doi 10.26089/NumMet.v26r215 УДК 519.63

Лагранжев метод для жестких задач динамики двухфазной среды с релаксацией: частица-сетка или частица-частица

О. П. Стояновская
Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-8674-7441, e-mail: o.p.sklyar@gmail.com

Аннотация: Макроуровневые модели динамики газовзвесей часто представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных с релаксационными слагаемыми, описывающими передачу импульса и энергии от газа к частицам и наоборот. Для ультрадисперсных частиц время релаксации намного короче, чем время, на котором рассматривается динамика среды. В работе исследуется лагранжев метод моделирования динамики газовзвесей “двухжидкостная гидродинамика сглаженных частиц” (Two-Fluid Smoothed Particle Hydrodynamics, TFSPH). TFSPH подразумевает, что каждая фаза (газ и частицы) моделируется своим набором частиц. В рамках TFSPH известны два подхода к расчету релаксационного взаимодействия (трения), которое определяется разностью скоростей между несущей и дисперсной фазами: частица-частица и частица-сетка. Ранее в вычислительных экспериментах было установлено, что для малых времен релаксации в подходе частица-частица имеет место избыточная диссипация волн, а подход частица-сетка свободен от этого недостатка. В работе впервые дано объяснение этому явлению средствами вычислительной математики.

Ключевые слова: равномерные численные методы, двухжидкостная гидродинамика сглаженных частиц, SPH-IDIC, динамика газовзвесей, жесткие релаксационные слагаемые, жесткое трение.

Благодарности: Исследование выполнено в рамках государственного задания Института гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН, проект FWGG–2021–0001.

Для цитирования: Стояновская О.П. Лагранжев метод для жестких задач динамики двухфазной среды с релаксацией: частица-сетка или частица-частица // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 2. 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215.

Lagrangian method for stiff problems of two-phase dynamics with relaxation: particle-mesh vs particle-particle

Olga P. Stoyanovskaya
Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0002-8674-7441, e-mail: o.p.sklyar@gmail.com

Abstract: To simulate the dynamics of gas-dust mixtures at the macroscale level, it is necessary to solve numerically a gas-dynamic equations with relaxation terms describing the transfer of momentum and energy from gas to particles and vice versa. For ultrafine particles, the time of relaxation is much shorter than the time at which the dynamics of the medium is considered. We study the Lagrangian method for gas-dust mixture simulation named Two-Fluid Smoothed Particle Hydrodynamics (TFSPH). TFSPH implies that each phase (gas and particles) is modeled by its own set of particles. Within the framework of TFSPH, two approaches to calculating the relaxation interaction (drag) are known: particle-particle and particle-mesh. Previously it was found in numerical experiments that for small relaxation times, the particle-particle approach suffers from waves overdissipation, while the particle-mesh approach is free from this drawback. We provide the first explanation of this phenomenon using computational mathematics.

Keywords: uniform numerical methods, Two-Fluid Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH-IDIC, gas-dust mixture, stiff relaxation terms, stiff drag.

Acknowledgements: The work was funded by the project of Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS FWGG–2021–0001.

For citation: O. P. Stoyanovskaya, "Lagrangian method for stiff problems of two-phase dynamics with relaxation: particle-mesh vs particle-particle," Numerical Methods and Programming. **26** (2), 208–227 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r215.

---

1. Введение. Начально-краевые задачи для систем уравнений в частных производных (УЧП) с малыми параметрами являются объектом длительного интереса специалистов по теоретической физике и дифференциальным уравнениям (см., например, [1], научно-популярную книгу [2]).

Для аналитического решения таких задач развиты асимптотические методы. Упомянем наиболее популярные метод пограничного слоя и метод нескольких масштабов. Суть метода пограничного слоя состоит в построении решения вырожденной системы уравнений (в которой малый параметр равен нулю), а затем в удовлетворении граничным условиям за счет построения решения в малой области, размер которой определяется малым параметром. Такая область часто называется погранслой или скин. Идеи, заложенные в основу этого подхода, изложены в [3, 4], они получили дальнейшее развитие, например на случай внутренних слоев или контрастных структур в [5, 6]. В случае, когда решение не удается разделить на основное состояние и погранслой, применяют метод нескольких масштабов. Его суть состоит в том, что переменная, при старшей производной по которой стоит малый параметр, заменяется на две независимые переменные — "быструю" и "медленную", т.е. от системы, содержащей малый параметр при старшей производной, осуществляется переход к системе с бóльшим количеством независимых переменных, но уже не содержащей малый параметр при старшей производной [7, 8].

Наличие малого параметра в задаче налагает высокие требования на численные методы их решения. Обычно подходящими для задач с малым параметром являются методы, которые обладают равномерной сходимостью по малому параметру (в работе [9] такие методы рассмотрены для обыкновенных дифференциальных уравнений). Равномерная сходимость означает, что при фиксированном численном разрешении модели и при стремлении малого параметра к нулю погрешность решения не возрастает. Альтернативное определение — ограниченность погрешности решения при сколь угодной малости параметра [10, с. 6]. В англоязычной литературе такие методы называют parameter uniform numerical methods. Практическим преимуществом таких методов оказывается возможность получать численное решение приемлемой точности независимо от соотношения между малыми "физическими" и "численными" параметрами задачи (под численными мы понимаем как шаги по пространству, так и шаги по времени).

Значительное развитие получили аналитические [11, 12] и численные методы для параболических задач с малым параметром при старшей производной [13, 14] (также см. [10, 15] и библиографию в этих работах). Решения таких задач часто имеют пограничный слой, т.е. несколько пространственных масштабов.

Работа посвящена исследованию свойств численного метода для класса задач с малым релаксационным параметром. Под релаксационным параметром понимаем параметр, который является временем. Будем рассматривать систему УЧП вида

$$\begin{cases} L_k(\boldsymbol{U}) = f_k(\boldsymbol{U}), \quad k \neq i, j, \\ L_i(\boldsymbol{U}) = f_i(\boldsymbol{U}) + C_i \dfrac{U_i - U_j}{\tau_{\text{rel}}}, \\ L_j(\boldsymbol{U}) = f_j(\boldsymbol{U}) + C_j \dfrac{U_j - U_i}{\tau_{\text{rel}}}, \end{cases} \tag{1}$$

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

здесь $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)$ — искомая вектор-функция, L_i — компоненты дифференциального оператора $\boldsymbol{L}$ по переменным $\boldsymbol{x}$, t, f_i — компоненты алгебраической вектор-функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})$, τ_{rel} — время релаксации, C_i, C_j — безразмерные величины, определяемые параметрами системы УЧП и компонентами вектор-функции $\boldsymbol{U}$. В этой системе релаксационный параметр входит в знаменатель в правой части двух уравнений "симметричным" образом. Кроме того, в случае умножения на него этих двух уравнений он оказывается перед всем дифференциальным оператором, т.е. вырожденные уравнения (отвечающие нулевому значению малого параметра) оказываются алгебраическими. Такие задачи возникают, например, при моделировании двухфазных дисперсных сред, в которых несущая и дисперсные фазы обмениваются импульсом или тепловой энергией [16–19], в приложениях к астрофизическим объектам и химической инженерии (моделировании гетерогенных сред с мелкодисперсным катализатором). В них в качестве релаксационного параметра выступает время скоростной или тепловой релаксации соответственно. Еще одним приложением задач с релаксационным параметром является макроуровневая модель неравновесного колебательно-возмущенного газа (например, см. [20]). В этом случае релаксация происходит между колебательной энергией в равновесном и возбужденном состоянии, а релаксационные слагаемые также имеют вид (1). Отметим, что в механике сплошных сред рассматриваются также другие задачи с малым релаксационным параметром, например в моделях вязкоупругих жидкостей [21] малыми параметрами являются время релаксации напряжения при постоянной деформации и время релаксации деформации при постоянном напряжении. Однако в этих задачах вырожденные уравнения остаются дифференциальными, а не алгебраическими.

Такие задачи (в частности, гиперболические системы вида (1) с жесткими релаксационными слагаемыми [22]) активно изучаются методами теории волн [23] с 80-х гг. 20 в., асимптотического разложения в степенные ряды с конца 20 в. Для $\tau_{\text{rel}} \ll T$ —времени движения волн в среде — методы теории волн позволяют сконструировать систему, не содержащую малый параметр, решение начально-краевой задачи для которой будет близко к решению начально-краевой задачи для исходной системы при малых τ_{rel} для некоторой области начальных данных.

