и декодера необходимо преобразовать все элементы датасета в специальный тензорный вид. Наблюдаемые на сетке сенсоров гравитационное $\varphi^{(k)}$ и магнитное $b^{(k)}$ поля приводятся к тензорам $\varphi_{\text{tensor}}^{(k)}$ и $b_{\text{tensor}}^{(k)}$ размерности $1 \times M_S^x \times M_S^y$ (при этом $M_S^x \cdot M_S^y = S$). В свою очередь, распределение источников гравитационного и магнитного поля $\rho^{(k)}$ и $m^{(k)}$ приводятся к тензорам $\rho_{\text{tensor}}^{(k)}$ и $m_{\text{tensor}}^{(k)}$ размерности $M_N^z \times M_N^x \times M_N^y$, так что $M_N^z \cdot M_N^x \cdot M_N^y = N$. Способ заполнения указанных тензоров соответствующими сеточными значениями также может быть любым, но удобнее заполнять их таким образом, чтобы “срез” тензора для каждого фиксированного значения первого индекса представлял из себя набор сеточных значений соответствующей функции на фиксированной глубине в области V .

Датасеты $\{\varphi_{\text{tensor}}^{(k)}, \rho_{\text{tensor}}^{(k)}\}$ и $\{b_{\text{tensor}}^{(k)}, m_{\text{tensor}}^{(k)}\}$ используются раздельно для обучения двух нейронных сетей. Эти сети реализуют нижний уровень нашего алгоритма инверсии полей. Их архитектура одинакова и представлена на рис. 1. Там же символически показана процедура преобразования размерности тензоров данных в энкодере и декодере. На вход подается тензор размерности $1 \times 32 \times 32$. Он соответствует сеточным значениям размера 32×32 измеряемого в эксперименте гравитационного или магнитного поля в прямоугольнике, который разбит на ячейки двумерной декартовой сеткой размерности 32×32 . На выходе сети образуется тензор размера $16 \times 32 \times 32$. Он содержит сеточные значения плотности источников

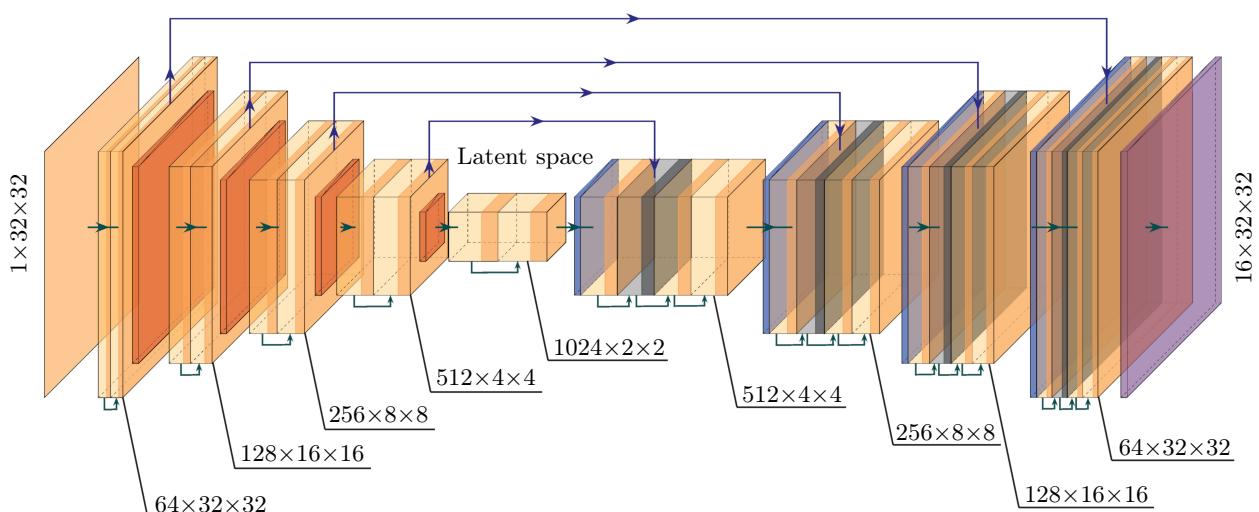


Рис. 1. Архитектура используемой сети типа “U-Net” по слоям

Fig. 1. Architecture of the used network of the “U-Net” type by layers

в трехмерной области, которая разбита на ячейки декартовой сеткой размерности $16 \times 32 \times 32$. Более детально принцип работы энкодеров и декодеров изложен в литературе [35; 36, с. 233].

3.3. Объединение двух нейронных сетей и структурные невязки. На нижнем уровне алгоритма инверсии полей проводится обучение двух нейронных сетей для раздельной обработки гравитационных и магнитных данных. Для этого используются датасеты, которые мы представим символически в виде $\{x, y\}$. Здесь x — точное решение обратной задачи для ее данных y . Обучение заключается в многократной минимизации некоторой функции потерь $F(w) = F(\{\hat{x}(w)\}, \{x\})$ — невязки выбранного из датасета набора точных решений задачи $\{x\}$ и вычисленного нейронной сетью с параметрами w набора приближенных решений $\{\hat{x}(w)\}$ по соответствующим данным $\{y\}$ датасета. Минимизация проводится по параметрам сети w последовательно для случайно выбранных наборов $\{x, y\}$ так, что в итоге при переходе от набора к набору функция потерь уменьшается. В идеале получаются сетевые параметры \bar{w} , которые могут давать приближенные решения, воспроизводящие любой элемент датасета. На практике, однако, обычно удается достичь лишь приемлемой точности аппроксимации — достаточно малой величины функции потерь $F(w_{\min})$ для параметров обученной сети w_{\min} .

В функциях потерь часто используется функционал, который в литературе иногда называют Dice-нормой. Отметим, что на самом деле для этого функционала не выполнены аксиомы нормы. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о Dice-функционале. Для пары векторов $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_L)$ и $x = (x_1, \dots, x_L)$ одинаковой размерности L он определяется как

$$\text{Dice}(\hat{x}, x) = \frac{2 \sum_{l=1}^L \hat{x}_l x_l}{\sum_{l=1}^L (\hat{x}_l^2 + x_l^2)}.$$

Этот функционал входит в функцию потерь Loss для каждой нейронной сети следующим образом:

$$\text{Loss}_{\text{grav}} = \sum_{k \in \{\text{batch}\}} \left(1 - \text{Dice}(\hat{\rho}^{(k)}, \rho^{(k)}) \right), \quad \text{Loss}_{\text{mag}} = \sum_{k \in \{\text{batch}\}} \left(1 - \text{Dice}(\hat{m}^{(k)}, m^{(k)}) \right).$$

Здесь $\hat{\rho}^{(k)} = \text{NN}_{\text{grav}}(\varphi^{(k)})$ и $\hat{m}^{(k)} = \text{NN}_{\text{mag}}(b^{(k)})$ — выходы соответствующих нейронных сетей, а “NN” — операторное обозначение действия нейронной сети. Таким образом, функции потерь $\text{Loss}_{\text{grav}}$ и Loss_{mag} раздельно определяют “невязки” модельных точных решений соответствующих обратных задач и их приближенных решений с помощью двух различных нейронных сетей. Набор индексов $\{\text{batch}\}$ — это подмножество индексов фиксированного размера из множества $k = \overline{1, K}$, которое на каждом “такте” (эпохе) обучения нейронной сети определяется случайным образом.

