

## Численный метод для моделирования разномасштабной динамики газодисперсных сред с двумя релаксационными параметрами на основе гидродинамики сглаженных частиц

Т. А. Савватеева

Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН,  
Новосибирск, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0002-3896-9381, e-mail: ta-savvateeva@ya.ru

**Аннотация:** В некоторых приложениях динамику газодисперсных сред целесообразно моделировать методом частиц. При этом в случае использования подхода частица-частица для расчета межфазного взаимодействия существует проблема избыточной диссипации при решении задач с малым параметром. Известно, что подход частица-сетка решает эту проблему в случае одного релаксационного процесса (обмен импульсом). Работа представляет собой численное исследование возможностей распространения этого подхода на случай двух релаксационных процессов (обмен импульсом и тепловой энергией). В качестве тестовой задачи использована задача о движении плоской звуковой волны, имеющая эталонное решение для волн малой амплитуды. Рассмотрены режимы, в которых релаксационные параметры существенно больше, сопоставимы и существенно меньше периода волны. Установлено, что рассматриваемый метод не вносит диссипацию в решение даже при малом количестве частиц в ячейке, но вносит избыточную счетную дисперсию в режиме, когда релаксационные параметры сопоставимы с периодом волны. Для уменьшения уровня дисперсии необходимо увеличивать количество частиц в ячейке (до 5 в одномерном случае) и подбирать временной шаг по условию Куранта, в котором масштабом длины является расстояние от частицы до ближайшего соседа.

**Ключевые слова:** газодисперсные среды, гидродинамика сглаженных частиц, межфазный обмен.

**Благодарности:** Работа выполнена за счет средств гранта РНФ № 23–11–00142.

**Для цитирования:** Савватеева Т.А. Численный метод для моделирования разномасштабной динамики газодисперсных сред с двумя релаксационными параметрами на основе гидродинамики сглаженных частиц // Вычислительные методы и программирование. 2025. 26, № 4. 588–600. doi 10.26089/NumMet.v26r438.



# Numerical method for modeling multiscale dynamics of gas-dispersed media with two relaxation parameters based on Smoothed Particle Hydrodynamics

**Tatiana A. Savvateeva**

Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS,  
Novosibirsk, Russia

ORCID: 0000-0002-3896-9381, e-mail: [ta-savvateeva@ya.ru](mailto:ta-savvateeva@ya.ru)

**Abstract:** In some applications, it is advisable to simulate the dynamics of gas-dispersed media using the particle method. In this case, when using the particle-particle approach to calculate the interphase interaction, there is a problem of excess dissipation when solving problems with a small parameter. It is known that the particle-mesh approach solves this problem in the case of one relaxation process (momentum exchange). The work is an experimental study of the possibilities of extending this approach to the case of two relaxation processes (momentum and thermal energy exchange). The test problem is the problem of the motion of a plane sound wave, which has a reference solution for small-amplitude waves. The modes are considered in which the relaxation times are significantly longer, comparable, and significantly shorter than the wave period. It is found that the method under consideration does not introduce dissipation into the solution even with a small number of particles in a cell, but introduces excess counting dispersion in the mode when the relaxation times are comparable to the wave period. To reduce the level of dispersion, it is necessary to increase the number of particles in the cell (up to 5 in the one-dimensional case) and select the time step according to the Courant condition, in which the length scale is the distance from the particle to its nearest neighbor.

**Keywords:** gas-dispersed media, smoothed particle hydrodynamics, interphase exchange.

**Acknowledgements:** The work was carried out using funds from the Russian Science Foundation grant No. 23-11-00142.

**For citation:** T. A. Savvateeva, “Numerical method for modeling multiscale dynamics of gas-dispersed media with two relaxation parameters based on Smoothed Particle Hydrodynamics,” *Numerical Methods and Programming*. **26** (4), 588–600 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r438.

**1. Введение.** Динамика газодисперсных сред представляет собой широкое поле для исследований, этому явлению посвящен значительный пласт литературы, например [1–6]. При учете межфазного взаимодействия (обмена импульсом или энергией) в таких средах может возникнуть малый релаксационный параметр, который имеет размерность времени и обратно пропорционален интенсивности межфазного взаимодействия. Примерами приложений, в которых возникает малый релаксационный параметр, являются астрофизика [7, 8] и химическая инженерия [9, 10].

Задачи с малыми параметрами всегда представляют сложность для численного решения. Для эйлеровых методов эти сложности связаны только с интегрированием по времени [11]. Для лагранжевых методов малые релаксационные параметры определяют требование не только на разрешение по времени, но и по пространству. Для астрофизических приложений эту проблему для лагранжева метода гидродинамики сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) подробно описали Лайбе и Прайс в работе [12]. При расчете динамики газодисперсной среды с обменом импульсом они использовали подход частица-частица и показали, что разрешение по пространству необходимо выбирать меньшее, чем произведение скорости звука на релаксационный параметр, иначе происходит диссипация звуковых волн. С учетом условия Куранта, решение задачи с малыми релаксационными параметрами требует очень малых шагов по времени и пространству, отчего задача становится вычислительно трудоемкой. Эта проблема до сих пор является актуальной, и, видимо, в рамках подхода частица-частица решения не имеет [12, 13]. В литературе есть наработки по решению аналогичных задач методом SPH с двумя релаксационными процессами — обменом импульсом и тепловой энергией [14–17], но исследования свойств предложенных методов с малыми параметрами релаксации энергий авторами работ не проводились.

Ранее в нашем коллективе был разработан недиссипативный метод расчета динамики газопылевых сред SPH-IDIC с одним релаксационным процессом — обменом импульсом, в котором выбор счетных параметров не зависит от релаксационного параметра задачи и который является одинаково эффективным для всего диапазона времени релаксации. Этот эффект достигается за счет полунейности схемы и за счет комбинирования лагранжева и эйлера подходов (подход частица-сетка). В расчетной области вводится разбиение на ячейки (сетка); все силы, кроме межфазного обмена, рассчитываются с помощью подхода частица-частица, а межфазный обмен рассчитывается неявно с использованием сетки (частица-сетка). В работах [18, 19] свойства метода исследованы численно. В работе [20] приведен анализ свойств подходов частица-сетка и частица-частица методами вычислительной математики (для случая одного релаксационного параметра).

В данной работе впервые предлагается расширение метода SPH-IDIC на случай двух релаксационных процессов: обмена импульсом и энергией. Численно исследованы свойства метода на одномерной задаче о движении звуковой волны, имеющей эталонное решение при малой амплитуде волн. Исследования проводились для широкого диапазона параметров релаксации — существенно больших, сопоставимых и существенно меньших периода волны.

В разделе 2 приведена постановка задачи. Раздел 3 содержит общие сведения о методе гидродинамики сглаженных частиц и формулы метода SPH-IDIC с учетом двух релаксационных процессов. В разделе 4 сформулирована тестовая задача и проведен анализ результатов расчетов. Раздел 5 содержит выводы, а в приложениях 1 и 2 представлены алгоритмы нахождения скоростей и энергий для предложенного в статье метода.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается двухфазная монодисперсная среда, в которой несущей фазой является сжимаемый невязкий газ с плотностью  $\rho_g$ , скоростью  $\mathbf{v}$  и внутренней энергией  $e_g$ . Газ содержит включения дисперсной фазы, к которой применимо гидродинамическое описание среды. Дисперсная фаза представляет собой пылевые частицы одного размера, для нее определены  $\mathbf{u}$  — скорость,  $\rho_d$  — массовая плотность,  $e_d$  — внутренняя энергия частиц,  $T_g$  — температура газа,  $T_d$  — температура твердого тела. Между газом и пылью отсутствует массообмен, но есть обмен импульсом и энергией.