Задачи с малыми релаксационными параметрами оказываются многомасштабными по времени или жесткими. Это означает, в первую очередь, что при использовании явных одношаговых методов шаг по времени должен удовлетворять условию

$$\tau < \tau_{\text{rel}}. \tag{2}$$

Поэтому для методов с неподвижной сеткой идеи их эффективного решения связаны с адаптацией методов интегрирования по времени, например см. [24].

Отметим, что равномерные численные методы для задач с релаксационными слагаемыми иногда называются методами, сохраняющими асимптотику (AP-методами) [25]. Как правило, AP-методы основываются: 1) на точном выполнении законов сохранения импульса и энергии при дискретизации межфазного взаимодействия, 2) на полунеявной аппроксимации релаксационных слагаемых или экспоненциальном приближении, т.е. по вычислительным затратам оказываются близкими к явным методам (в англоязычной литературе такие методы называются линейно реализуемыми или linearly implemented) [26].

В 2012 г. Лайбе и Прайс [27] проблематизировали решение жестких задач механики газодисперсных сред методом лагранжевых частиц Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)[1]. Они показали, что при использовании подхода, в котором газ и дисперсная фаза моделируются разными наборами частиц, классический вариант гидродинамики сглаженных частиц [35], гарантирующий, что при передаче импульса и энергии за счет межфазного взаимодействия законы сохранения выполняются точно даже в дискретной модели, происходит избыточная диссипация звуковых волн, если решается задача с малым релаксационным параметром. Эта диссипация не зависит от временно́го шага и реализуется даже для очень малых шагов интегрирования $\tau < \tau_{\text{rel}}$. Для допустимого уровня диссипации требуется подбирать пространственное разрешение, удовлетворяющее условию

$$H < c_{\text{s}}\tau_{\text{rel}}, \tag{3}$$

где H — радиус носителя ядра метода, c_{s} — скорость звука в несущем газе.

В 2018 г. был разработан метод SPH-IDIC [36] для численного моделирования монодисперсных газовзвесей, свободный от ограничений (2), (3). В SPH-IDIC все силы, кроме межфазного обмена, рассчи-

[1] SPH представляет собой метод аппроксимации уравнений в частных производных на подвижных узлах — частицах [28]. Этот метод широко применяется для задач астрофизики, например см. [29–33] и механики сплошных сред, например [34]. Для аппроксимации используется гладкая функция с компактным носителем, называемая ядром.

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

тываются с помощью классического для гидродинамики сглаженных частиц подхода частица-частица, а межфазный обмен рассчитывается неявно с использованием сетки. Наглядно разницу в подходах частица-частица и частица-сетка при решении жестких задач показывают рис. 4 и рис. 5 из работы [36]. В 2021 г. метод частица-сетка SPH-IDIC был распространен на модели с полидисперсными частицами [37]. В работах [36, 37] преимущества SPH-IDIC для задач с малым релаксационным параметром (несколькими параметрами) были продемонстрированы на практике, т.е. при численном решении задач с известными эталонными решениями. Цель настоящей работы — впервые обосновать асимптотические свойства подходов частица-частица и частица-сетка средствами вычислительной математики, а именно, методом дисперсионного анализа[2].

Для этого в разделе 2 приводится простейшая модельная система УЧП, при численном решении которой проявятся асимптотические свойства подходов частица-частица и частица-сетка. В разделе 3 приводятся полученные на основе обоих подходов дискретные уравнения, аппроксимирующие эту систему, а также вывод дисперсионных соотношений для них. В разделе 4 сравниваются полученные дисперсионные соотношения. В разделе 5 вводятся понятия для обобщения частных результатов. Выводы приведены в разделе 6.

2. Система уравнений DustyHopf — простейшая макроуровневая модель движения двухфазной среды. Пусть несущая фаза представляет собой газ, в котором бегущие волны распространяются с конечной положительной скоростью c, а дисперсная фаза — облако частиц, в котором звуковые волны не распространяются (т.е. двигаются с нулевой скоростью). Будем считать, что межфазное взаимодействие осуществляется через силу трения, которая пропорциональна скорости движения дисперсной примеси относительно газа и обратно пропорциональна неотрицательному времени релаксации t_{stop}. Для простоты рассмотрим режим Кнудсена взаимодействия газа и частиц, который также известен как режим Эпштейна или свободно-молекулярного обтекания. В этом режиме время релаксации не зависит от относительной скорости между газом и частицами, а определяется только формой, размером и веществом твердой частицы, а также плотностью и скоростью звука в обтекающем газе. В этом случае простейшая модель для изучения дисперсии и диссипации плоских волн в двухфазной газодисперсной среде будет представлять собой систему из двух УЧП, записанную для скоростей газа и пыли $v(x,t)$, $u(x,t)$ соответственно:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon\,\dfrac{u-v}{t_{\text{stop}}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{v-u}{t_{\text{stop}}}. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь x, t — независимые переменные, обозначающие пространственную координату и время, c, t_{stop}, ε — вещественные параметры задачи, причем ε имеет физический смысл отношения плотности пыли к плотности газа в смеси, т.е. является конечным неотрицательным числом. Эта система выражает закон сохранения импульса в двухфазной среде.

Система (4) является неоднородной системой линейных УЧП с постоянными коэффициентами. Она имеет постоянное решение

$$v(x,t) = u(x,t) = v_0$$

и решение в виде бегущей волны

$$v(x,t) = v_0 + \hat{v}e^{\mathbf{i}(kx-\omega t)}, \quad u(x,t) = v_0 + \hat{u}e^{\mathbf{i}(kx-\omega t)}, \tag{5}$$

в котором вещественное волновое число k и комплексная частота ω связаны дисперсионным соотношением

$$\omega\left(\omega - ck + \mathbf{i}\,\frac{\varepsilon+1}{t_{\text{stop}}}\right) - \mathbf{i}\,\frac{kc}{t_{\text{stop}}} = 0, \tag{6}$$

а связь между амплитудами возмущений $\hat{v}$, $\hat{u}$ устанавливается из системы линейных алгебраических урав-

[2] Отметим, что дисперсионный анализ (также называется спектральный анализ, фурье-анализ, анализ Неймана) широко применяется для исследования устойчивости SPH, например см. [38–40]. Кроме того, например, в [41] дисперсионный анализ был применен для изучения порядка аппроксимации.

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

нений, которая получается путем подстановки (5) в (4), т.е.

$$\begin{pmatrix} \omega - ck + \dfrac{\mathbf{i}\,\varepsilon}{t_{\text{stop}}} & -\dfrac{\mathbf{i}\,\varepsilon}{t_{\text{stop}}} \\ -\dfrac{\mathbf{i}}{t_{\text{stop}}} & \omega + \dfrac{\mathbf{i}}{t_{\text{stop}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

При этом дисперсионное соотношение (6) выражает условие существования нетривиального решения (7), т.е. равенство нулю ее определителя.

Из (6) следует, что при конечном времени релаксации межфазное взаимодействие приводит к дисперсии и диссипации (уменьшению амплитуды) звуковых волн. При этом в асимптотических случаях дисперсия и диссипация отсутствуют, действительно:

- при $t_{\text{stop}} = +\infty$ (релаксации не происходит, замороженное равновесие) дисперсионное соотношение принимает вид
$$\omega(\omega - ck) = 0, \tag{8}$$
- при $t_{\text{stop}} = 0$ (релаксация мгновенная, релаксационное равновесие) дисперсионное соотношение принимает вид
$$\omega = \frac{c}{\varepsilon + 1} k. \tag{9}$$

Видно, что (8) и (9) гарантируют, что фазовая скорость $v_{\text{ph}} = \omega/k$ не зависит от волнового числа (дисперсия отсутствует), а частота ω имеет нулевую мнимую часть (диссипация и антидиссипация отсутствуют). Кроме того, из (9) следует, что при малых значениях t_{stop} решения начально-краевой задачи для системы (4) будут близки к решению начально-краевой задачи для системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{c}{\varepsilon + 1} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u = v, \tag{10}$$

для некоторой области начальных данных. Физическая интерпретация этого асимптотического свойства состоит в том, что в режиме релаксационного равновесия двухфазная двухскоростная среда превращается в односкоростную среду (смесь), в которой волны движутся (а в случае доминирования диссипации затухают) со скоростью, которая выражается через аналогичную скорость в несущей фазе и учитывает концентрацию дисперсной фазы. Кроме того, из (10) легко видеть, что в случае нулевой массовой доли дисперсной фазы скорость звука в смеси будет совпадать со скоростью звука в несущей фазе. Естественно, что в режиме замороженного равновесия несущая фаза “не замечает” дисперсную фазу, т.е. при любой концентрации дисперсной фазы волны двигаются со скоростью движения волн в несущей фазе.