При инверсии данных две независимые нейросети дают два пространственных распределения источников: гравитационных и магнитных. Эти распределения геометрически представляются в виде, как правило, различающихся между собой тел. Наша цель — обучить обе нейронные сети так, чтобы формы этих тел были наиболее близкими друг к другу. Для этих целей модифицируем невязку.

Введем общую функцию потерь

$$\text{Loss} = \frac{1}{2} \text{Loss}_{\text{grav}} + \frac{1}{2} \text{Loss}_{\text{mag}}. \quad (7)$$

Она совокупно определяет, насколько хорошо обе нейронные сети воспроизводят модельные решения своих обратных задач при раздельной работе. Однако эта функция не отражает степень сходства формы (структуры) восстановленных рудных тел для гравитационных и магнитных данных. Учесть это необходимо сходство можно, добавив в (7) дополнительный третий член. В итоге получается новая функция (“полная структурная невязка”)

$$\begin{aligned} \text{Loss}_{\text{joint}} = \sum_{k \in \{\text{batch}\}} & \left(\frac{1}{2} \left(1 - \text{Dice}(\hat{\rho}^{(k)}, \rho^{(k)}) \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \text{Dice}(\hat{m}^{(k)}, m^{(k)}) \right) + \right. \\ & \left. + \alpha \left(1 - \text{Dice}(\hat{\rho}^{(k)}, m^{(k)}) \right) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

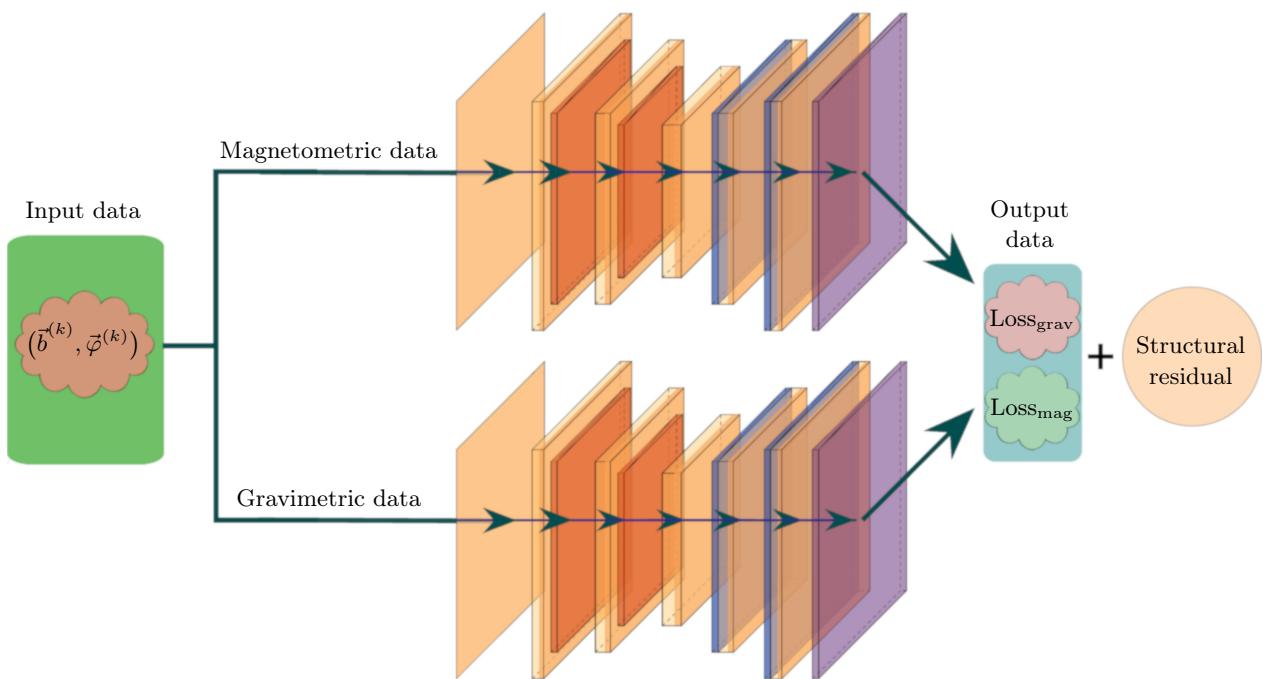


Рис. 2. Схема обучения предложенной двухуровневой нейронной сети, включающей две сети типа “U-Net” и структурную невязку

Fig. 2. The training scheme of the proposed two-level neural network, including two networks of the “U-Net” type and a structural residual

Третий член связывает “гравитационную” и “магнитную” форму получаемых рудных тел и “штрафует” их сильное отличие. Обучив такую сеть верхнего уровня, мы получим инструмент для совместной инверсии полей. Архитектура нашей модели с двумя нейронными сетями и общей невязкой представлена на рис. 2. Параметр $\alpha > 0$ является эвристическим. Про его выбор подробнее сказано в подразделе 4.2.

4. Вычислительные эксперименты и их анализ. Обсудим более подробно элементы нейронетового алгоритма, который использовался нами при численном решении модельных обратных задач совместной инверсии гравитационных и магнитных полей.

4.1. Детали построения датасета. В обучении нейронных сетей для определения трехмерной формы рудного тела при совместной инверсии полей одним из ключевых моментов является выбор/построение датасета. Идеальным решением было бы включение в него данных о реальных рудных телах и решений соответствующих обратных задач. Однако из-за недостатка этой информации приходится генерировать и использовать синтетические датасеты. Геометрические формы входящих в него тел должны отражать теоретически возможные варианты, для которых аналитически вычисляются соответствующие потенциальные поля. Это можно реализовать путем комбинирования призм различных видов и размеров в различных комбинациях взаимного расположения, тел в виде ступенек, которые также комбинируются с призмами и т.д. [33]. В нашей работе для этого применяется стохастический процесс, аналогичный приведенному в [16].