Система уравнений, описывающая рассматриваемую среду, имеет вид (см., например, [5])

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_g) = -\rho_g \nabla \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho_d) = -\rho_d \nabla \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\rho_g \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \right) = -\nabla p_g + \frac{\rho_d (\mathbf{u} - \mathbf{v})}{t_{\text{stop}}}, \quad (3)$$

$$\rho_d \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \right) = -\frac{\rho_d (\mathbf{u} - \mathbf{v})}{t_{\text{stop}}}, \quad (4)$$

$$\rho_g \left( \frac{\partial e_g}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla e_g) \right) = -p_g \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\rho_d \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2}{t_{\text{stop}}} - \rho_d \frac{C_p (T_g - T_d)}{\zeta}, \quad (5)$$

$$\rho_d \left( \frac{\partial e_d}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla e_d) \right) = \rho_d \frac{C_p (T_g - T_d)}{\zeta}, \quad (6)$$

$$p_g = \rho_g e_g (\gamma - 1), \quad (7)$$

где  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  — показатель адиабаты газа,  $C_p$  — теплоемкость газа при постоянном давлении,  $C_V$  — теплоемкость газа при постоянном объеме,  $t_{\text{stop}}$  — время скоростной релаксации,  $\zeta$  — время тепловой релаксации,  $\|\cdot\|$  — длина конечномерного вектора.

Учитывая, что  $e_g = C_V T_g$  и вводя  $e_d = C_{DV} T_d$ ,  $\gamma_{DP} = \frac{C_p}{C_{DV}}$ , где  $C_{DV}$  — теплоемкость пыли как твердого тела, получим аналог уравнений (5), (6), записанных полностью в терминах внутренних энергий:

$$\rho_g \left( \frac{\partial e_g}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla e_g) \right) = -p_g \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\rho_d \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2}{t_{\text{stop}}} - \rho_d \frac{\gamma e_g - \gamma_{DP} e_d}{\zeta},$$

$$\rho_d \left( \frac{\partial e_d}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla e_d) \right) = \rho_d \frac{\gamma e_g - \gamma_{DP} e_d}{\zeta}.$$

### 3. Описание метода.

**3.1. Основы метода SPH.** Для аппроксимации уравнений (1)–(7) будем использовать лагранжев метод гидродинамики сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamic, SPH) [15, 16].

В пространстве расставляем модельные частицы-узлы интерполяции. Для аппроксимации пространственных производных метод SPH использует ядерную интерполяцию. Ее суть в том, что каждый узел с номером  $a$  и координатой  $x_a$  наделяется массой  $m_a$ . Масса узла распределяется в пространстве согласно некоторой гладкой функции  $W$  (ядра), зависящей от переменной величины — расстояния до центра масс  $x_a$  — и параметра  $h$ , определяющего максимальное расстояние от центра масс, где вклад узла значительный. Параметр  $h$  называют радиусом сглаживания. В окрестности частицы  $x_a$  определим плотность вещества, которое распределяется пропорционально ядру:

$$\rho(x) = m_a W(x - x_a, h).$$

Пусть в узлах мы знаем массу и значение некоторой функции  $A$ . Тогда с помощью ядра можем найти значение этой функции в произвольной точке пространства  $x$  по формуле

$$A(x) \approx \sum_a A_a \frac{m_a W(x - x_a, h)}{\rho(x_a)},$$

где суммирование производится по всем частицам, лежащим в некоторой окрестности точки  $x$ .

Для вычисления производной функции  $A$  применяем операцию дифференцирования к ядру:

$$\frac{\partial A(x)}{\partial x} \approx \sum_a \frac{A_a m_a}{\rho(x_a)} \frac{\partial W(x - x_a, h)}{\partial x}.$$

В качестве ядра в работе берется кубический сплайн:

$$W_{ab}^n = W(|x_a^n - x_b^n|, h) = W_{ab} = \frac{2}{3h} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3, & \text{если } 0 \leq q \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3, & \text{если } 1 \leq q \leq 2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $q = \frac{|x_a^n - x_b^n|}{h}$ .

**3.2. Численная схема.** Для численного решения уравнений (1)–(7) перепишем их в терминах полных производных по времени, а затем аппроксимируем с помощью разностной схемы первого порядка. Производные по пространству и величины, ответственные за межфазный обмен, аппроксимируем комбинированным сеточно-лагранжевым методом, основанным на SPH. Его идеи заключаются в следующем.

1. В пространстве расставляем модельные частицы-узлы интерполяции, а также вводим сетку, покрывающую все пространство.
2. Процессы, не отвечающие за обмен импульсом и энергией, будем аппроксимировать стандартным для SPH способом, используя подход частица-частица.
3. Члены уравнений, описывающие межфазный обмен, будем аппроксимировать с помощью подхода частица-сетка: значение искомой величины рассматриваем в конкретном узле, а значение взаимодействующей фазы берем усредненное по ячейке, в которой находится рассматриваемый узел.

Положим массу каждой частицы газа и пыли равной  $m_g$  и  $m_d$  соответственно. Усредненные в ячейке величины рассчитываются по формулам

$$\mathbf{v}_* = \frac{1}{K} \sum_{a=1}^K \mathbf{v}_a, \quad \mathbf{u}_* = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{u}_l, \quad e_{*g}^n = \frac{1}{K} \sum_{a=1}^K e_{ga}^n, \quad e_{*d}^n = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L e_{dl}^n, \quad \varepsilon_*^n = \frac{m_d L}{m_g K},$$

где  $m_g$  и  $m_d$  — массы частиц газа и пыли соответственно,  $L$  — количество частиц пыли в ячейке,  $K$  — количество частиц газа в ячейке.

Тогда численная схема запишется в следующем виде:

$$\rho_g(x_a) = m_g \sum_b W_{ab},$$

$$\rho_d(x_i) = m_d \sum_j W_{ij},$$

$$\frac{\mathbf{v}_a^{n+1} - \mathbf{v}_a^n}{\tau} = - \sum_b m_b \left( \frac{p_b}{(\rho_{gb}^n)^2} + \frac{p_a}{(\rho_{ga}^n)^2} \right) \nabla_a W_{ab}^n - \frac{\varepsilon_*^n}{t_{\text{stop}}} (\mathbf{v}_a^{n+1} - \mathbf{u}_*^{n+1}), \quad (8)$$

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} = \frac{1}{t_{\text{stop}}} (\mathbf{v}_*^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}), \quad (9)$$

$$\frac{e_{ga}^{n+1} - e_{ga}^n}{\tau} = \Delta Q_a^n - \frac{\varepsilon_*^n}{\zeta} [\gamma e_{ga}^{n+1} - \gamma_{Dp} e_{d*}^{n+1}] + \frac{\varepsilon_*^n \|\mathbf{v}_*^n - \mathbf{u}_*^n\|^2}{t_{\text{stop}}}, \quad (10)$$

$$\frac{e_{dl}^{n+1} - e_{dl}^n}{\tau} = \frac{1}{\zeta} [\gamma e_{g*}^{n+1} - \gamma_{Dp} e_{dl}^{n+1}], \quad (11)$$

где

$$\Delta Q_a^n = \frac{m_g p_a^n}{(\rho_{ga}^n)^2} \sum_b (\mathbf{v}_a^n - \mathbf{v}_b^n) \nabla_a W_{ab}^n. \quad (12)$$

Здесь для аппроксимации градиента давления методом SPH мы переписали его в другой форме:

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{p \nabla \rho}{\rho^2}.$$

Несмотря на то, что схема записана в полунявном виде, скорости и энергии на слое  $n + 1$  можно найти в явном виде. Формулы расчета скоростей и энергий представлены в приложениях 1, 2.