Таким образом, используемая базовая модель сохраняет асимптотические свойства, проявляемые в режимах релаксационного и замороженного равновесия, которые известны для более сложных моделей динамики двухфазных сред. Более подробное обсуждение этих свойств можно найти, например, в работах [42–44] для режима, когда в несущей фазе перенос доминирует над диссипацией, и в работе [45] для режима, когда в несущей фазе вязкая диссипация доминирует над переносом. Во всех упомянутых в этом абзаце работах исследовались модели, в которых в дисперсной фазе звуковые волны не распространяются, при этом реализуется диссипация за счет межфазного взаимодействия.

3. Дискретная модель двухфазной среды на основе гидродинамики сглаженных частиц.

3.1. Основные идеи метода гидродинамики сглаженных частиц. Для аппроксимации УЧП методом SPH расчетная область заменяется набором подвижных дискретных узлов или частиц. Пусть каждый узел с номером a и координатой x_a имеет массу m_a. Тогда плотность среды в точке x будет определяться суммой вкладов от частиц, расположенных в ее окрестности:

$$\rho(x) = \sum_a m_a W(x - x_a, H), \tag{11}$$

где $W(x - x_a, H) = \dfrac{1}{H^{\dim}} \tilde{W}\left(\dfrac{x - x_a}{H}\right)$ — гладкая финитная функция (ядро или функция радиального базиса), которая зависит от расстояния между частицей с номером a и точкой пространства x, $\dim = 1, 2, 3$ — размерность пространства. Носитель функции является шаром в пространстве соответствующей

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

размерности, радиус носителя определяется величиной H — радиусом сглаживания ядра. Безразмерное ядро является нормированным, т.е.

$$\int\limits_{\Omega_q} \tilde{W}(q)\, d\Omega_q = 1,$$

где $q = \dfrac{x - x_a}{H}$, Ω_q — носитель ядра. Значение плотности, определяемой уравнением (11), известно в любой точке пространства, а не только в узлах (центрах масс частиц). Для нахождения производной от плотности достаточно продифференцировать гладкое ядро W.

Пусть теперь в расчетных узлах известна не только масса, но и значение некоторой функции F. Требуется определить значение функции F и ее производных в каждой точке пространства. Для этого предположим, что значение функции в точке x складывается из ее значений в окрестных узлах, взятых с определенным весом. Будем считать, что этот вес пропорционален вкладу узла в общую плотность в точке x. Тогда

$$F(x) \approx \sum_a F_a \frac{m_a W(x - x_a, H)}{\rho(x_a)}. \tag{12}$$

Для нахождения производных от величины, определяемой соотношением (12), операция дифференцирования применяется к гладкому ядру[3]:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} \approx \sum_a \frac{F_a m_a}{\rho(x_a)} \frac{\partial W(x - x_a, H)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \approx \sum_a \frac{F_a m_a}{\rho(x_a)} \frac{\partial^2 W(x - x_a, H)}{\partial x^2}. \tag{13}$$

3.2. Построение SPH-аппроксимации системы DustyHopf. В классическом варианте при SPH-аппроксимации УЧП узлам интерполяции приписывается скорость среды. Для этого в левой части УЧП выделяется полная производная вдоль потока, а остальные слагаемые переносятся в правую часть. Так, система (4) будет переписана в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = (v - c)\dfrac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon \dfrac{u - v}{t_{\text{stop}}}, \\ \dfrac{du}{dt} = u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{v - u}{t_{\text{stop}}}. \end{cases} \tag{14}$$

В расчетную область поместим N_{g} частиц с координатами x_a, моделирующих газ, и N_{d} частиц с координатами x_j, моделирующих пыль. В качестве индексов для частиц газа используем a, b, для частиц, моделирующих дисперсную фазу, используем i, j. Будем изменять координаты частиц согласно уравнениям

$$\frac{dx_a}{dt} = v_a, \quad \frac{dx_j}{dt} = u_j.$$

Аппроксимируя первые производные по схеме (13), получим

$$\frac{dv_a}{dt} = (v_a - c) \sum_b \frac{m_b}{\rho_{\text{g},b}} v_b \frac{\partial W(x_a - x_b, H)}{\partial x_a} + \left[\varepsilon \frac{u - v}{t_{\text{stop}}}\right]_a, \tag{15}$$

$$\frac{du_j}{dt} = u_j \sum_i \frac{m_i}{\rho_{\text{d},i}} u_i \frac{\partial W(x_j - x_i, H)}{\partial x_j} + \left[\frac{u - v}{t_{\text{stop}}}\right]_j. \tag{16}$$

В следующем разделе рассмотрим два способа аппроксимации трения.

3.3. Алгоритмы расчета трения. Трение определяется разностью скоростей, в двухжидкостном подходе скорости фаз известны в разных точках пространства. Из практики [27–37, 48–53] известно, что при малых релаксационных параметрах результаты моделирования зависят от выбора способа интерполяции.

[3] Отметим, что такой прямолинейный подход не всегда гарантирует безусловную аппроксимацию дифференциального оператора, в частности оказывается, что вычисление дискретной второй производной по этой схеме аппроксимирует непрерывную вторую производную только при условии, что $\Delta x \lambda^2 = o(H^3)$, где Δx — среднее расстояние от частицы для ближайшего соседа, λ — длина волны. Подробнее эти вопросы обсуждаются в работах [46–47].

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

§ 3.3.1. Алгоритм расчета трения частица-частица и приближенное дисперсионное соотношение для него.

Подход частица-частица используется в [49, 53]. Этот подход предполагает, что в точке пространства x_a, где находится газовая частица, создается виртуальная пылевая частица, скорость которой u_a определяется стандартной SPH-интерполяцией по ближайшим соседям, и аналогично вводится скорость виртуальной газовой частицы v_j, т.е.

$$u_a = \sum_j u_j \frac{m_j}{\rho_{\mathrm{d},j}} W_{j,a}, \quad v_j = \sum_a v_a \frac{m_a}{\rho_{\mathrm{g},a}} W_{j,a}. \tag{17}$$

Таким образом, аппроксимируя (4) с применением (14)–(17), имеем систему дифференциально-алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_a}{dt} = (v_a - c)\displaystyle\sum_b \frac{m_b}{\rho_{\mathrm{g},b}} v_b \frac{\partial W(x_a - x_b, H)}{\partial x_a} - \frac{\varepsilon}{t_{\mathrm{stop}}}\left(v_a - \sum_j u_j \frac{m_j}{\rho_j} W(x_a - x_j, H)\right), \\ \dfrac{dx_a}{dt} = v_a, \\ \dfrac{du_j}{dt} = u_j \displaystyle\sum_i \frac{m_i}{\rho_{\mathrm{d},i}} u_i \frac{\partial W(x_j - x_i, H)}{\partial x_j} + \frac{1}{t_{\mathrm{stop}}}\left(\sum_a v_a \frac{m_a}{\rho_a} W(x_j - x_a, H) - u_j\right), \\ \dfrac{dx_j}{dt} = u_j, \\ \rho_a = \displaystyle\sum_b m_b W(x_a - x_b, H), \\ \rho_i = \displaystyle\sum_j m_j W(x_i - x_j, H). \end{cases} \tag{18}$$

Далее получим приближенное дисперсионное соотношение для (18).