Для его описания определим области, в которых расположены источники полей и сенсоры. Все геометрические размеры даются в метрах. Остальные используемые величины безразмерны. Область $V = [X^{\min}, X^{\max}] \times [Y^{\min}, Y^{\max}] \times [Z^{\min}, Z^{\max}]$, в которой восстанавливалась форма рудного тела, задается величинами: $X^{\min} = 0$, $X^{\max} = 1600$, $Y^{\min} = 0$, $Y^{\max} = 1600$, $Z^{\min} = 0$, $Z^{\max} = 8000$. Эта область была разбита на $32 \times 32 \times 16 = 16384$ ячеек. Соответствующий выходной тензор нейронной сети имеет размеры $M_N^z = 16$, $M_N^x = 32$, $M_N^y = 32$. Для решаемых модельных задач каждая ячейка является кубиком со стороной 50. Прямоугольник $\Pi = [X_s^{\min}, X_s^{\max}] \times [Y_s^{\min}, Y_s^{\max}] \times \{z_{s_j} = Z_s\}$, на котором располагаются модельные сенсоры, был выбран следующих размеров: $X_s^{\min} = 0$, $X_s^{\max} = 1600$, $Y_s^{\min} = 0$, $Y_s^{\max} = 1600$, $Z_s = 0.1$. Он был разбит на $32 \times 32 = 1024$ ячеек, что соответствует входному тензору нейронной сети с размерами $M_N^z = 1$, $M_N^x = 32$, $M_N^y = 32$.

Рудные тела из датасета генерировались по следующему алгоритму:

1. В области V случайным образом задавались координаты одного или двух “центров”. В окрестностях каждого из центров генерировалось 4 кубика-ячейки размера $2 \times 2 \times 2$ с одинаковым единичным значением плотности источников во всех ячейках.
2. Каждый кубик итеративно (40 итераций) смещался в случайно выбранном направлении на 2 ячейки.

Полученное в результате этих действий тело включалось в геометрический датасет. Всего было построено $K = 11\,000$ таких случайно сформированных 3D-объектов. По приведенным в разделе 2 формулам вычислялись соответствующие этим телам гравитационные и магнитные поля, и они включались в датасеты $\mathcal{D}_g = \{(\rho^{(k)}, \varphi^{(k)})\}_{k=1}^K$ и $\mathcal{D}_m = \{(m^{(k)}, b^{(k)})\}_{k=1}^K$.

4.2. Детали обучения нейронных сетей. В качестве алгоритма для оптимизации параметров w нейронной сети использовался типичный для данных моделей оптимизатор *AdamW* с коэффициентом скорости сходимости (learning rate) $3.0 \cdot 10^{-4}$. Принципы работы оптимизатора описаны, например, в работе [37]. Датасет \mathcal{D} разбивался на тренировочную и тестовую выборку $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\text{train}} \cup \mathcal{D}_{\text{test}}$ соответственно по 10 000 и 1 000 объектов в каждой. Таким образом, функции потерь $\text{Loss}_{\text{train}}$ и $\text{Loss}_{\text{test}}$ вычислялись по следующему правилу:

$$\text{Loss}_{\square} = \text{Loss}_{\text{joint}}(\hat{m}^{(k)}, \hat{\rho}^{(k)}, m^{(k)}, \rho^{(k)}),$$

где $\hat{\rho}^{(k)} = NN_{\text{grav}}(\varphi^{(k)})$, $\hat{m}^{(k)} = NN_{\text{mag}}(b^{(k)})$, $(\rho^{(k)}, \varphi^{(k)}, m^{(k)}, b^{(k)}) \in \mathcal{D}_{\square}$, а вместо \square надо подставить *train* или *test*.

Размер множества {batch} эвристически фиксировался равным 64. В этом случае в численных экспериментах получались наилучшие невязки.

Количество эпох обучения принималось равным 300. На каждой эпохе обучения нейронной сети вычислялись соответствующие значения $\text{Loss}_{\text{train}} = \text{Loss}_{\text{train}}(\text{epoch})$ и $\text{Loss}_{\text{test}} = \text{Loss}_{\text{test}}(\text{epoch})$.

При определении оптимального момента остановки обучения нейронной сети важно зафиксировать ситуацию, когда алгоритм начинает *переобучаться* на тренировочных данных. Как правило, этот момент определяется началом “расхождения” кривых $\text{Loss}_{\text{train}}(\text{epoch})$ и $\text{Loss}_{\text{test}}(\text{epoch})$ (рис. 3). В нашем алгоритме обучение останавливалось при том значении $\text{epoch} = \text{iter}_{\text{stop}}$, при котором впервые выполнялось неравенство $|\text{Loss}_{\text{train}}(\text{epoch}) - \text{Loss}_{\text{test}}(\text{epoch})| \geq \varepsilon$. С учетом вида функции потерь (8) можно понять, что характерные значения $\text{Loss}_{\text{train}}$ и $\text{Loss}_{\text{test}}$ близки к 1. Поэтому было выбрано $\varepsilon = 0.02$, что соответствует относительному отличию невязок Loss в несколько процентов.

Итоговое значение невязки, по которому оценивается качество приближенного решения, определяется как $\text{Loss}_{\text{result}} = \text{Loss}_{\text{test}}(\text{iter}_{\text{stop}})$ для итерации, на которой впервые фиксировалось переобучение и соответственно прерывался процесс обучения.

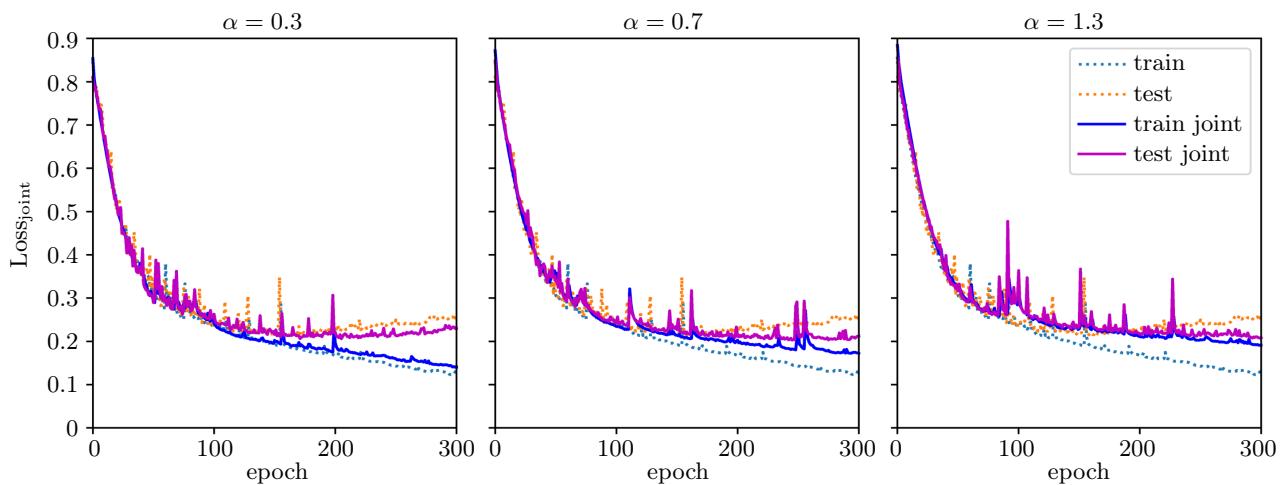


Рис. 3. Сравнение поведения кривых $\text{Loss}_{\text{train}}$ и $\text{Loss}_{\text{test}}$ при различных значениях параметра α (сплошные линии) и при $\alpha = 0$ (точки)