Временной шаг определяется условием Куранта

$$\tau < \frac{\Delta x \text{ CFL}}{\max(c_s, \|\mathbf{v}\|)},$$

где  $c_s$  — скорость звука в чистом газе,  $\text{CFL} = 1$  — параметр Куранта.

#### 4. Тестирование.

**4.1. Постановка тестовой задачи и ее эталонное решение.** В качестве тестовой будем рассматривать одномерную задачу о распространении акустических колебаний в газопылевой среде. В случае, когда газ и пыль обмениваются импульсом и энергией, авторами работы [21] построено аналитическое решение линеаризованной задачи (1)–(7) без учета члена с квадратичной разницей скоростей в уравнении энергии газа. Авторами работы [21] также опубликована программа, которая при заданных начальных данных генерирует решение линеаризованной задачи (1)–(7) в заданный момент времени. Если задать малую амплитуду колебаний, то решение нелинейной задачи будет близким к аналитическому решению линеаризованной задачи, и второе будем называть эталонным решением. Преимуществом данной тестовой задачи является наличие аналитического решения для одновременного учета обмена импульсом и энергией на всем диапазоне релаксационных параметров, что позволяет систематически исследовать свойства численного метода.

Рассмотрим стационарное решение обезразмеренной системы (1)–(7):  $\tilde{\rho}_g = \text{const}$ ,  $\tilde{\rho}_d = \text{const}$ ,  $\tilde{e}_g = \text{const}$ ,  $\tilde{e}_d = \frac{C_{\text{DV}}}{C_V} \tilde{e}_g$ ,  $\tilde{v} = 0$ ,  $\tilde{u} = 0$ . Будем искать решение линеаризованной системы в виде малого возмущения стационарного решения:

$$\rho_g|_{t=0} = \tilde{\rho}_g + \delta \rho_g, \quad \rho_d|_{t=0} = \tilde{\rho}_d + \delta \rho_d, \quad (13)$$

$$v|_{t=0} = \delta v, \quad u|_{t=0} = \delta u, \quad (14)$$

$$e_g|_{t=0} = \tilde{e}_g + \delta e_g, \quad e_d|_{t=0} = \frac{C_{\text{DV}}}{C_V} \tilde{e}_g + \delta e_d. \quad (15)$$

Возмущения  $\delta f$  зададим в виде

$$\delta f = A \hat{f} e^{ikx - \omega t}, \quad (16)$$

где  $k$  — вещественное волновое число,  $\omega$  — комплексная частота,  $\hat{f}$  — коэффициент из пространства комплексных чисел,  $A$  — малая амплитуда возмущений.

Решение (13)–(16) является периодическим, ограниченным на всей вещественной оси. Мы будем рассматривать это решение на конечном отрезке  $x \in [0, 1]$ , к которому масштабируется период. Тогда получим:

$$\rho_g|_{x=0} = \rho_g|_{x=1}, \quad \rho_d|_{x=0} = \rho_d|_{x=1}, \quad v|_{x=0} = v|_{x=1}, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1}, \quad e_g|_{x=0} = e_g|_{x=1}, \quad e_d|_{x=0} = e_d|_{x=1}.$$

Мы рассматривали решения в момент времени  $t = 0.4$  со следующими начальными параметрами:  $\tilde{\rho}_g = 1$ ,  $\tilde{\rho}_d = 0.1$ ,  $\tilde{e}_g = 9/4$ ,  $C_V = 1.0$ ,  $C_{DV} = 1.0$ . Амплитуда колебаний бралась равной 0.01,  $\gamma = 4/3$ .

**4.2. Результаты расчетов.** В приведенных в статье расчетах, если не сказано иного, количество частиц газа  $N_g = 250$ , количество частиц пыли  $N_d = 250$ , радиус сглаживания  $h = 0.02$  и шаг по времени  $\tau = 0.002$ . Отношение плотностей пыли и газа  $\varepsilon = \frac{\rho_d}{\rho_g} = 0.3$ . Размер сетки в расчетах берется равным  $\frac{h}{2}$ . Черные линии — эталонные решения в момент времени  $t = 0.4$ , красные линии — результаты расчетов, синие штрихованные линии — решения в начальный момент времени. На верхних левых панелях приведены скорости газа, на правых — плотности газа. На нижних панелях приведены энергии газа и пыли (слева и справа соответственно). Ось абсцисс — координата, ось ординат — значение искомой величины.

На рис. 1 представлены результаты расчетов с большим временем скоростной и тепловой релаксаций  $t_{\text{stop}} = 10^3$  и  $\zeta = 10^3$ . В этом режиме газ и пыль почти не обмениваются импульсом и энергией и движутся независимо, так как вклад членов уравнений, в которые входят релаксационные параметры, оказывается малым. При этом фазы газовой и пылевой компонент не совпадают, амплитуда волн не меняется со временем. На рисунке видно хорошее соответствие численного и эталонного решений.

На рис. 2 представлены результаты расчетов с малым временем скоростной и тепловой релаксаций  $t_{\text{stop}} = 10^{-4}$  и  $\zeta = 10^{-4}$ . Это режим интенсивного межфазного взаимодействия, в котором газовая и пылевая компоненты среагировали, в результате фазы газа и пыли совпадают, а амплитуда волн не меняется со временем. При этом система уравнений становится жесткой. Видно, что численный метод вносит в решение легкую дисперсию. При этом, несмотря на жесткость системы, расчетные параметры брались те же, что и для случая большого времени релаксаций, и в результате также получаем хорошее соответствие численного и эталонного решений.

Расчеты с умеренным временем скоростной и тепловой релаксаций  $t_{\text{stop}} = 0.1$  и  $\zeta = 0.1$  представлены на рис. 3 и 4. Здесь фазы газовой и пылевой компонент слабо различаются, имеет место затухание волн. На рис. 3 расчет производился с параметрами  $h = 0.02$ ,  $\tau = 0.002$  и  $N_g = 250$ ,  $N_d = 250$  (такими же, как на рис. 1 и 2). При таких счетных параметрах взамен избыточной диссипации получаем дисперсию — за счет осреднения по ячейке. На рис. 4 представлены результаты расчета с более подробным разрешением:  $h = 0.01$ ,  $\tau = 0.0005$  и количество частиц  $N_g = 1000$ ,  $N_d = 1000$ . В этом случае дисперсия получается значительно более слабой. Таким образом, при увеличении количества частиц в ячейке (до 5 в одномерном случае) численная дисперсия становится менее выраженной. Отметим, что при учете одного межфазного процесса (обмена импульсом) дисперсия в решении отсутствует при любых релаксационных параметрах [18].