ШАГ 1. Линеаризуем систему (18) в окрестности постоянного решения

$$x_a = a\Delta x_{\mathrm{g}}, \quad x_j = j\Delta x_{\mathrm{d}}, \quad v_a = v_0, \quad u_j = v_0, \quad \rho_a = \rho_{\mathrm{g}}, \quad \rho_j = \rho_{\mathrm{d}}, \tag{19}$$

где Δx_{g} — расстояние между двумя соседними “газовыми” частицами, Δx_{d} — расстояние между двумя соседними “пылевыми” частицами. Для простоты положим, что $v_0 = 0$. Введем обозначения для возмущения этого решения

$$x_a = a\Delta x_{\mathrm{g}} + \delta x_a, \quad x_j = j\Delta x_{\mathrm{d}} + \delta x_j, \quad v_a = \delta v_a, \quad u_j = \delta u_j, \quad \rho_a = \rho_{\mathrm{g}} + \delta\rho_a, \quad \rho_j = \rho_{\mathrm{d}} + \delta\rho_j. \tag{20}$$

Подставим (20) в (18) и, используя соотношения

$$\frac{1}{\rho_a + \delta\rho_a} = \frac{1}{\rho_a} - \frac{\delta\rho_a}{\rho_a^2}, \qquad W(\tilde{x}_a - \tilde{x}_b) \equiv \tilde{W}_{ab} = W_{ab} + (\delta x_a - \delta x_b)\frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a},$$
$$\frac{\partial \tilde{W}_{ab}}{\partial x_a} = \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a} + (\delta x_a - \delta x_b)\frac{\partial^2 W_{ab}}{\partial x_a^2},$$

откинем слагаемые, в которые возмущения входят во второй и старшей степени; получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta v_a}{dt} = -c\displaystyle\sum_b \frac{m_b}{\rho_b}\delta v_b \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a} - \frac{\varepsilon}{t_{\mathrm{stop}}}\left(\delta v_a - \sum_j \delta u_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{aj}\right), \\ \dfrac{d\delta x_a}{dt} = \delta v_a, \\ \dfrac{d\delta u_j}{dt} = \dfrac{1}{t_{\mathrm{stop}}}\left(\displaystyle\sum_a \delta v_a \frac{m_a}{\rho_a} W_{ja} - \delta u_j\right), \\ \dfrac{d\delta x_j}{dt} = \delta u_j, \\ \delta\rho_a = -\displaystyle\sum_b \frac{m_b \delta\rho_b}{\rho_b^2} W_{ab} + \sum_b \frac{m_b}{\rho_b}(\delta x_a - \delta x_b)\frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a}, \\ \delta\rho_j = -\displaystyle\sum_i \frac{m_i \delta\rho_i}{\rho_i^2} W_{ij} + \sum_i \frac{m_i}{\rho_i}(\delta x_j - \delta x_i)\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j}. \end{cases} \tag{21}$$

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

Заметим, что первое и третье уравнения системы образуют замкнутую подсистему относительно $\delta v_a, \delta u_j$. Далее будем рассматривать только эту подсистему.

ШАГ 2. Перейдем от линеаризованной аппроксимации системы УЧП к однородной СЛАУ. Для этого придадим возмущениям вид плоских бегущих волн

$$\delta v_a = V e^{\mathbf{i}(kx_a - \omega t)}, \quad \delta u_j = U e^{\mathbf{i}(kx_j - \omega t)} \tag{22}$$

и, подставив (22) в (21), получим однородную СЛАУ для неизвестных V и U:

$$\begin{cases} -\mathbf{i}\,\omega V = -c \sum\limits_b \dfrac{m_b}{\rho_b} V e^{\mathbf{i}k(x_b - x_a)} \dfrac{\partial W_{ab}}{\partial x_a} - \dfrac{\varepsilon}{t_{\text{stop}}} \left(V - U \sum\limits_j e^{\mathbf{i}k(x_j - x_a)} \dfrac{m_j}{\rho_j} W_{aj} \right), \\ -\mathbf{i}\,\omega U = -\dfrac{1}{t_{\text{stop}}} \left(U - V \sum\limits_a e^{\mathbf{i}k(x_a - x_j)} \dfrac{m_a}{\rho_a} W_{aj} \right). \end{cases} \tag{23}$$

ШАГ 3. Перепишем систему (23) таким образом, чтобы поправки, зависящие от счетных параметров задачи, являлись функционалами безразмерных величин

$$\varphi_{\text{g}} = \frac{\Delta x_{\text{g}}}{H}, \quad \varphi_{\text{d}} = \frac{\Delta x_{\text{d}}}{H}, \quad K = \frac{\lambda}{H} \tag{24}$$

и безразмерных функций

$$\tilde{W}(q) = HW(q), \quad \tilde{W}_1(q) = H^2 \frac{\partial W}{\partial q}. \tag{25}$$

Используя соотношения $\dfrac{m_b}{\rho_b} = \Delta x_{\text{g}}$, $\dfrac{m_j}{\rho_j} = \Delta x_{\text{d}}$, выражающие в одномерном случае связь между объемом, массой и однородной плотностью среды, которая моделируется частицами одинаковой массы, получим:

$$\begin{pmatrix} \omega - ckA(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) + \dfrac{\mathbf{i}\,\varepsilon}{t_{\text{stop}}} & -\dfrac{\mathbf{i}\,\varepsilon}{t_{\text{stop}}} B(\varphi_{\text{d}}, K, \tilde{W}) \\ -\dfrac{\mathbf{i}}{t_{\text{stop}}} C(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) & \omega + \dfrac{\mathbf{i}}{t_{\text{stop}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где

$$A(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) = \sum_b \frac{\varphi_{\text{g}} K}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi b \varphi_{\text{g}}}{K} \right) \tilde{W}_1(b\varphi_{\text{g}}), \tag{27}$$

$$B(\varphi_{\text{d}}, K, \tilde{W}) = \varphi_{\text{d}} \sum_j \cos\left(\frac{2\pi j \varphi_{\text{d}}}{K} \right) \tilde{W}(j\varphi_{\text{d}}), \tag{28}$$

$$C(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) = \varphi_{\text{g}} \sum_b \cos\left(\frac{2\pi b \varphi_{\text{g}}}{K} \right) \tilde{W}(b\varphi_{\text{g}}). \tag{29}$$

ШАГ 4. Для существования нетривиальных решений V, U необходимо, чтобы определитель (26) был равен 0, что позволяет получить приближенное дисперсионное соотношение (ПДС)

$$\omega \left(\omega - ck\, A(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) + \mathbf{i}\, \frac{\varepsilon + 1}{t_{\text{stop}}} \right) - \mathbf{i}\, \frac{kc\, A(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W})}{t_{\text{stop}}} + \frac{\varepsilon}{t_{\text{stop}}^2} \left(B(\varphi_{\text{d}}, K, \tilde{W})\, C(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) - 1 \right) = 0, \tag{30}$$

в котором черным цветом показаны величины из дисперсионного соотношения для непрерывной системы (6), а красным цветом выделены счетные поправки, возникшие в результате дискретизации, причем функционал A (27) определяется способом аппроксимации градиента скорости, функционалы B (28) и C (29) — способом аппроксимации силы трения. Ясно, что для того чтобы численное решение по методу (18) сходилось к точному решению, необходимо, чтобы значения A, B, C сходились к 1 для любого ядра при использовании бесконечно подробного разрешения. Обоснование этой сходимости, а также анализ полученного соотношения будут представлены в разделе 4.

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

§ 3.3.2. Алгоритм расчета трения частица-сетка и приближенное дисперсионное соотношение для него.

Основная идея метода SPH-IDIC состоит в том, что его проектируемые свойства достигаются за счет гибридности: все силы (ускорения), кроме трения, рассчитываются с использованием подхода частица-частица, трение рассчитывается с использованием подхода частица-сетка, т.е. для вычисления силы трения расчетная область покрывается сеткой, ячейки которой могут иметь произвольную форму. Пусть в ячейке находится $N_{\rm cg}$ газовых частиц и $N_{\rm cd}$ пылевых частиц. Если $N_{\rm cg} > 0$ и $N_{\rm cd} > 0$, то в ячейке выполняется аппроксимация трения. Для этого вычисляется скорость газа и скорость пыли в ячейке (как среднее арифметическое всех частиц одного сорта). Уравнение движения аппроксимируется полунеявно на двухслойной по времени схеме (все ускорения, кроме трения, берутся с текущего временно́го шага, ускорение трения — со следующего), в результате чего находится скорость газа и частиц в ячейке на следующем шаге по времени. По найденной скорости в ячейке определяются скорости отдельных частиц.

Метод SPH-IDIC [36, 37] подразумевает способ аппроксимации трения и способ интегрирования по времени. В работе мы рассмотрим только его полудискретный вариант, в котором интегрирование по времени выполняется точно. Текущий вариант метода SPH-IDIC подразумевает, что для моделирования каждой фазы используются частицы одинаковой массы; введем обозначения $m_{\rm g}$, $m_{\rm d}$ для массы газовых и пылевых частиц. Для простоты рассмотрим равномерную сетку, размер ячейки которой равен $H_{\rm cell}$. Тогда полудискретная SPH-IDIC аппроксимация системы (4) будет записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_a}{dt} = (v_a - c)\displaystyle\sum_b \frac{m_{\rm g}}{\rho_{{\rm g},b}} v_b \frac{\partial W(x_a - x_b, H)}{\partial x_a} - \frac{\varepsilon}{t_{\rm stop}}\left(v_a - \frac{1}{N_{\rm cd}}\sum_{j=1}^{N_{\rm cd}} u_j\right), \\ \dfrac{dx_a}{dt} = v_a, \\ \dfrac{du_j}{dt} = u_j \displaystyle\sum_i \frac{m_{\rm d}}{\rho_{{\rm d},i}} u_i \frac{\partial W(x_j - x_i, H)}{\partial x_j} + \frac{1}{t_{\rm stop}}\left(\frac{1}{N_{\rm cg}}\sum_{b=1}^{N_{\rm cg}} v_b - u_j\right), \\ \dfrac{dx_j}{dt} = u_j, \\ \rho_a = m_{\rm g}\displaystyle\sum_b W_{a,b}, \\ \rho_i = m_{\rm d}\displaystyle\sum_j W_{i,j}. \end{cases} \tag{31}$$

Далее получим приближенное дисперсионное соотношение для (31).