Fig. 3. Comparison of the behavior of the curves $\text{Loss}_{\text{train}}$ and $\text{Loss}_{\text{test}}$ for different values of the parameter α (solid lines) and for $\alpha = 0$ (dots)



4.3. Пример восстановления источников, определяющих трехмерную структуру рудного тела. Рассмотрим восстановление источников гравитационного и магнитного поля, определяющих объект, который изображен на рис. 4 слева. Для этого объекта вычислим входные данные нейронной сети, т.е. гравитационные и магнитные поля в прямоугольнике Π , и обработаем их раздельно с помощью соответствующей сети, а также совместно с помощью обученной нейронной сети со структурной невязкой при $\alpha = 1$ в формуле (8). Результаты представлены на рис. 4 (соответственно в среднем и правом столбцах). Видно, что в случае раздельного решения обратных задач источники магнитного поля восстанавливаются с большей точностью в силу лучшей обусловленности магнитометрической задачи. Это отражается на точности работы соответствующей нейронной сети. Общая пространственная структура модельного рудного тела лучше восстанавливается при совместной обработке данных с помощью двухуровневой сети (правый столбец рисунков).

Замечание. Необходимо отметить, что в результате обучения нейронных сетей с использованием структурной невязки (рис. 2) получаются две обученные нейронные сети, каждую из которых можно использовать по отдельности для восстановления искомого распределения источников гравитационного и магнитного поля.

Результаты расчетов существенно зависят от вида структурной нормы и особенно от вклада ее члена с параметром α . Поэтому вернемся к рис. 3, который иллюстрирует влияние этого параметра на

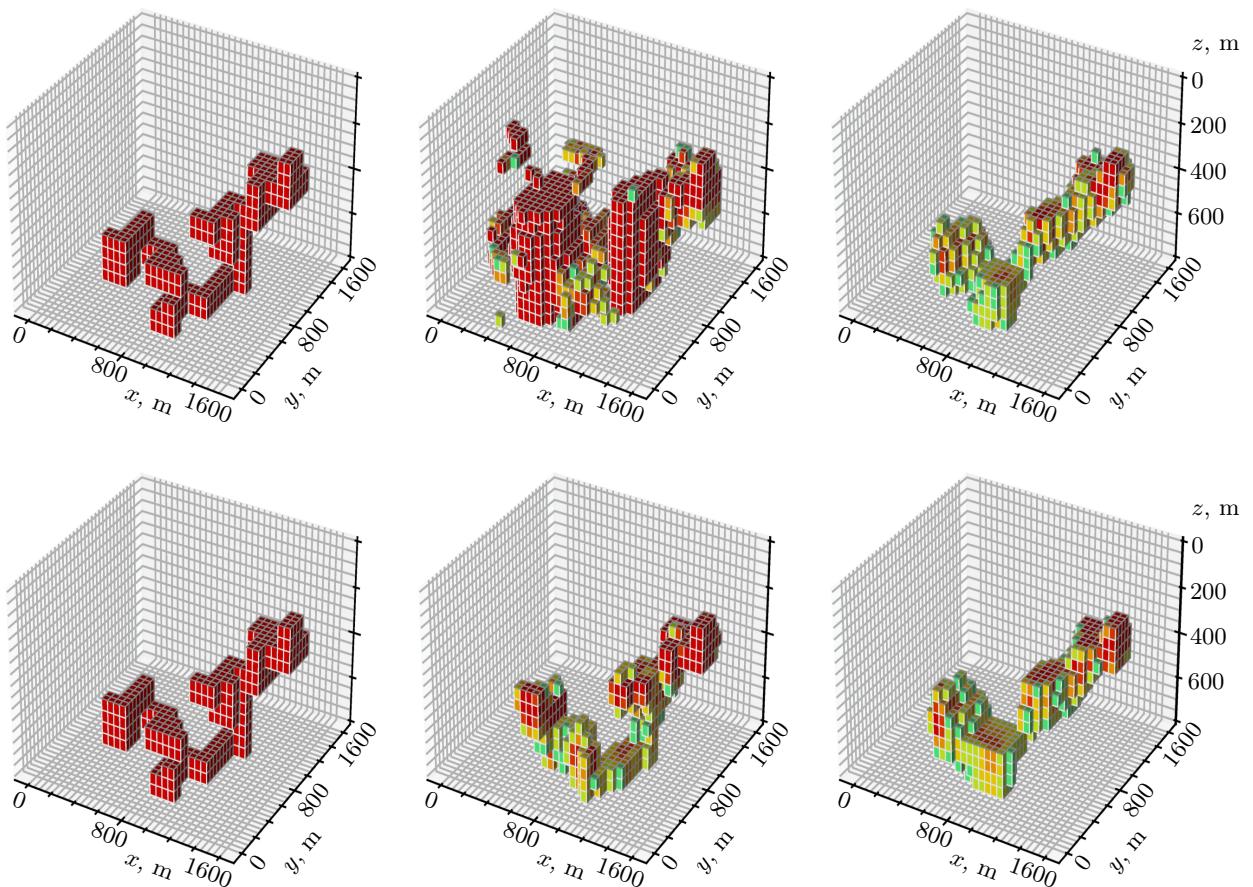
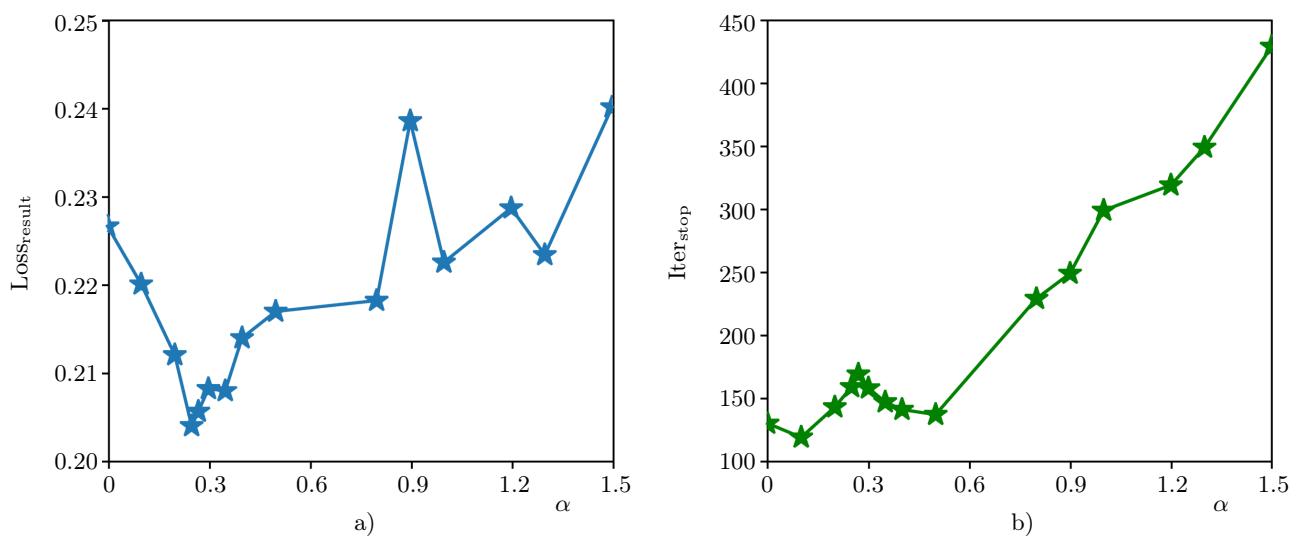