Для одномерных задач накоплен существенный опыт анализа наблюдаемых на практике явлений методом Фурье, подразумевающим переход от нелинейной задачи к линеаризованной. В работах [20, 22–24] приведены выводы из дисперсионного анализа, которые подтверждаются на практике. Для двумерных и трехмерных задач аналогичный опыт отсутствует. В частности, о трудностях распространения метода Фурье говорят результаты Dehnen&Aly [25]. Они показали, что даже для чистого газа устойчивость продольных волн зависит от их длины и вида ядра, а устойчивости поперечных волн любой длины не удастся добиться при использовании известных ядер. Это говорит о том, что переход от одномерных к многомерным моделям не позволит решить проблему возникновения численной дисперсии. При этом на практике методом SPH двумерные и трехмерные модели для чистого газа успешно реализуются [26, 27]<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Распространение метода SPH на многомерный случай не представляет технической сложности: скалярные функции превращаются в вектор-функции, ядро метода изменяется на константный множитель.

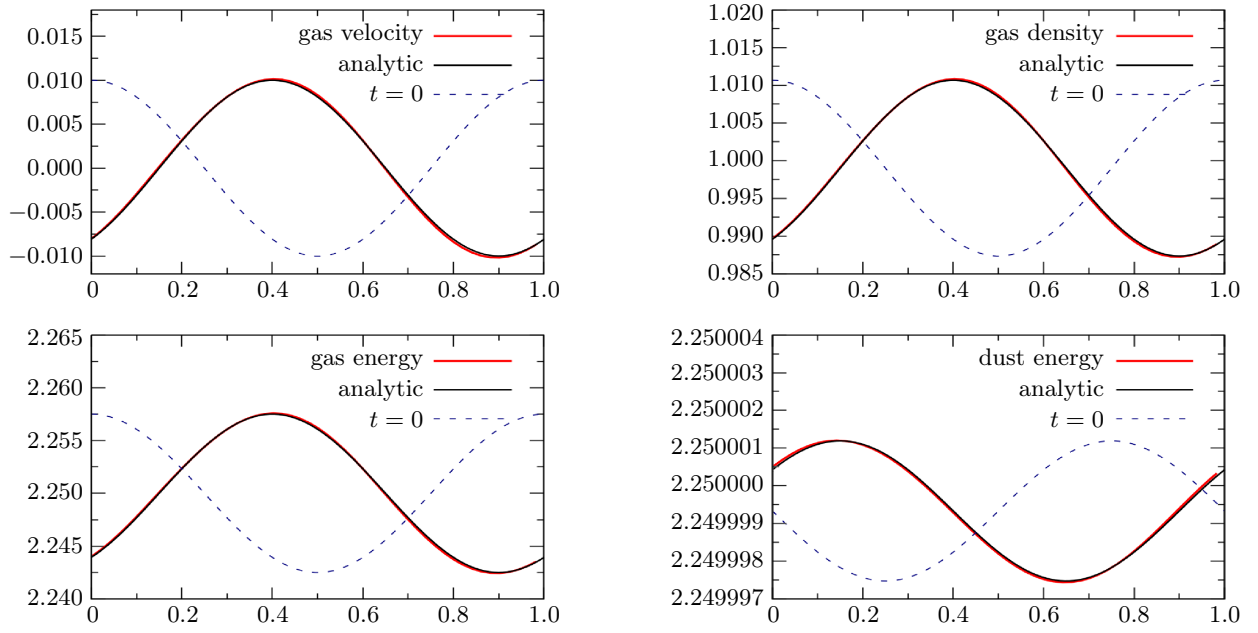


Рис. 1. Результаты расчетов в сравнении с эталонными решениями при  $t_{\text{stop}} = \zeta = 10^3$ ,  $h = 0.02$ ,  $\tau = 0.002$ , количестве частиц  $N_g = 250$ ,  $N_d = 250$ . Черные линии — эталонные решения, красные — результаты расчетов в момент времени  $t = 0.4$ , синие штрихованные линии — решения в начальный момент времени

Fig. 1. Calculation results in comparison with the reference solutions at  $t_{\text{stop}} = \zeta = 10^3$ ,  $h = 0.02$ ,  $\tau = 0.002$ , number of particles  $N_g = 250$ ,  $N_d = 250$ . Black lines are reference solutions, red lines are calculation results at time  $t = 0.4$ , blue dashed line are solutions at the initial time

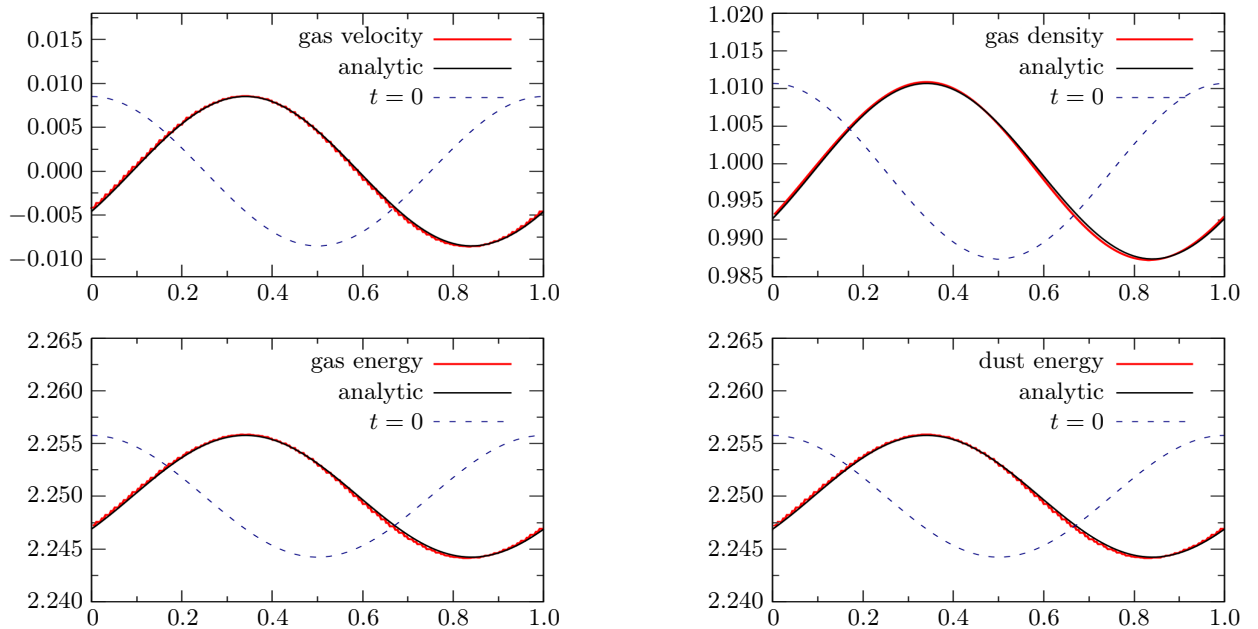


Рис. 2. Результаты расчетов в сравнении с эталонными решениями при  $t_{\text{stop}} = \zeta = 10^{-4}$ ,  $h = 0.02$ ,  $\tau = 0.002$ , количество частиц  $N_g = 250$ ,  $N_d = 250$ . Черные линии — эталонные решения, красные — результаты расчетов в момент времени  $t = 0.4$ , синие штрихованные линии — решения в начальный момент времени

Fig. 2. Calculation results in comparison with the reference solutions at  $t_{\text{stop}} = \zeta = 10^{-4}$ ,  $h = 0.02$ ,  $\tau = 0.002$ , number of particles  $N_g = 250$ ,  $N_d = 250$ . Black lines are reference solutions, red lines are calculation results at time  $t = 0.4$ , blue dashed line are solutions at the initial time