ШАГ 1. Линеаризуем систему (31) в окрестности постоянного решения (19). По аналогии с действиями из предыдущего раздела положим $v_0 = 0$, подставим возмущение постоянного решения (20) в (31) и откинем слагаемые второго порядка малости:

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta v_a}{dt} = -c\displaystyle\sum_b \frac{m_b}{\rho_b}\delta v_b \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a} - \frac{\varepsilon}{t_{\rm stop}}\left(\delta v_a - \frac{1}{N_{\rm cd}}\sum_{j=1}^{N_{\rm cd}}\delta u_j\right), \\ \dfrac{d\delta x_a}{dt} = \delta v_a, \\ \dfrac{d\delta u_j}{dt} = \dfrac{1}{t_{\rm stop}}\left(\displaystyle\sum_a \delta v_a \frac{m_a}{\rho_a} W_{ja} - \delta u_j\right), \\ \dfrac{d\delta x_j}{dt} = \delta u_j, \\ \delta\rho_a = -\sum_b \dfrac{m_b \delta\rho_b}{\rho_b^2} W_{ab} + \displaystyle\sum_b \frac{m_b}{\rho_b}(\delta x_a - \delta x_b)\frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a}, \\ \delta\rho_j = -\sum_i \dfrac{m_i \delta\rho_i}{\rho_i^2} W_{ij} + \displaystyle\sum_i \frac{m_i}{\rho_i}(\delta x_j - \delta x_i)\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j}. \end{cases} \tag{32}$$

Заметим, что первое и третье уравнения системы (32) образуют замкнутую подсистему относительно δv_a, δu_j. Далее будем рассматривать только эту подсистему.

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

ШАГ 2. Для перехода от линеаризованной аппроксимации системы УЧП

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta v_a}{dt} = -c\sum_b \dfrac{m_b}{\rho_b}\delta v_b \dfrac{\partial W_{ab}}{\partial x_a} - \dfrac{\varepsilon}{t_{\text{stop}}}\left(\delta v_a^* - \dfrac{1}{N_{\text{cd}}}\sum_{j=1}^{N_{\text{cd}}}\delta u_j^*\right), \\ \dfrac{d\delta u_j}{dt} = \dfrac{1}{t_{\text{stop}}}\left(\sum_a \delta v_a^* \dfrac{m_a}{\rho_a} W_{ja} - \delta u_j^*\right) \end{cases} \tag{33}$$

к однородной СЛАУ, будем придавать возмущениям вид плоских бегущих волн. При этом для расчета градиента скорости используются величины, которые известны в узлах, где находятся частицы, т.е. имеющие вид (22), а для расчета трения координаты частиц смещаются в центр ячейки x_{drag}, поэтому возмущения приобретают вид

$$\delta v_a^* = V e^{\mathbf{i}(k x_{\text{drag}} - \omega t)}, \quad \delta u_j^* = U e^{\mathbf{i}(k x_{\text{drag}} - \omega t)}, \tag{34}$$

где связь между координатами x_a, x_j и x_{drag} дается формулами

$$x_{\text{drag}} = \left[\frac{x_a}{H_{\text{cell}}}\right] + \frac{H_{\text{cell}}}{2}, \quad x_{\text{drag}} = \left[\frac{x_j}{H_{\text{cell}}}\right] + \frac{H_{\text{cell}}}{2}. \tag{35}$$

Подстановка (22) и (34) в (33) приводит с СЛАУ

$$\begin{cases} -\mathbf{i}\,\omega V = -c\sum_b \dfrac{m_b}{\rho_b} V e^{\mathbf{i}k(x_b - x_a)} \dfrac{\partial W_{ab}}{\partial x_a} - \dfrac{\varepsilon}{t_{\text{stop}}}\left((V-U)e^{\mathbf{i}k(x_{\text{drag}} - x_a)}\right), \\ -\mathbf{i}\,\omega U = -\dfrac{1}{t_{\text{stop}}}\left((U-V)\,e^{\mathbf{i}k(x_{\text{drag}} - x_j)}\right). \end{cases} \tag{36}$$

ШАГ 3. Перепишем (36) таким образом, чтобы поправки, зависящие от счетных параметров, являлись функционалами безразмерных величин (24) и

$$S = \frac{H_{\text{cell}}}{H}, \tag{37}$$

а также безразмерных функций (25); получим:

$$\begin{pmatrix} \omega - ckA(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) + \dfrac{\mathbf{i}\,\varepsilon}{t_{\text{stop}}} Q(K, \varphi_{\text{g}}, S) & -\dfrac{\mathbf{i}\,\varepsilon}{t_{\text{stop}}} Q(\varphi_{\text{g}}, K, S) \\ -\dfrac{\mathbf{i}}{t_{\text{stop}}} P(\varphi_{\text{d}}, K, S) & \omega + \dfrac{\mathbf{i}}{t_{\text{stop}}} P(\varphi_{\text{d}}, K, S) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где в соответствии с (35) и (37)

$$P(\varphi_{\text{d}}, K, S) = \exp\left(\frac{2\pi\mathbf{i}}{K}\left(\left(\left[\frac{j\varphi_{\text{d}}}{S}\right] + \frac{1}{2}\right) S - j\varphi_{\text{d}}\right)\right) = e^{\mathbf{i}k(x_{\text{drag}} - x_a)}, \tag{39}$$

$$Q(\varphi_{\text{g}}, K, S) = \exp\left(\frac{2\pi\mathbf{i}}{K}\left(\left(\left[\frac{a\varphi_{\text{g}}}{S}\right] + \frac{1}{2}\right) S - a\varphi_{\text{g}}\right)\right) = e^{\mathbf{i}k(x_{\text{drag}} - x_j)}. \tag{40}$$

ШАГ 4. Для существования нетривиальных решений V, U необходимо, чтобы определитель (38) был равен 0, что позволяет получить ПДС

$$\omega\left(\omega - ckA(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) + \mathbf{i}\,\frac{\varepsilon \cdot Q(\varphi_{\text{g}}, K, S) + 1 \cdot P(\varphi_{\text{d}}, K, S)}{t_{\text{stop}}}\right) - \mathbf{i}\,\frac{ckA(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W})\,P(\varphi_{\text{d}}, K, S)}{t_{\text{stop}}} = 0. \tag{41}$$

Анализ полученного соотношения будет представлен в следующем разделе 4.

4. Сопоставление классического и приближенного дисперсионных соотношений. В табл. 1 приведены классическое и полученные приближенные дисперсионные соотношения. В формулах черным цветом показаны величины из дисперсионного соотношения для непрерывной системы (6), красным цветом выделены счетные поправки, возникшие в результате дискретизации, причем функционал A определяется способом аппроксимации градиента скорости, функционалы P и Q или B и C — способом аппроксимации силы трения.

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

Таблица 1. Классическое и приближенные дисперсионные соотношения

Table 1. Classical and approximate dispersion relation

Модель Model	Дисперсионное соотношение Dispersion relation
DustyHopf (4) $v_t + cv_x = \varepsilon\dfrac{u-v}{t_{\text{stop}}},\ u_t = \dfrac{v-u}{t_{\text{stop}}}$	$\omega\left(\omega - ck + \mathbf{i}\dfrac{\varepsilon+1}{t_{\text{stop}}}\right) - \mathbf{i}\dfrac{kc}{t_{\text{stop}}} = 0$
SPH-аппроксимация с подходом частица-частица (18) SPH approximation with particle-particle approach (18)	$\omega\left(\omega - ckA + \mathbf{i}\dfrac{\varepsilon+1}{t_{\text{stop}}}\right) - \mathbf{i}\dfrac{kcA}{t_{\text{stop}}} + \dfrac{\varepsilon}{t^2_{\text{stop}}}(BC-1) = 0$
SPH-аппроксимация с подходом частица-сетка (31) SPH approximation with particle-mesh approach (31)	$\omega\left(\omega - ckA + \mathbf{i}\dfrac{\varepsilon\cdot Q + 1\cdot P}{t_{\text{stop}}}\right) - \mathbf{i}\dfrac{kcAP}{t_{\text{stop}}} = 0$

4.1. Аппроксимация методов при конечном t_{stop}. В этом разделе покажем, что при использовании бесконечноподробного пространственного разрешения ПДС, полученные для обоих методов, совпадут с классическим дисперсионным соотношением для непрерывной системы DustyHopf.