Рис. 4. Пример восстановления гравиметрических и магнитных источников. Верхние рисунки соответствуют распределению источников гравитационного поля, нижние — распределению источников магнитного поля.

В левом столбце изображены модельные точные решения, в среднем столбце — результат раздельного восстановления источников, в правом — результат совместного восстановления

Fig. 4. Example of restoration of gravimetric and magnetic sources. The upper figures correspond to the distribution of gravitational field sources, the lower ones to the distribution of magnetic field sources. The left column shows the model exact solutions, the middle column shows the result of separate restoration of sources, and the right column shows the result of joint restoration

Рис. 5. Зависимости: а) точности $\text{Loss}_{\text{result}}$ от α ; б) номера итерации $\text{iter}_{\text{stop}}$ от α Fig. 5. Dependence of: a) accuracy $\text{Loss}_{\text{result}}$ on α ; b) iteration number $\text{iter}_{\text{stop}}$ on α

невязки $\text{Loss}_{\text{train}}$ и $\text{Loss}_{\text{test}}$ полной нейронной сети. При увеличении параметра α расхождение кривых $\text{Loss}_{\text{train}}(\text{epoch})$ и $\text{Loss}_{\text{test}}(\text{epoch})$ заметно меньше, что говорит о повышении устойчивости результатов. При этом номер итерации $\text{iter}_{\text{stop}}$, фиксирующий расхождение кривых $\text{Loss}_{\text{train}}(\text{epoch})$ и $\text{Loss}_{\text{test}}(\text{epoch})$, увеличивается. Таким образом, лучшая точность будет достигаться при достаточно “больших” значениях параметра α . При этом, однако, увеличивается и вычислительная сложность обучения нейронной сети.

Мы оптимизировали параметр α эвристически. Для этого вычислялась зависимость точности решений нейронной сети $\text{Loss}_{\text{result}}(\alpha)$ для некоторой сетки значений $\alpha \in [0, 1.5]$, а затем выбиралась наилучшая точность. На рис. 5 а представлены значения наилучшей точности $\text{Loss}_{\text{result}} = \text{Loss}_{\text{test}}(\text{iter}_{\text{stop}})$ для разных значений α . Как можно заметить, уменьшение невязки в точке минимума этой кривой по сравнению с невязкой при $\alpha = 0$ составляет около 8%. Таким образом, введение структурной связи в невязке обеспечивает существенное улучшение решений совместной нейронной сети. На рис. 5 б показана зависимость номера итерации окончания обучения $\text{iter}_{\text{stop}}$ от α . Этот номер в среднем постоянно растет, что подтверждает гипотезу об усложнении обучения с ростом α .

Аналогичные вычислительные эксперименты были проведены для объектов размерности $8 \times 16 \times 16$. Для такой более грубой сетки датасета изменение точности работы нейросети при различных параметрах α было не так заметно. Оптимальное значение параметра α , приводящего к наилучшей итоговой точности для тензора решения размерности $8 \times 16 \times 16$, было близко к оптимальному α для размерностей $16 \times 32 \times 32$. Поэтому можно проводить оптимизацию параметра α для нейронных сетей меньшей размерности и использовать такой параметр для более детальных нейросетей.

5. Обсуждение. При анализе полученных результатов сопоставим их с данными из близких по тематике литературных источников. Обратим особое внимание на нижеперечисленные важные моменты.

5.1. Сравнение датасетов. Для обучения нейронных сетей мы использовали синтетические датасеты, что является стандартной практикой в задачах, где реальные данные ограничены. В большинстве работ с применением нейросетевой инверсии геофизических полей используются именно такие датасеты. В задачах определения формы рудных тел датасетов с телами простой формы типа призм и ступенек бывает зачастую достаточно для обучения нейронных сетей, которые затем успешно обрабатывают реальные данные [28]. В результате практической работы таких нейросетей получаются структуры тел, которые удовлетворяют экспертым оценкам. В качестве примера сошлемся на известный датасет NoddyVerse, в котором реализованы различные геологические сценарии. Этот датасет является результатом многолетнего практического экспериментного опыта по анализу различных геологических структур [18]. В нашем подходе синтетический датасет используется для совместной инверсии разнородных геофизических полей.

5.2. Отличительные особенности нейросети для совместной инверсии. В недавней работе [38] был реализован типичный, близкий по тематике, подход к инверсии гравитационных полей при

помощи нейронных сетей. Сравнивая этот подход с нашим, можно увидеть ряд существенных отличий. Во-первых, в [38] восстанавливалось лишь *двумерное* распределение источников (в зависимости от глубины и длины залегания) по *одномерным* наблюдаемым данным. Соответственно датасет строился на двумерных фигурах более простой формы, таких как набор квадратов и ступенек. В нашем подходе использовались трехмерные тела нерегулярной формы, генерируемые случайным образом из простейших тел. Во-вторых, имеются существенные отличия в архитектуре сети. Третье принципиальное отличие заключается в том, что в работе [38] была использована функция потерь типа среднеквадратичной нормы и было добавлено так называемое PINN-условие. Мы же используем функцию потерь совершенно другого вида, совокупно включающую в себя несколько функционалов типа Dice. Эти функционалы представляют отдельно гравитационную и магнитную невязку, а также задают структурную невязку для объединенной оценки близости гравиметрических и магнитных источников.

5.3. Нейронная сеть + регуляризующий алгоритм = новый метод решения. Некоторым недостатком нейросетевого подхода является фиксированная размерность сеточных данных и решений. В связи с этим отметим возможность последовательного использования нейронных сетей и регуляризующих алгоритмов при решении рассматриваемой обратной задачи. В этом случае решение обратной задачи, быстро полученное нейронной сетью, может быть использовано в качестве начального приближения или априорной информации для последующего применения регуляризующего алгоритма, например тихоновской регуляризации. В такой постановке размеры сеток данных и решений при переходе к обычной регуляризации могут быть существенно увеличены для обеспечения большей детализации решений. Кроме того, для полученного регуляризованного решения можно дать апостериорную оценку точности [8].