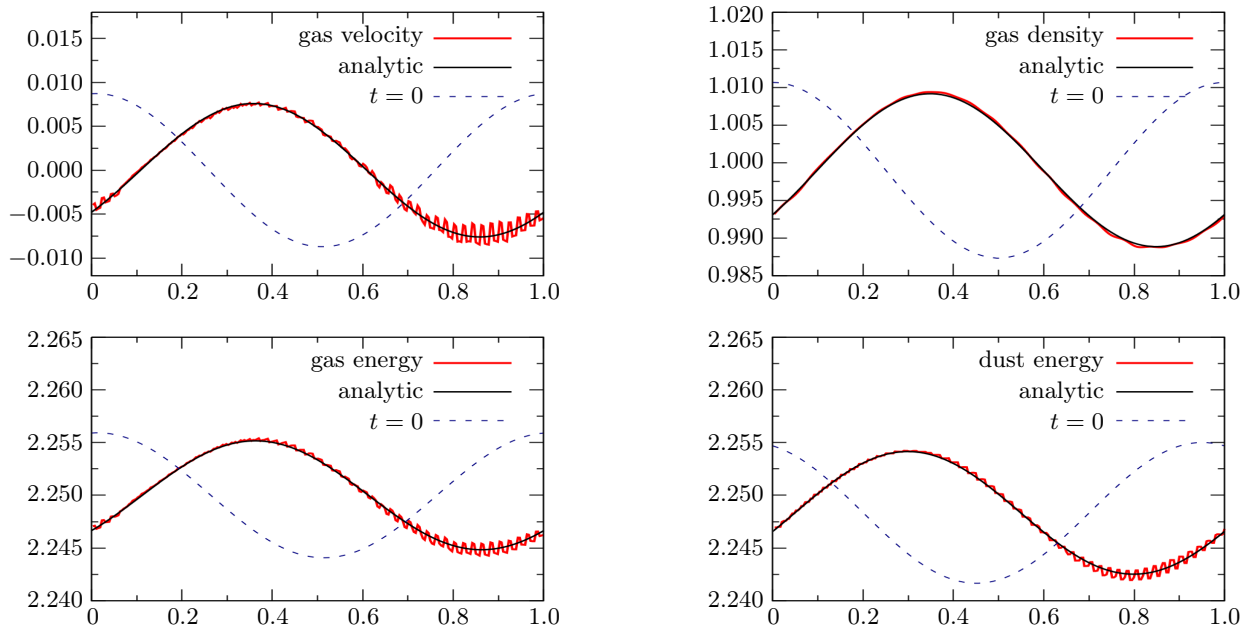


Рис. 3. Результаты расчетов в сравнении с эталонными решениями при  $t_{\text{stop}} = \zeta = 0.1$ ,  $h = 0.02$ ,  $\tau = 0.002$ , количестве частиц  $N_g = 250$ ,  $N_d = 250$ . Черные линии — эталонные решения, красные — результаты расчета в момент времени  $t = 0.4$ , синие штрихованные линии — решения в начальный момент времени

Fig. 3. Calculation results in comparison with the reference solutions at  $t_{\text{stop}} = \zeta = 0.1$ ,  $h = 0.02$ ,  $\tau = 0.002$ , number of particles  $N_g = 250$ ,  $N_d = 250$ . Black lines are reference solutions, red lines are calculation results at time  $t = 0.4$ , blue dashed line are solutions at the initial time

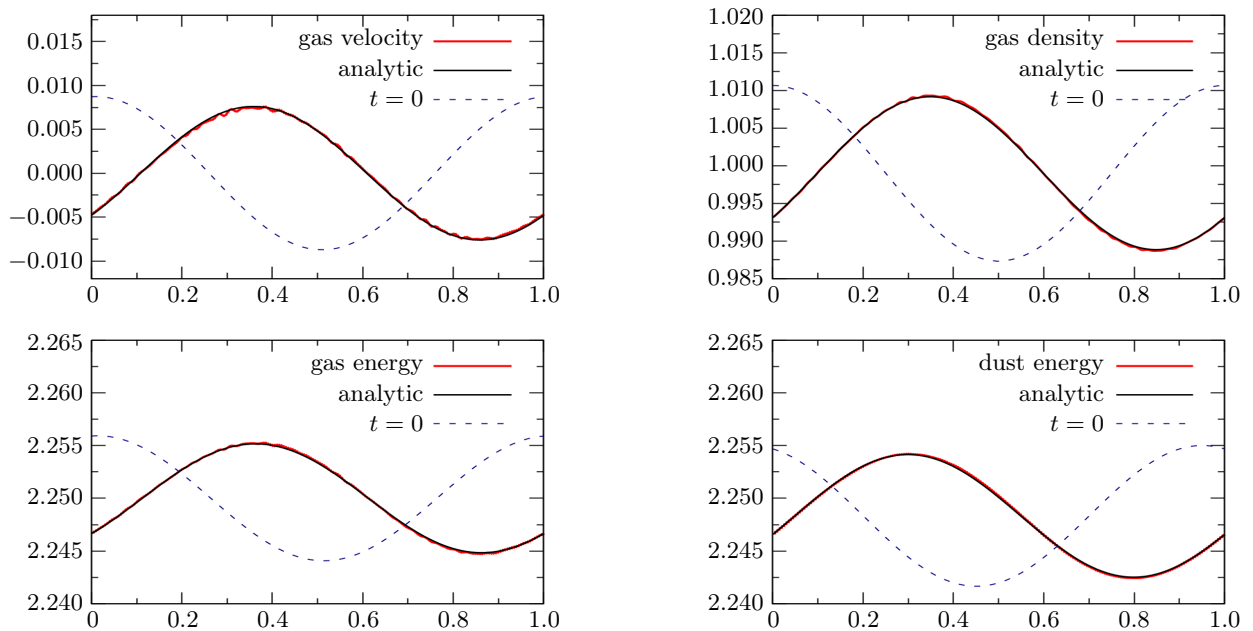


Рис. 4. Результаты расчетов в сравнении с эталонными решениями при  $t_{\text{stop}} = \zeta = 0.1$ ,  $h = 0.01$ ,  $\tau = 0.0005$ , количестве частиц  $N_g = 1000$ ,  $N_d = 1000$ . Черные линии — эталонные решения, красные — результаты расчетов в момент времени  $t = 0.4$ , синие штрихованные линии — решения в начальный момент времени

Fig. 4. Calculation results in comparison with the reference solutions at  $t_{\text{stop}} = \zeta = 0.1$ ,  $h = 0.01$ ,  $\tau = 0.0005$ , number of particles  $N_g = 1000$ ,  $N_d = 1000$ . Black lines are reference solutions, red lines are calculation results at time  $t = 0.4$ , blue dashed line are solutions at the initial time



**5. Заключение.** В работе впервые предложен численный метод расчета динамики двухфазных монодисперсных сред с межфазным обменом импульсом и энергией, который является распространением метода SPH-IDIC на случай двух релаксационных процессов. Особенностью метода является комбинированный подход частица-сетка, в котором межфазный обмен рассчитывается через усреднение на сетке, остальные процессы аппроксимируются стандартным для SPH способом, а также полунейная аппроксимация, что обеспечивает возможность выбирать временной шаг независимо от параметров релаксаций.

Исследованы свойства предложенного численного метода на задаче о распространении плоской звуковой волны в газодисперсной среде, которая имеет эталонное решение при малой амплитуде волн. Рассмотрены режимы, в которых параметры релаксаций существенно больше, сопоставимы и существенно меньше периода волны. Показано, что метод применим для широкого диапазона интенсивности межфазного взаимодействия, что делает его перспективным для использования в ряде приложений (в частности, в химической инженерии и астрофизике).