§ 4.1.1. SPH-аппроксимация с подходом частица-частица.

Необходимыми условиями аппроксимации при конечном t_{stop} и заданном ядре для метода частица-частица являются

$$\lim_{\substack{\varphi_{\text{g}}\to 0\\ K\to\infty}} A(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) = 1, \quad \lim_{\substack{\varphi_{\text{d}}\to 0\\ K\to\infty}} B(\varphi_{\text{d}}, K, \tilde{W}) = 1, \quad \lim_{\substack{\varphi_{\text{g}}\to 0\\ K\to\infty}} C(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) = 1. \tag{42}$$

Первое равенство из (42) обосновано в [54], действительно,

$$\lim_{\varphi_{\text{g}}\to 0} A(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) \overset{(27)}{=} \lim_{\varphi_{\text{g}}\to 0} \sum_b \frac{\varphi_{\text{g}} K}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi b\varphi_{\text{g}}}{K}\right) \tilde{W}_1(b\varphi_{\text{g}}) =$$
$$- \frac{K}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{2\pi y}{K}\right)\tilde{W}_1(y)dy = -\frac{K}{2\pi}\,\mathbf{i}\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\left(\frac{2\pi}{K}\right)\left(\frac{\partial \tilde{W}(y)}{\partial y}\right) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\left(\frac{2\pi}{K}\right)\left(\tilde{W}(y)\right),$$

где используется обозначение для преобразования Фурье

$$\mathcal{F}(\eta)\big(f(y)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\mathbf{i}\eta y}dy, \tag{43}$$

а также нечетность первой производной ядра и свойство преобразования Фурье

$$\mathcal{F}(\eta)\left(\frac{\partial \tilde{W}(y)}{\partial y}\right) = \mathbf{i}\,\eta\mathcal{F}(\eta)\big(\tilde{W}(y)\big).$$

В силу того, что при $H \to 0$ ядро стремится к δ-функции Дирака, справедливо:

$$\lim_{K\to\infty} \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(\frac{2\pi}{K}\right)\big(\tilde{W}(y)\big) = 1. \tag{44}$$

Покажем справедливость второго равенства из (42). Имеем:

$$\lim_{\varphi_{\text{d}}\to 0} B(\varphi_{\text{d}}, K, \tilde{W}) = \lim_{\varphi_{\text{d}}\to 0} \varphi_{\text{d}} \sum_j \cos\left(\frac{2\pi j\varphi_{\text{d}}}{K}\right)\tilde{W}(j\varphi_{\text{d}}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi y}{K}\right)\tilde{W}(y)\,dy = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\left(\frac{2\pi}{K}\right)\big(\tilde{W}(y)\big),$$

где последний переход обосновывается формулой (43) и четностью ядра. Далее в силу (44) заключаем, что предельное значение B при бесконечно подробном пространственном разрешении равно 1. Третье равенство из (42) обосновывается аналогично второму.

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

§ 4.1.2. SPH-аппроксимация с подходом частица-сетка.

Необходимыми условиями аппроксимации при конечном t_{stop} и заданном ядре для метода частица-сетка являются

$$\lim_{\substack{\varphi_{\text{g}}\to 0\\ K\to\infty}} A(\varphi_{\text{g}}, K, \tilde{W}) = 1, \qquad \lim_{\substack{\varphi_{\text{d}}\to 0\\ K\to\infty\\ S\to 0}} P(\varphi_{\text{d}}, K, S) = 1, \qquad \lim_{\substack{\varphi_{\text{g}}\to 0\\ K\to\infty\\ S\to 0}} Q(\varphi_{\text{g}}, K, S) = 1. \tag{45}$$

Первое равенство в (45) обосновано в разделе 4.1.1, справедливость второго и третьего равенства немедленно следует из (39), (40).

§ 4.1.3. Дополнительные выводы из ПДС для подходов частица-частица и частица-сетка.

Сравним ПДС из табл. 1. Во-первых, легко видеть, что в ПДС метода частица-частица последнее слагаемое, предел которого равен нулю, обеспечивает диссипацию (уменьшение амплитуды) волн. Это слагаемое тем больше, чем меньше значение t_{stop} (размер частиц) и больше значение ε (отношение массы дисперсной фазы к массе газа). Это совпадает с наблюдаемым на практике эффектом, что чем выше содержание твердой фазы в смеси, тем более выраженной является численная диссипация в SPH [27, 36]. С другой стороны, при стремлении ε к нулю влияние *счетной* (вызванной способом расчета трения) диссипации также стремится к нулю. В методе частица-сетка, напротив, метод расчета трения влияет на решение даже в случае пренебрежимо малой массовой доли частиц. Это объясняется тем, что формулы (31) подразумевают усреднение скоростей "газовых" частиц по ячейке даже если в ней отсутствуют "пылевые" частицы.

4.2. Асимптотическое свойство моделей при $t_{\text{stop}} \to 0$. На практике при измельчении t_{stop} и сохранении пространственного разрешения неизменным методы демонстрируют разные свойства: в подходе частица-частица проявляется избыточная диссипация, а в подходе частица-сетка может возникать дисперсия. Поэтому, чтобы объяснить разницу в наблюдаемых на практике свойствах методов расчета трения, будем изучать приближенные дисперсионные соотношения для режима релаксационного равновесия, когда $t_{\text{stop}} \to 0$. Назовем их релаксационными приближенными дисперсионными соотношениями.

§ 4.2.1. SPH-аппроксимация трения с подходом частица-частица.

Для этого подхода ПДС имеет вид (30). Попытаемся определить релаксационное ПДС, справедливое как для конечного пространственного разрешения, так и для бесконечно подробного. В случае бесконечно подробного пространственного разрешения последнее слагаемое в (30) представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, для раскрытия которой рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть в проколотой окрестности $\varphi_{\text{d}} = 0$, $\varphi_{\text{g}} = 0$, $K = +\infty$, $t_{\text{stop}} = 0$ справедливо

   $$\big(1 - B(\varphi_{\text{d}}, K, W)\, C(\varphi_{\text{g}}, K, W)\big) = O\big(\mathcal{M}\, t^{1}_{\text{stop}}\big),$$

   где $\mathcal{M} > 0$ — вещественная константа, тогда предельное релаксационное ПДС имеет вид

   $$\omega(\varepsilon + 1) - kc - \varepsilon\mathcal{M}\,\mathbf{i} = 0,$$

   которое определяет затухающие волны в силу выполнения неравенства для мнимой части частоты $\mathrm{Im}(\omega) - \varepsilon\mathcal{M} < 0$. Причем в силу $\mathcal{M} = O\big((1 - B(\varphi_{\text{d}}, K, W)\ C(\varphi_{\text{g}}, K, W))t^{-1}_{\text{stop}}\big)$ при фиксированном пространственном разрешении скорость затухания будет тем выше, чем меньше значение t_{stop}.

2. Пусть в проколотой окрестности $\varphi_{\text{d}} = 0$, $\varphi_{\text{g}} = 0$, $K = +\infty$, $t_{\text{stop}} = 0$ справедливо

   $$\big(1 - B(\varphi_{\text{d}}, K, W)\, C(\varphi_{\text{g}}, K, W)\big) = O\big(\mathcal{M}\, t^{2}_{\text{stop}}\big),$$

   тогда предельное релаксационное ПДС имеет вид

   $$\omega(\varepsilon + 1) - kc = 0,$$

   которое совпадает с (9) и определяет гиперболические волны (волны постоянной амплитуды) в силу того, что мнимая часть частоты $\mathrm{Im}(\omega) = 0$.

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

3. Случаю, когда в проколотой окрестности $\varphi_{\rm d}=0$, $\varphi_{\rm g}=0$, $K=+\infty$, $t_{\rm stop}=0$ имело бы место
$$(1-B(\varphi_{\rm d},K,W)\,C(\varphi_{\rm g},K,W))=O(\mathcal{M}\,t^0_{\rm stop}),$$
соответствовало бы предельное релаксационное ПДС вида
$$\varepsilon\mathcal{M}=0,$$
однако такой случай, очевидно, невозможен в силу (42).