5.4. Палеомагнетизм + ферромагнитные руды. Использованная в работе модель предполагает, что исследуемые рудные тела в процессе своего формирования не испытывали деструктивные воздействия со стороны тектонических процессов, вулканизма и других схожих процессов [39]. Т.е. предполагается, что в исследуемых рудных телах отсутствуют домены с разными направлениями остаточной намагниченности, которые в случае наличия значительных залежей ферромагнитных материалов могут существенным образом исказить восстановленную форму рудного тела. Таким образом, используемая модель имеет ограниченную область применимости. В частности, она может оказаться не применимой при континентальных исследованиях горных пород, содержащих существенные залежи ферромагнитных материалов. Однако исследования такого рода выходят за рамки данной работы.

6. Выводы. В работе представлен новый подход к совместной обработке гравиметрических и магнитных данных с целью нахождения источников полей на основе двухуровневого нейросетевого подхода и использования структурных невязок. Подход позволяет значительно (на 5–8%) улучшить общую невязку $Loss_{joint}$ точного и нейросетевого решения при обработке модельных данных. Он может быть обобщен, как с точки зрения модификации самих структурных невязок, их комбинированного и оптимизированного использования, так и с точки зрения приложений к другим типам геофизических данных. В качестве возможного направления дальнейшей работы стоит отметить обобщение методологии использования структурной невязки на случай обработки полных векторных магнитных и гравитационных данных.

Список литературы

1. Voevodin Vl.V., Antonov A.S., Nikitenko D.A., et al. Supercomputer Lomonosov-2: large scale, deep monitoring and fine analytics for the user community // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2019. **6**, N 2. 4–11. doi [10.14529/jsfi190201](https://doi.org/10.14529/jsfi190201).
2. Новиков П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала // ДАН СССР. 1938. **18**, № 3. 165–168.
3. Сретенский Л.Н. О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // ДАН СССР. 1954. **99**, № 1. 21–22.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
5. Жданов М.С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука, 1984.
6. Simirdanis K., Simon F., Oikonomou D., Papadopoulos N. A short literature on joint inversion methods in geophysics // Research Report, IMS FORTH, Inrap (DST), 2019.
7. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: КУРС, 2017.
8. Леонов А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач: очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: ЛЕНАНД, 2024.

9. Wang Y., Lukyanenko D., Yagola A. Magnetic parameters inversion method with full tensor gradient data // Inverse Problems and Imaging. 2019. **13**, N 4. 745–754. doi [10.3934/ipi.2019034](https://doi.org/10.3934/ipi.2019034).
10. Akimova E.N., Misilov V.E., Tretyakov A.I. Methods and algorithms of computational mathematics and their applications // Numerical Methods and Programming (Vychislitel'nye Metody i Programmirovaniye). 2023. **24**, N 4. 368–385. doi [10.26089/NumMet.v24r426](https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r426).
11. Huang R., Zhang Y., Vatankhah S., Liu S., Qi R. Inversion of large-scale gravity data with application of VNet // Geophysical Journal International. 2022. **231**, N 1. 306–318. doi [10.1093/gji/ggac190](https://doi.org/10.1093/gji/ggac190).
12. Yu S., Ma J. Deep learning for geophysics: current and future trends // Geophysics. 2021. **59**, N 3. Article ID. e2021RG000742. doi [10.1029/2021RG000742](https://doi.org/10.1029/2021RG000742).
13. Страхов В.Н. Об эквивалентности в обратной задаче гравиметрии при переменной плотности масс // ДАН СССР. 1977. **236**, № 2. 329–331.
14. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
15. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
16. Huang R., Liu S., Qi R., Zhang Y. Deep learning 3D sparse inversion of gravity data // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2021. **126**, N 11. doi [10.1029/2021JB022476](https://doi.org/10.1029/2021JB022476).
17. Qiao S.-B., Li H.-P., Qi R., Zhang Y., Xie S. 3D gravity inversion using cycle-consistent generative adversarial network // Applied Geophysics. 2024. doi [10.1007/s11770-024-1096-5](https://doi.org/10.1007/s11770-024-1096-5).
18. Jessell M., Guo J., Li Y., Lindsay M., Scalzo R., Giraud J., Pirot G., Cripps E., Ogarko V. Into the Noddyverse: a massive data store of 3D geological models for machine learning and inversion applications // Earth System Science Data. 2022. **14**, N 1. 381–392. doi [10.5194/essd-14-381-2022](https://doi.org/10.5194/essd-14-381-2022).
19. Haber E., Oldenburg D. Joint inversion: a structural approach // Inverse Problems. 1997. **13**, N 1. doi [10.1088/0266-5611/13/1/006](https://doi.org/10.1088/0266-5611/13/1/006).
20. Gallardo L.A., Meju M.A. Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of dc resistivity and seismic data // Geophysical Research Letters. 2003. **30**, N 13. doi [10.1029/2003GL017370](https://doi.org/10.1029/2003GL017370).
21. Bosch M., McCaughey J. Joint inversion of gravity and magnetic data under lithologic constraints // The Leading Edge 2001. **20**, N 8. 877–881. doi [10.1190/1.1487299](https://doi.org/10.1190/1.1487299).
22. Dice L.R. Measures of the amount of ecologic association between species // Ecology. 1945. **26**, N 3. 297–302.
23. LeCun Y., Bottou L., Bengio Y., Haffner P. Gradient-based learning applied to document recognition // Proceedings of the IEEE. 1998. **86**, N 11. 2278–2324. doi [10.1109/5.726791](https://doi.org/10.1109/5.726791).
24. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E. ImageNet classification with deep convolutional neural networks // Advances in Neural Information Processing Systems. 2012. **25**.
25. Lin Y., Wu Y. InversionNet: a real-time and accurate full waveform inversion with convolutional neural network // The Journal of the Acoustical Society of America. 2018. **144**, N 3. 1683–1683. doi [10.1121/1.5067485](https://doi.org/10.1121/1.5067485).
26. Noh K., Yoon D., Byun J. Imaging subsurface resistivity structure from airborne electromagnetic induction data using deep neural network // Exploration Geophysics. 2019. **51**, N 2. 214–220. doi [10.1080/08123985.2019.1668240](https://doi.org/10.1080/08123985.2019.1668240).
27. Шимелевич М.И., Родионов Е.А., Оборнев И.Е., Оборнев Е.А. Применение нейросетей сверточного типа в обратных задачах геоэлектрики // Физика Земли. 2025. № 1. 88–102. doi [10.31857/S0002333725010061](https://doi.org/10.31857/S0002333725010061).
28. He S., Cai H., Liu S., Xie J., Hu X. Recovering 3D basement relief using gravity data through convolutional neural networks // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2021. **126**, N 10. doi [10.1029/2021JB022611](https://doi.org/10.1029/2021JB022611).
29. Zhao F., Xu Y., Zheng N., Tu Z., Yang F. ARPENN: an improved deep convolutional neural network for bathymetry inversion with integrated physical constraints // Geophysical Journal International. 2025. **241**, N 2. 891–900. doi [10.1093/gji/ggaf081](https://doi.org/10.1093/gji/ggaf081).
30. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: convolutional networks for biomedical image segmentation // Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI 2015. 2015. 234–241.
31. Wang Y.-F., Zhang Y.-J., Fu L.-H., Li H.-W. Three-dimensional gravity inversion based on 3D U-Net++ // Applied Geophysics. 2021. **18**, N 4. 451–460. doi [10.1007/s11770-021-0909-z](https://doi.org/10.1007/s11770-021-0909-z).
32. Huang H., Lin L., Tong R., Hu H., Zhang Q., Iwamoto Y., Han X., Chen Y., Wu J. UNet 3+: a full-scale connected UNet for medical image segmentation // ICASSP 2020 – 2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). 2020. 1055–1059.
33. Ягода А.Г., Ван Я., Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2017.
34. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function // Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS). 1989. **2**, N 4. 303–314. doi [10.1007/BF02551274](https://doi.org/10.1007/BF02551274).
35. Zafar A., Aamir M., Mohd Nawi N., Arshad A., Riaz S., Alrurban A., Dutta A.K., Almotairi S. A comparison of pooling methods for convolutional neural networks // Applied Sciences. 2022. **12**, N 17. doi [10.3390/app12178643](https://doi.org/10.3390/app12178643).