Показано, что при распространении метода SPH-IDIC на случай одновременного обмена импульсом и энергией сохраняется свойство недиссипативности метода даже в случае малых релаксационных параметров, причем выбор пространственного разрешения не зависит от релаксационных параметров, в отличие от подходов частица-частица, что особенно важно при малом времени релаксаций. При этом, в отличие от случая одного релаксационного процесса (обмена импульсом), при умеренном времени релаксаций метод вносит в решение дисперсию, которая отсутствует в эталонном решении. Эта дисперсия уменьшается при увеличении количества частиц в ячейке. Для дальнейшего развития метода необходимо в первую очередь исследование механизма возникновения дисперсии средствами вычислительной математики, а затем — тестирование на более сложных бенчмарках.

## Приложение 1 Вычисление скоростей

Для нахождения скоростей газа и пыли на слое  $n + 1$  по формулам (8)–(9) используем следующий алгоритм.

Шаг 1. Вычислим ускорения от всех сил, кроме трения, которые действуют на частицы на слое  $n$ :

$$A_a^n = - \sum_b m_g \left( \frac{p_b^n}{(\rho_{gb}^n)^2} + \frac{p_a^n}{(\rho_{ga}^n)^2} \right) \nabla_a W_{ab}.$$

Шаг 2. Вычислим средние по каждой ячейке значения величин на слое  $n$ :

$$\mathbf{v}_*^n = \frac{1}{K} \sum_{a=1}^K \mathbf{v}_a^n, \quad \mathbf{u}_*^n = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{u}_l^n,$$

$$t_*^n = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L t_l^n,$$

$$\varepsilon_*^n = \frac{m_d L}{m_g K},$$

$$\mathbf{A}_{g*}^n = \frac{1}{K} \sum_{a=1}^K \mathbf{A}_a^n.$$

Шаг 3. Вычислим средние по каждой ячейке скорости на следующем временном слое  $\mathbf{v}_*^{n+1}$ ,  $\mathbf{u}_*^{n+1}$ . Для этого положим

$$\mathbf{w}_g^n = \mathbf{v}_*^n + \varepsilon_*^n \mathbf{u}_*^n, \quad \mathbf{w}_d^n = \mathbf{v}_*^n - \mathbf{u}_*^n.$$

Тогда

$$\mathbf{w}_g^{n+1} = \mathbf{w}_g^n + \tau \mathbf{A}_{g*}^n,$$

Для определения  $w_d^{n+1}$  применяем формулы

$$B = \frac{t_*^n + \tau}{\varepsilon_*^n \tau},$$

$$\chi = 1 + \frac{1}{B},$$

$$w_d^{n+1} = -\frac{t_*^n}{\tau \varepsilon_*^n \chi} \left[ \frac{(1 - B\chi)(w_d^n + \tau A_{g*}^n)}{B^2} \right].$$

По найденным  $w_g^{n+1}$ ,  $w_d^{n+1}$  находим средние скорости газа и фракций пыли

$$v_*^{n+1} = \frac{w_g^{n+1} + \varepsilon_*^n w_d^{n+1}}{1 + \varepsilon_*^n}, \quad u_*^{n+1} = \frac{w_g^{n+1} - \varepsilon_*^n w_d^{n+1}}{1 + \varepsilon_*^n}.$$

Шаг 4. Вычислим скорости каждой газовой и пылевой частицы на слое  $n + 1$ :

$$\left( \frac{1}{\tau} + \frac{\varepsilon_*^n}{t_*^n} \right) v_a^{n+1} = \frac{v_a^n}{\tau} + \frac{\varepsilon_*^n}{t_*^n} u_*^{n+1} + A_a^n, \quad \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{t_*^n} \right) u_l^{n+1} = \frac{u_l^n}{\tau} + \frac{1}{t_*^n} v_*^{n+1}.$$

## Приложение 2 Вычисление энергий

Для нахождения энергий на слое  $n + 1$  по формулам (10)–(11) используем следующий алгоритм.

Шаг 1. Используя величины на слое  $n$ , вычислим изменения энергии всех газовых и пылевых частиц за счет изменения объема смеси, искусственной вязкости и других величин, исключая трение и теплообмен за счет конвекции и теплопроводности:

$$\Delta Q_a^n = \frac{m_g P_a^n}{(\rho_{ga}^n)^2} \sum_b (v_a^n - v_b^n) \nabla_a W_{ab}^n.$$

Шаг 2. Вычислим средние по каждой ячейке значения удельной внутренней энергии газа и фракций пыли, время тепловой релаксации:

$$e_{g*}^n = \frac{1}{K} \sum_{a=1}^K e_{ga}^n, \quad e_{d*}^n = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L e_l^n, \quad \zeta_*^n = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \zeta_l^n, \quad \varepsilon_*^n = \frac{m_d L}{m_g K},$$

$$\Delta Q_{g*}^n = \frac{1}{K} \sum_{a=1}^K \Delta Q_a^n + \frac{\varepsilon_*^n \|v_*^n - u_*^n\|^2}{t_*^n}.$$

Шаг 3. Вычислим средние по каждой ячейке значения удельной внутренней энергии газа и фракций пыли на слое  $n + 1$ :

$$\Delta_{g*} = \Delta Q_{g*}^n + \frac{e_{g*}^n}{\tau}, \quad \Delta_{d*} = \frac{e_{d*}^n}{\tau},$$

$$\chi_* = \frac{\gamma_{Dp}}{\zeta_* + \gamma_{Dp}}, \quad e_{g*}^{n+1} = \frac{\Delta_{g*} + \varepsilon_* \chi_* \Delta_{d*}}{\frac{1}{\tau} + \gamma \frac{\varepsilon_* (1 - \chi_*)}{\zeta_*}}, \quad e_{d*}^{n+1} = \frac{\Delta_{d*} + \frac{\gamma}{\zeta_*} e_{g*}^{n+1}}{\frac{1}{\tau} + \frac{\gamma_{Dp}}{\zeta_*}}.$$

Шаг 4. Вычислим значения удельной внутренней энергии каждой частицы газа и пыли на слое  $n + 1$ :

$$\left( \frac{1}{\tau} + \gamma \frac{\varepsilon_*^n}{\zeta_*^n} \right) e_{ga}^{n+1} = \frac{e_{ga}^n}{\tau} + \gamma_{Dp} \frac{\varepsilon_*^n}{\zeta_*^n} e_{d*}^{n+1} + \Delta Q_a^n + \frac{\varepsilon_*^n \|v_*^n - u_*^n\|^2}{t_*^n},$$

$$\left( \frac{1}{\tau} + \frac{\gamma_{Dp}}{\zeta_*^n} \right) e_{dl}^{n+1} = \frac{e_{dl}^n}{\tau} + \frac{\gamma e_{g*}^{n+1}}{\zeta_*^n}.$$