Таким образом, в силу п. 2 метод позволяет получить численное решение в виде простой волны, которое будет сходиться к аналитическому решению. Однако вид релаксационного ПДС зависит от траектории, по которой осуществляется движение к предельной точке, и в общем случае не определен.

§ 4.2.2. SPH-аппроксимация трения с подходом частица-сетка.

Для этого подхода ПДС имеет вид (41) и для него, в отличие от подхода частица-частица, возможно определение релаксационного ПДС, отвечающего $t_{\rm stop}\to 0$:
$$\omega=\frac{c\,A(\varphi_{\rm g},K,\tilde W)\,P(\varphi_{\rm d},K,S)}{\varepsilon\cdot Q(\varphi_{\rm g},K,S)+1\cdot P(\varphi_{\rm d},K,S)}k,$$
которое для любой траектории движения к предельной точке $\varphi_{\rm d}=0$, $\varphi_{\rm g}=0$, $K=+\infty$, $t_{\rm stop}=0$ будет совпадать с (9). С другой стороны, в силу определения P и Q при некоторых значениях счетных параметров возможна ситуация, когда $\mathrm{Im}(\omega)>0$, что будет отвечать развитию численной неустойчивости.

5. Обобщение результатов. Релаксационные дисперсионные соотношения, полученные для системы DustyHopf и ее дискретных аппроксимаций методом SPH, приведены в табл. 2. В случае, когда на практике погрешность решения зависит от малого параметра, релаксационное ПДС не существует, а для метода, когда не зависит — релаксационное ПДС существует. Введем понятия, обобщающие асимптотические свойства методов на произвольный способ дискретизации пространственных производных. Использование этих понятий целесообразно, например, в процессе автоматизации рутинных выкладок дисперсионного анализа произвольных численных схем. Прототип инструмента для такой автоматизации представлен в [55].

Для линеаризованной на постоянном решении системы УЧП дисперсионное соотношение имеет вид
$$f(\omega,k)=\sum_{l+m}\omega^l k^m a_{lm}=0, \tag{46}$$
где a_{lm} определяется физическими параметрами задачи.

Определение 1. Если один из физических параметров в (46) устремить к предельному значению (нулю или бесконечности), то получится дисперсионное соотношение
$$f^{\rm asymp}(\omega,k)=\sum_{l+m}\omega^l k^m a^{\rm asymp}_{lm}=0. \tag{47}$$

Таблица 2. Классическое и релаксационные приближенные дисперсионные соотношения

Table 2. Classical and relaxation approximate dispersion relation

Модель Model	Дисперсионное соотношение для $t_{\rm stop}\to 0$ Dispersion relation for $t_{\rm stop}\to 0$
DustyHopf (4) $v_t+cv_x=\varepsilon\dfrac{u-v}{t_{\rm stop}},u_t=\dfrac{v-u}{t_{\rm stop}}$	$\omega=\dfrac{c}{\varepsilon+1}k$
SPH-аппроксимация с подходом частица-частица (18) SPH approximation with particle-particle approach (18)	не определено not defined
SPH-аппроксимация с подходом частица-сетка (31) SPH approximation with particle-mesh approach (31)	$\omega=\dfrac{cAP}{\varepsilon\cdot Q+1\cdot P}k$

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

Для задач, где в качестве параметра, принимающего бесконечно малое или бесконечно большое значение, используется релаксационный параметр τ_{rel}, будем использовать термины релаксационное ($\tau_{\text{rel}} \to 0$) дисперсионное соотношение для континуальной модели и замороженное ($\tau_{\text{rel}} \to +\infty$) дисперсионное соотношение для континуальной модели.

Утверждение 1. Для системы (4) релаксационное дисперсионное соотношение связано с классическим дисперсионным соотношением следующим образом:

$$f^{\text{asymp}}(\omega, k) = \lim_{\tau_{\text{rel}} \to 0} \tau_{\text{rel}} f(\omega, k), \tag{48}$$

т.е. $a_{lm}^{\text{asymp}} = \lim\limits_{\tau_{\text{rel}} \to 0} \tau_{\text{rel}} a_{lm}$. Доказательство очевидно.

Определение 2. Для численного метода, записанного *в полудискретной форме*, ПДС имеет вид

$$f^{\text{num}}(\omega, k, \mathcal{N}) = \sum_{l+m} \omega^l k^m a_{lm} a_{lm}^{\text{num}}(\mathcal{N}) = 0, \tag{49}$$

где $a_{lm}^{\text{num}}(\mathcal{N})$ определяется параметрами численного метода (безразмерными комплексами, сформированными из счетных параметров задачи и длины волны), $\mathcal{N}$ обозначает множество счетных параметров задачи.

Утверждение 2. Для аппроксимации метода необходимо, чтобы при использовании бесконечно подробного численного разрешения $a_{lm} a_{lm}^{\text{num}}(\mathcal{N})$ сходились к a_{lm}. Доказательство очевидно.

В частности, для рассматриваемых в работе методов необходимо, чтобы для всех $a_{lm} \neq 0$ и для выбранного ядра выполнялось

$$a_{lm}^{\text{num}}(\varphi_{\text{g}}, \varphi_{\text{d}}, K, S, \tilde{W}) \to_{\substack{\varphi_{\text{g}} \to 0 \\ \varphi_{\text{d}} \to 0 \\ K \to \infty \\ S \to 0}} 1.$$

Определение 3. Релаксационным приближенным дисперсионным соотношением, отвечающим ПДС в полудискретной форме (49), будем называть выражение вида $f^{\text{asymp,num}}(\omega, k, \mathcal{N}) = 0$, где

$$f^{\text{asymp,num}}(\omega, k, \mathcal{N}) = \lim_{\tau_{\text{rel}} \to 0} \tau_{\text{rel}} f^{\text{num}}(\omega, k, \mathcal{N}).$$

Определение 4. Будем называть численный метод методом, обладающим равномерной аппроксимацией по релаксационному параметру в линейном приближении, если выполнены одновременно два условия

1) при использовании бесконечно подробного численного разрешения коэффициенты ПДС $a_{lm} a_{lm}^{\text{num}}(\mathcal{N})$ сходятся к a_{lm},
2) релаксационное приближенное дисперсионное соотношение (48), отвечающее полудискретной аппроксимации, существует.

Утверждение 3. Метод (31) аппроксимации системы (4) является методом, обладающим равномерной аппроксимацией по релаксационному параметру в линейном приближении, а метод (18) аппроксимации той же системы таковым не является. Доказательство содержится в разделе 4.2.

Сформулируем обобщение Утверждения 3 в виде **гипотезы**: *при аппроксимации произвольных систем УЧП с релаксационным параметром методом, обладающим равномерной аппроксимацией по этому параметру в линейном приближении, дисперсионные и диссипативные свойства оказываются такими, что при стремлении к нулю малого параметра не требуется измельчать численное разрешение для поддержания фиксированной погрешности решения; при использовании методов, не обладающих равномерной аппроксимацией, при стремлении малого параметра к нулю требуется адаптировать (измельчать) численное разрешение для поддержания фиксированной погрешности решения.*

Таким образом, введение понятия релаксационное ПДС позволяет разделять методы, которые эффективны при решении задач с малыми релаксационными параметрами, и те, которые требуют адаптации численного разрешения под малые параметры задачи и, как следствие, оказываются неэффективными для жестких или многомасштабных задач.

6. Заключение. Сравниваются два подхода к численному моделированию динамики газовзвесей лагранжевым методом “двухжидкостная гидродинамика сглаженных частиц” (Two-Fluid Smoothed Particle Hydrodynamics, TFSPH). Модель представляет собой дифференциальные уравнения в частных производных с релаксационными слагаемыми, описывающими передачу импульса и энергии от газа к частицам и наоборот. TFSPH подразумевает, что несущая фаза (газ) дискретизируется своим набором частиц,

2025, **26** (2), 208–227. doi 10.26089/NumMet.v26r215

а дисперсная фаза — своим набором частиц. Методы различаются способом расчета межфазного взаимодействия (трения), которое в каждом локальном объеме определяется разностью скоростей между несущей и дисперсной фазами: в первом случае используется подход частица-частица, а во втором — частица-сетка. Ранее в вычислительных экспериментах было установлено, что в подходе частица-частица имеет место избыточная диссипация волн, возрастающая при стремлении времени релаксации к нулю, а подход частица-сетка свободен от этого недостатка.