36. *Zhang A., Lipton Z., Li M., Smola A.J.* Dive into deep learning // CoRR. 2021. [arXiv:2106.11342]. Cited September 4, 2025.
37. *Loshchilov I., Hutter F.* Decoupled weight decay regularization // International Conference on Learning Representations. 2019. <https://openreview.net/forum?id=Bkg6RiCqY7>. Cited September 4, 2025.
38. *Bai Z., Wang Y., Wang C., Yu C., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Yagola A.G.* Joint gravity and magnetic inversion using CNNs' deep learning // Remote Sensing. 2024. **16**, N 7. doi [10.3390/rs16071115](https://doi.org/10.3390/rs16071115).
39. *Butler R.F.* Paleomagnetism: magnetic domains to geologic terranes. Boston: Blackwell Scientific, 1992.

Получена
29 июня 2025 г.

Принята
18 августа 2025 г.

Опубликована
15 сентября 2025 г.

Информация об авторах

Янфей Ван – д.ф.-м.н., профессор; Институт геологии и геофизики Китайской академии наук, Бэйтучэн Вестерн Роуд, 19, 100029, Пекин, Китай.

Дмитрий Владимирович Чурбанов – к.ф.-м.н., ст. научн. сотр.; Московский физико-технический институт, кафедра высшей математики, Институтский пер., 9, 141701, Долгопрудный, Российская Федерация.

Рауль Ларикович Аргун – специалист; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Ленинские горы, 1, стр. 2, 119992, Москва, Российская Федерация.

Александр Викторович Горбачев – аспирант; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Ленинские горы, 1, стр. 2, 119992, Москва, Российская Федерация.

Александр Сергеевич Леонов – д.ф.-м.н., профессор; Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, кафедра высшей математики, Капирикское шоссе, 31, 115409, Москва, Российская Федерация.

Дмитрий Витальевич Лукьяненко – д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Ленинские горы, 1, стр. 2, 119992, Москва, Российская Федерация.

References

1. Vl. V. Voevodin, A. S. Antonov, D. A. Nikitenko, et al., “Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community,” *Supercomput. Front. Innov.* **6** (2), 4–11 (2019). doi [10.14529/jsfi190201](https://doi.org/10.14529/jsfi190201).
2. P. S. Novikov, “On the Uniqueness of the Solution to the Inverse Potential Problem,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **18** (3), 165–168 (1938).
3. L. N. Sretensky, “On the Uniqueness of Determining the Shape of an Attracting Body from the Values of Its External Potential,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **99** (1), 21–22 (1954).
4. A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
5. M. S. Zhdanov, *Analogs of the Cauchy Integral in the Theory of Geophysical Fields* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
6. K. Simirdanis, F. Simon, D. Oikonomou, and N. Papadopoulos, “A Short Literature on Joint Inversion Methods in Geophysics,” (Research Report, IMS FORTH, Inrap (DST), 2019).
7. A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, and A. G. Yagola, *Nonlinear Ill-Posed Problems* (KURS, Moscow, 2017) [in Russian].
8. A. S. Leonov, *Solution of Ill-Posed Inverse Problems: Outline of Theory, Practical Algorithms, and MATLAB Demonstrations* (Librokom, Moscow, 2010) [in Russian].
9. Y. Wang, D. Lukyanenko, and A. Yagola, “Magnetic Parameters Inversion Method with Full Tensor Gradient Data,” *Inverse Probl. Imaging* **13** (4), 745–754 (2019). doi [10.3934/ipi.2019034](https://doi.org/10.3934/ipi.2019034).