## Список литературы

1. *Soo S.L.* Particulates and continuum: multiphase fluid dynamics. New York: Routledge, 1989. doi [10.1201/9780203744291](https://doi.org/10.1201/9780203744291).
2. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. Часть 1. М.: Наука, 1987.
3. *Дейч М.Е., Филиппов Г.А.* Газодинамика двухфазных сред. М.: Энергоиздат, 1981.
4. *Gidaspow D.* Multiphase flow and fluidization: continuum and kinetic theory descriptions. San Diego: Academic Press, 1994.
5. *Marble F.E.* Dynamics of dusty gases // Annual Review of Fluid Mechanics. 1970. **2**, N 1. 397–446. doi [10.1146/annurev.fl.02.010170.002145](https://doi.org/10.1146/annurev.fl.02.010170.002145).
6. *Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М.* Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980.
7. *Akimkin V., Vorobyov E., Pavlyuchenkov Y., Stoyanovskaya O.* Gravitoviscous protoplanetary discs with a dust component — IV. Disc outer edges, spectral indices, and opacity gaps // MNRAS. 2020. **499**, N 4. 5578–5597. doi [10.1093/mnras/staa3134](https://doi.org/10.1093/mnras/staa3134).
8. *Vorobyov E.I., Elbakyan V.G., Johansen A., et al.* Formation of pebbles in (gravito-)viscous protoplanetary disks with various turbulent strengths // Astronomy and Astrophysics. 2023. **670**. Article Number A81. doi [10.1051/0004-6361/202244500](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202244500).
9. *Снытников В.Н., Пескова Е.Е., Стояновская О.П.* Модель двухтемпературной среды газ – твердые наночастицы с лазерным пиролизом метана // Математическое моделирование. 2023. **35**, № 4. 24–50. doi [10.20948/mm-2023-04-02](https://doi.org/10.20948/mm-2023-04-02).
10. *Алексеев М.В.* Численное моделирование двухфазных течений в рамках релаксационной модели Баера–Нунциато // Вычислительные методы и программирование. 2023. **24**, N 2. 182–194. doi [10.26089/NumMet.v24r214](https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r214).
11. *Benitez-Llambay P., Krapp L., Pessah M.E.* Asymptotically stable numerical method for multispecies momentum transfer: gas and multifluid dust test suite and implementation in FARGO3D // The Astrophysical Journal, Supplement Series. 2019. **241**, N 2. 25. doi [10.3847/1538-4365/ab0a0e](https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab0a0e).
12. *Laibe G., Price D.J.* DUSTYBOX and DUSTYWAVE: two test problems for numerical simulations of two-fluid astrophysical dust-gas mixtures // MNRAS. 2011. **418**, N 3. 1491–1497. doi [10.1111/j.1365-2966.2011.19291.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19291.x).
13. *Lorén-Aguilar P., Bate M.R.* Two-fluid dust and gas mixtures in smoothed particle hydrodynamics: a semi-implicit approach // MNRAS. 2014. **443**. 927–945. doi [10.1093/mnras/stu1173](https://doi.org/10.1093/mnras/stu1173).
14. *Laibe G., Price D.J.* Dusty gas with smoothed particle hydrodynamics — I. Algorithm and test suite // MNRAS. 2012. **420**, N 3. 2345–2364. doi [10.1111/j.1365-2966.2011.20202.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.20202.x).
15. *Monaghan J.J., Kocharyan A.* SPH simulation of multi-phase flow // Computer Physics Communications. 1995. **87**, N 1–2. 225–235. doi [10.1016/0010-4655\(94\)00174-Z](https://doi.org/10.1016/0010-4655(94)00174-Z).
16. *Monaghan J.J.* Smoothed particle hydrodynamics // Reports on Progress in Physics. 2005. **68**, N 8. 1703–1759. doi [10.1088/0034-4885/68/8/R01](https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/8/R01).
17. *Omang M., Trulsen J.K.* Multi-phase shock simulations with smoothed particle hydrodynamics (SPH) // Shock Waves. 2014. **24**, N 5. 521–536. doi [10.1007/s00193-014-0506-7](https://doi.org/10.1007/s00193-014-0506-7).
18. *Stoyanovskaya O.P., Glushko T.A., Snytnikov N.V., Snytnikov V.N.* Two-fluid dusty gas in smoothed particle hydrodynamics: fast and implicit algorithm for stiff linear drag // Astronomy and Computing. 2018. **25**. 25–37. doi [10.1016/j.ascom.2018.08.004](https://doi.org/10.1016/j.ascom.2018.08.004).
19. *Stoyanovskaya O., Davydov M., Arendarenko M., et al.* Fast method to simulate dynamics of two-phase medium with intense interaction between phases by smoothed particle hydrodynamics: gas-dust mixture with polydisperse particles, linear drag, one-dimensional tests // Journal of Computational Physics. 2021. **430**. Article Number 110035. doi [10.1016/j.jcp.2020.110035](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.110035).
20. *Стояновская О.П.* Лагранжев метод для жестких задач динамики двухфазной среды с релаксацией: частица-сетка или частица-частица // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 2. 208–227. doi [10.26089/NumMet.v26r215](https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r215).
21. *Маркелова Т.В., Стояновская О.П.* Плоские звуковые волны в макроскопической модели двухскоростной двухтемпературной газозвеси // Прикладная механика и техническая физика, принята к публикации.
22. *Stoyanovskaya O.P., Burmistrova O.A., Arendarenko M.S., Markelova T.V.* Dispersion analysis of SPH for parabolic equations: high-order kernels against tensile instability // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2025. **457**, N 23. Article Number 116316. doi [10.1016/j.cam.2024.116316](https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116316).
23. *Burmistrova O.A., Markelova T.V., Arendarenko M.S., Stoyanovskaya O.P.* A new method for approximating of first derivatives in smoothed particle hydrodynamics: theory and practice for linear transport equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. **46**, N 1. 43–54. doi [10.1134/s1995080224608312](https://doi.org/10.1134/s1995080224608312).



24. Stoyanovskaya O., Lisitsa V., Anoshin S., et al. Dispersion analysis of SPH as a way to understand its order of approximation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. **438**. Article Number 115495. doi [10.1016/j.cam.2023.115495](https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115495).
25. Dehnen W., Aly H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability // MNRAS. 2012. **425**, N 2. 1068–1082. doi [10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x).
26. Price D.J., Wurster J., Tricco T.S., et al. Phantom: a smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics code for astrophysics // Publications of the Astronomical Society of Australia. 2018. **35**. Article Number e031. doi [10.1017/pasa.2018.25](https://doi.org/10.1017/pasa.2018.25).
27. Davydov M., Stoyanovskaya O., Savvateeva T., Snytnikov V. New 3D benchmark for CFD-codes based on analytical solution of spherically-symmetric gas free expansion // Communications in Computational Physics. 2025. **38**, N 2. 439–466. doi [10.4208/cicp.oa-2024-0134](https://doi.org/10.4208/cicp.oa-2024-0134).

Получена  
26 июня 2025 г.

Принята  
3 декабря 2025 г.

Опубликована  
19 декабря 2025 г.