10. E. N. Akimova, V. E. Misilov, and A. I. Tretyakov, “Methods and Algorithms of Computational Mathematics and Their Applications,” Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programmirovaniye) **24** (4), 368–385 (2023). doi [10.26089/NumMet.v24r426](https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r426).
11. R. Huang, Y. Zhang, S. Vatankhah, et al., “Inversion of Large-Scale Gravity Data with Application of VNet,” Geophys. J. Int. **231** (1), 306–318 (2022). doi [10.1093/gji/ggac190](https://doi.org/10.1093/gji/ggac190).
12. S. Yu and J. Ma, “Deep Learning for Geophysics: Current and Future Trends,” Rev. Geophys. **59** (3), Article ID. e2021RG000742 (2021). doi [10.1029/2021RG000742](https://doi.org/10.1029/2021RG000742).
13. V. N. Strakhov, “On Equivalence in the Inverse Problem of Gravimetry with Variable Mass Density,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **236** (2), 329–331 (1977).
14. A. B. Bakushinsky and A. V. Goncharsky, *Iterative Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1989) [in Russian].
15. V. K. Ivanov, V. V. Vasin, and V. P. Tanana, “Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications,” (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
16. R. Huang, S. Liu, R. Qi, and Y. Zhang, “Deep Learning 3D Sparse Inversion of Gravity Data,” J. Geophys. Res.: Solid Earth **126** (11), Article Number e2021JB022476 (2021). doi [10.1029/2021JB022476](https://doi.org/10.1029/2021JB022476).
17. S.-B. Qiao, H.-P. Li, R. Qi, et al., “3D Gravity Inversion Using Cycle-Consistent Generative Adversarial Network,” Appl. Geophys. (2024). doi [10.1007/s11770-024-1096-5](https://doi.org/10.1007/s11770-024-1096-5).
18. M. Jessell, J. Guo, Y. Li, et al., “Into the Noddyverse: a Massive Data Store of 3D Geological Models for Machine Learning and Inversion Applications,” Earth System Science Data **14** (1), 381–392 (2022). doi [10.5194/essd-14-381-2022](https://doi.org/10.5194/essd-14-381-2022).
19. E. Haber and D. Oldenburg, “Joint Inversion: a Structural Approach,” Inverse Probl. **13** (1) (1997). doi [10.1088/0266-5611/13/1/006](https://doi.org/10.1088/0266-5611/13/1/006).
20. L. A. Gallardo and M. A. Meju, “Characterization of Heterogeneous Near-Surface Materials by Joint 2D Inversion of dc Resistivity and Seismic Data,” Geophys. Res. Lett. **30** (13) (2003). doi [10.1029/2003GL017370](https://doi.org/10.1029/2003GL017370).
21. M. Bosch and J. McCaughey, “Joint Inversion of Gravity and Magnetic Data under Lithologic Constraints,” The Leading Edge **20** (8), 877–881 (2001). doi [10.1190/1.1487299](https://doi.org/10.1190/1.1487299).
22. L. R. Dice, “Measures of the Amount of Ecologic Association between Species,” Ecology **26** (3), 297–302 (1945).
23. Y. LeCun, L. Bottou, Y. Bengio, and P. Haffner, “Gradient-Based Learning Applied to Document Recognition,” Proceedings of the IEEE **86** (11), 2278–2324 (1998). doi [10.1109/5.726791](https://doi.org/10.1109/5.726791).
24. A. Krizhevsky, I. Sutskever, and G. E. Hinton, “ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks,” Advances in Neural Information Processing Systems **25** (NIPS 2012).
25. Y. Lin and Y. Wu, “InversionNet: A Real-Time and Accurate Full Waveform Inversion with Convolutional Neural Network,” J. Acoust. Soc. Am. **144** (3), 1683–1683 (2018). doi [10.1121/1.5067485](https://doi.org/10.1121/1.5067485).
26. K. Noh, D. Yoon, and J. Byun, “Imaging Subsurface Resistivity Structure from Airborne Electromagnetic Induction Data Using Deep Neural Network,” Explor. Geophys. **51** (2), 214–220 (2019). doi [10.1080/08123985.2019.1668240](https://doi.org/10.1080/08123985.2019.1668240).
27. M. I. Shimelevich, E. A. Rodionov, I. E. Obornev, and E. A. Obornev, “Application of Convolutional Neural Networks in Inverse Problems of Geoelectrics,” Izvestiya, Physics of the Solid Earth **60** (6), 1215–1227 (2024). doi [10.1134/S1069351324701039](https://doi.org/10.1134/S1069351324701039).
28. S. He, H. Cai, S. Liu, et al., “Recovering 3D Basement Relief Using Gravity Data through Convolutional Neural Networks,” J. Geophys. Res.: Solid Earth **126** (10) (2021). doi [10.1029/2021JB022611](https://doi.org/10.1029/2021JB022611).
29. F. Zhao, Y. Xu, N. Zheng, et al., “ARPENN: an Improved Deep Convolutional Neural Network for Bathymetry Inversion with Integrated Physical Constraints,” Geophys. J. Int. **241** (2), 891–900 (2025). doi [10.1093/gji/ggaf081](https://doi.org/10.1093/gji/ggaf081).
30. O. Ronneberger, P. Fischer, and T. Brox, “U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation,” Med. Image Comput. Comput. Assist. Interv. — MICCAI 2015. 234–241 (2015).
31. Y.-F. Wang, Y.-J. Zhang, L.-H. Fu, and H.-W. Li, “Three-Dimensional Gravity Inversion Based on 3D U-Net++,” Appl. Geophys. **18** (4), 451–460 (2021). doi [10.1007/s11770-021-0909-z](https://doi.org/10.1007/s11770-021-0909-z).
32. H. Huang, L. Lin, R. Tong, et al., “UNet 3+: A Full-Scale Connected UNet for Medical Image Segmentation,” IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). 1055–1059 (2020).
33. A. G. Yagola, Y. Wan, I. E. Stepanova, and V. N. Titarenko, *Inverse Problems and Methods for Their Solution: Applications in Geophysics* (Binom, Laboratoriya Znaniy, Moscow, 2017) [in Russian].
34. G. Cybenko, “Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function,” Math. Control, Signals, and Systems (MCSS) **2** (4), 303–314 (1989). doi [10.1007/BF02551274](https://doi.org/10.1007/BF02551274).



35. A. Zafar, M. Aamir, N. Mohd Nawi, et al., “A Comparison of Pooling Methods for Convolutional Neural Networks,” *Appl. Sci.* **12** (17) (2022). doi [10.3390/app12178643](https://doi.org/10.3390/app12178643).
36. A. Zhang, Z. Lipton, M. Li, and A. J. Smola, “Dive into Deep Learning,” *CoRR*. (2021). [arXiv:2106.11342]. Cited September 4, 2025.
37. I. Loshchilov and F. Hutter, “Decoupled Weight Decay Regularization,” *Int. Conf. on Learning Representations* (2019). <https://openreview.net/forum?id=Bkg6RiCqY7>. Cited September 4, 2025.
38. Z. Bai, Y. Wang, C. Wang, et al., “Joint Gravity and Magnetic Inversion Using CNNs’ Deep Learning,” *Remote Sensing* **16** (7) (2024). doi [10.3390/rs16071115](https://doi.org/10.3390/rs16071115).
39. R. F. Butler, *Paleomagnetism: Magnetic Domains to Geologic Terranes* (Blackwell Scientific, Boston, 1992).

Received
June 29, 2025

Accepted
August 18, 2025

Published
September 15, 2025

Information about the authors

Yanfei Wang — Dr. Sci., Professor; Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beitucheng Western Road, 19, 100029, Beijing, China.

Dmitry V. Churbanov — Ph. D., Senior Scientist; Moscow Institute of Physics and Technology, Department of Higher Mathematics, Institutskiy pereulok, 9, 141701, Dolgoprudny, Russia.

Raul L. Argun — Specialist; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Department of Mathematics, Leninskie Gory, 1, building 2, 119992, Moscow, Russia.

Alexander V. Gorbachev — Graduate Student; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Department of Mathematics, Leninskie Gory, 1, building 2, 119992, Moscow, Russia.

Alexander S. Leonov — Dr. Sci., Professor; National Research Nuclear University MEPhI, Department of Higher Mathematics, Kashirskoe shosse, 31, 115409, Moscow, Russia.

Dmitry V. Lukyanenko — Dr. Sci., Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Department of Mathematics, Leninskie Gory, 1, building 2, 119992, Moscow, Russia.