### Информация об авторе

Татьяна Александровна Савватеева — мл. науч. сотр.; Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН, пр-кт Академика Лаврентьева, 15, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

### References

1. S. L. Soo, *Particulates and Continuum: Multiphase Fluid Dynamics. (1st ed.)* (Routledge, New York, 1989). doi [10.1201/9780203744291](https://doi.org/10.1201/9780203744291).
2. R. I. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media. Volume 1.* (Science, Moscow, 1987) [in Russian].
3. M. E. Deitch and G. A. Filippov, *Gas Dynamics of Two-Phase Media* (Energoizdat, Moscow, 1981) [in Russian].
4. D. Gidaspow, *Multiphase Flow and Fluidization: Continuum and Kinetic Theory Descriptions* (Academic Press, San Diego, 1994).
5. F. E. Marble, “Dynamics of Dusty Gases,” *Annual Review of Fluid Mechanics* **2** (1), 397–446 (1970). doi [10.1146/annurev.fl.02.010170.002145](https://doi.org/10.1146/annurev.fl.02.010170.002145).
6. L. E. Sternin, B. N. Maslov, A. A. Shraiber, and A. M. Podvysotsky, *Two-Phase Mono- and Polydisperse Gas Flows with Particles* (Mashinostroenie, Moscow, 1980) [in Russian].
7. V. Akimkin, E. Vorobyov, Y. Pavlyuchenkov, and O. Stoyanovskaya, “Gravitoviscous Protoplanetary Discs with a Dust Component — IV. Disc Outer Edges, Spectral Indices, and Opacity Gaps,” *MNRAS* **499** (4), 5578–5597 (2020). doi [10.1093/mnras/staa3134](https://doi.org/10.1093/mnras/staa3134).
8. E. I. Vorobyov, V. G. Elbakyan, A. Johansen, et al., “Formation of Pebbles in (Gravito-)Viscous Protoplanetary Disks with Various Turbulent Strengths,” *Astronomy and Astrophysics* **670**, Article Number A81 (2023). doi [10.1051/0004-6361/202244500](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202244500).
9. V. N. Snytnikov, E. E. Peskova, and O. P. Stoyanovskaya, “Model of a Two-Temperature Medium of Gas – Solid Nanoparticles with Laser Methane Pyrolysis,” *Mathematical modeling* **35** (4), 24–50 (2023). doi [10.20948/mm-2023-04-02](https://doi.org/10.20948/mm-2023-04-02).
10. M. V. Alekseev, “Numerical Algorithms for Solving Two-Phase Flows Based on Relaxation Baer–Nunziato Model,” *Numerical Methods and Programming* **24** (2), 182–194 (2023). doi [10.26089/NumMet.v24r214](https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r214).
11. P. Benitez-Llambay, L. Krapp, and M. Pessah, “Asymptotically Stable Numerical Method for Multispecies Momentum Transfer: Gas and Multifluid Dust Test Suite and Implementation in FARGO3D,” *The Astrophysical Journal, Supplement Series* **241** (2), 25 (2019). doi [10.3847/1538-4365/ab0a0e](https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab0a0e). <https://arxiv.org/pdf/1811.07925>. Cited Desember 10, 2025.
12. G. Laibe and D. J. Price, “DUSTYBOX and DUSTYWAVE: Two Test Problems for Numerical Simulations of Two-Fluid Astrophysical Dust-Gas Mixtures,” *MNRAS* **418** (3), 1491–1497 (2011). doi [10.1111/j.1365-2966.2011.19291.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19291.x).
13. P. Lorén-Aguilar and M. R. Bate, “Two-Fluid Dust and Gas Mixtures in Smoothed Particle Hydrodynamics: a Semi-Implicit Approach,” *MNRAS* **443**, 927–945 (2014). doi [10.1093/mnras/stu1173](https://doi.org/10.1093/mnras/stu1173).
14. G. Laibe and D. J. Price, “Dusty Gas with Smoothed Particle Hydrodynamics — I. Algorithm and Test Suite,” *MNRAS* **420** (3), 2345–2364 (2012). doi [10.1111/j.1365-2966.2011.20202.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.20202.x).

15. J. J. Monaghan and A. Kocharyan, “SPH Simulation of Multi-Phase Flow,” *Computer Physics Communications* **87** (1–2), 225–235 (1995). doi [10.1016/0010-4655\(94\)00174-Z](https://doi.org/10.1016/0010-4655(94)00174-Z).
16. J. J. Monaghan, “Smoothed Particle Hydrodynamics,” *Reports on Progress in Physics* **68** (8), 1703–1759 (2005). doi [10.1088/0034-4885/68/8/R01](https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/8/R01).
17. M. Omang and J.K. Trulsen, “Multi-Phase Shock Simulations with Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH),” *Shock Waves* **24** (5), 521–536 (2014). doi [10.1007/s00193-014-0506-7](https://doi.org/10.1007/s00193-014-0506-7).
18. O. P. Stoyanovskaya, T. A. Glushko, N. V. Snytnikov, and V. N. Snytnikov, “Two-Fluid Dusty Gas in Smoothed Particle Hydrodynamics: Fast and Implicit Algorithm for Stiff Linear Drag,” *Astronomy and Computing* **25**, 25–37 (2018). doi [10.1016/j.ascom.2018.08.004](https://doi.org/10.1016/j.ascom.2018.08.004).
19. O. Stoyanovskaya, M. Davydov, M. Arendarenko, et al., “Fast Method to Simulate Dynamics of Two-Phase Medium with Intense Interaction between Phases by Smoothed Particle Hydrodynamics: Gas-Dust Mixture with Polydisperse Particles, Linear Drag, One-Dimensional Tests,” *Journal of Computational Physics* **430**, Article number 110035 (2021). doi [10.1016/j.jcp.2020.110035](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.110035).
20. O. P. Stoyanovskaya, “Lagrangian Method for Stiff Problems of Two-Phase Dynamics with Relaxation: Particle-Mesh vs Particle-Particle,” *Numerical methods and programming* **26** (2), 208–227 (2025). doi [10.26089/NumMet.v26r215](https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r215).
21. T. V. Markelova and O. P. Stoyanovskaya, “Plane Sound Waves in a Macroscopic Model of a Two-Speed, Two-Temperature Gas Suspension,” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, accepted for publication.
22. O. P. Stoyanovskaya, O. A. Burmistrova, M. S. Arendarenko, and T. V. Markelova, “Dispersion Analysis of SPH for Parabolic Equations: High-Order Kernels against Tensile Instability,” *Journal of Computational and Applied Mathematics* **457** (23), Article Number 116316 (2025). doi [10.1016/j.cam.2024.116316](https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116316).
23. O. A. Burmistrova, T. V. Markelova, M. S. Arendarenko, and O. P. Stoyanovskaya, “A New Method for Approximating of First Derivatives in Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Practice for Linear Transport Equation,” *Lobachevskii Journal of Mathematics* **46** (1), 43–54 (2025). doi [10.1134/s1995080224608312](https://doi.org/10.1134/s1995080224608312).
24. O. P. Stoyanovskaya, V. Lisitsa, S. Anoshin, et al., “Dispersion Analysis of SPH as a Way to Understand Its Order of Approximation,” *Journal of Computational and Applied Mathematics* **438**, Article Number 115495 (2024). doi [10.1016/j.cam.2023.115495](https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115495).
25. W. Dehnen and H. Aly, “Improving Convergence in Smoothed Particle Hydrodynamics Simulations without Pairing Instability,” *MNRAS* **425** (2), 1068–1082 (2012). doi [10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x).
26. D. J. Price, J. Wurster, T. S. Tricco, et al., “Phantom: A Smoothed Particle Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics Code for Astrophysics,” *Publications of the Astronomical Society of Australia* **35**, Article Number e031 (2018). doi [10.1017/pasa.2018.25](https://doi.org/10.1017/pasa.2018.25).
27. M. Davydov, O. Stoyanovskaya, T. Savvateeva, and V. Snytnikov, “New 3D Benchmark for CFD-Codes Based on Analytical Solution of Spherically-Symmetric Gas Free Expansion,” *Communications in Computational Physics* **38** (2), 439–466 (2025). doi [10.4208/cicp.oa-2024-0134](https://doi.org/10.4208/cicp.oa-2024-0134).

*Received*  
June 26, 2025

*Accepted*  
December 3, 2025

*Published*  
December 19, 2025

### Information about the author

*Tatiana A. Savvateeva* — Junior Researcher; Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Ac. Lavrentiev prospekt, 15, 630090, Novosibirsk, Russia.