Сформулирована базовая система уравнений математической физики DustyHopf для описания разницы в свойствах двух подходов методом дисперсионного анализа. DustyHopf представляет собой систему из двух линейных уравнений переноса, связанных между собой релаксационными слагаемыми. Искомыми функциями в DustyHopf являются скорости несущей и дисперсных фаз, а сама система является упрощенным выражением закона сохранения импульса. Построено дисперсионное соотношение для DustyHopf и приближенные дисперсионные соотношения для двух способов ее SPH-дискретизации. Показано, что дисперсионное соотношение DustyHopf позволяет вычислить предельные значения фазовой скорости (скорости звука) в случае бесконечно большого и бесконечно малого времен релаксации. Установлено, что в случае бесконечно малых времен релаксации скорость звука в смеси связана со скоростью звука в чистом газе таким же образом, как в изученных ранее моделях газовзвесей, содержащих как закон сохранения импульса, так и закон сохранения массы.

Введены понятия релаксационного дисперсионного соотношения и релаксационного приближенного дисперсионного соотношения, а также метода, обладающего равномерной аппроксимацией по релаксационному параметру. Сформулирована гипотеза, связывающая понятия равномерной аппроксимации и равномерной сходимости по малому параметру. В рамках этой гипотезы установлено, что подход частица-частица для моделирования трения приводит к численному методу, не обладающему равномерной сходимостью по малому параметру (времени релаксации), а подход частица-сетка позволяет обеспечить равномерную сходимость по этому параметру. В частности, показано, что для равномерной сходимости метода по малому релаксационному параметру необходимо построить приближенное дисперсионное соотношение и для него проверить существование релаксационного ПДС.

Список литературы

1. *Маслов В.П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
2. *Андрианов И.В., Маневич Л.И.* Асимптотология: идеи, методы, результаты. М.: Аслан, 1994.
3. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. **12**, № 5. 3–122.
4. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
7. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
8. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
9. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.
10. *Govindarao L.* Parameter uniform numerical methods for singularly perturbed parabolic partial differential equations. PhD Thesis. Rourkela: National Institute of Technology, 2019.
11. *Нефедов Н.Н., Дерюгина Н.Н.* Существование стационарного погранслойного решения в уравнении реакция–диффузия с сингулярным граничным условием Неймана // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. 2020. № 5. 30–34.
12. *Нестеров А.В., Шулико О.В.* Асимптотика решения слабо нелинейной системы дифференциальных уравнений типа “реакция–диффузия” // Матем. моделирование. 2004. **16**, № 8. 50–68.
13. *Задорин А.И.* Разностные схемы для нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром в ограниченных и неограниченных областях. Диссертация на соискание степени д.ф.-м.н. Новосибирск: Институт вычисл. матем. и матем. геофиз., 2000.
14. *Liseikin V.D.* Grid generation methods. Cham: Springer, 2017. doi 10.1007/978-3-319-57846-0.

15. *Коптева Н.В.* Апостериорные и априорные оценки конечноэлементных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений на анизотропных сетках. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Лимерик (Ирландия), 2018. https://www.keldysh.ru/council/3/D00202403/kopteva_diss.pdf Cited May 17, 2025.
16. *Алексеев М.В.* Численное моделирование двухфазных течений в рамках релаксационной модели Баера–Нунциато // Вычислительные методы и программирование. 2023. **24**, № 2. 182–194. doi 10.26089/NumMet.v24r214.
17. *Снытников В.Н., Пескова Е.Е., Стояновская О.П.* Модель двухтемпературной среды газ–твердые наночастицы с лазерным пиролизом метана // Математическое моделирование. 2023. **35**, № 4. 24–50. doi 10.20948/mm-2023-04-02.
18. *Akimkin V., Vorobyov E., Pavlyuchenkov Y., Stoyanovskaya O.* Gravitoviscous protoplanetary discs with a dust component — IV. Disc outer edges, spectral indices, and opacity gaps // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2020. **499**, No. 4. 5578–5597. doi 10.1093/mnras/staa3134.
19. *Vorobyov E.I., Elbakyan V.G., Johansen A., et al.* Formation of pebbles in (gravito-)viscous protoplanetary disks with various turbulent strengths // Astronomy and Astrophysics. 2023. **670**, Article Number A81. doi 10.1051/0004-6361/202244500.
20. *Khrapov S.S.* Nonlinear dynamics of acoustic instability in a vibrationally excited gas: influence of relaxation time and structure of shock waves // Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics. 2024. **25**, N 7. http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-7/articles/1151. Cited May 17, 2025.
21. *Петрова А.Г.* Асимптотический анализ моделей вязкоупругих жидкостей с двумя малыми параметрами релаксации // Прикл. мех. техн. физ. 2024. **65**, № 5. 157–168. doi 10.15372/pmtf202415512.
22. *Liu T.-P.* Hyperbolic conservation laws with relaxation // Commun. Math. Phys. 1987. **108**, 153–175. doi 10.1007/BF01210707.
23. *Marble F.E.* Dynamics of dusty gases // Annual Review of Fluid Mechanics. 1970. **2**, 397–446. doi 10.1146/annurev.fl.02.010170.002145.
24. *Садин Д.В.* Метод расчета волновых гетерогенных течений с интенсивным межфазным взаимодействием // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 1998. **38**, № 6. 1033–1039.
25. *Jin S.* Asymptotic preserving (AP) schemes for multiscale kinetic and hyperbolic equations: a review // Lecture Notes for Summer School on Methods and Models of Kinetic Theory (M&MKT). Grosseto: Porto Ercole, 2010. 177–216.
26. *Degond P., Deluzet F.* Asymptotic-preserving methods and multiscale models for plasma physics // J. Comput. Phys. 2017. **336**. 429–457. doi 10.1016/j.jcp.2017.02.009.
27. *Laibe G., Price D.J.* Dusty gas with smoothed particle hydrodynamics — I. Algorithm and test suite // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. **420**, No. 3. 2345–2364. doi 10.1111/j.1365-2966.2011.20202.x.
28. *Monaghan J.J.* Smoothed particle hydrodynamics // Reports on Progress in Physics. 2005. **68**, No. 8. 1703–1759. doi 10.1088/0034-4885/68/8/R01.
29. *Demidova T., Savvateeva T., Anoshin S., et al.* Implementation of dusty gas model based on fast and implicit particle-mesh approach SPH-IDIC in open-source astrophysical code GADGET-2 // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 14389. Cham: Springer, 2023. 195–208. doi 10.1007/978-3-031-49435-2_14.
30. *Стояновская О.П., Снытников Н.В., Снытников В.Н.* Алгоритм для решения нестационарных задач гравитационной газовой динамики: комбинация метода SPH и сеточного метода вычисления гравитационного потенциала // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**, № 1. 52–60. doi 10.26089/NumMet.v16r106.
31. *Стояновская О.П.* Численное моделирование развития гравитационной неустойчивости и образования сгустков вещества в массивных околозвездных дисках с использованием интегральной характеристики для интерпретации результатов // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**, № 3. 339–352. doi 10.26089/NumMet.v17r332.
32. *Springel V.* The cosmological simulation code GADGET-2 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2005. **364**, No. 4. 1105–1134. doi 10.1111/j.1365-2966.2005.09655.x.
33. *Price D.J., Wurster J., Tricco T.S., et al.* Phantom: a smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics code for astrophysics // Publications of the Astronomical Society of Australia. 2018. **35**, id.e031. doi 10.1017/pasa.2018.25.
34. *Zhang C., Rezavand M., Zhu Y., et al.* SPHinXsys: an open-source multi-physics and multi-resolution library based on smoothed particle hydrodynamics // Comput. Phys. Commun. 2021. **267**. Article Number 108066. doi 10.1016/j.cpc.2021.108066.
35. *Monaghan J., Kocharyan A.* SPH simulation of multi-phase flow // Comput. Phys. Commun. 1995. **87**, N 1–2. 225–235. doi 10.1016/0010-4655(94)00174-Z.

36. *Stoyanovskaya O.P., Glushko T.A., Snytnikov N.V., Snytnikov V.N.* Two-fluid dusty gas in smoothed particle hydrodynamics: fast and implicit algorithm for stiff linear drag // Astronomy and Computing. 2018. **25**. 25–37. doi 10.1016/j.ascom.2018.08.004.
37. *Stoyanovskaya O., Davydov M., Arendarenko M., et al.* Fast method to simulate dynamics of two-phase medium with intense interaction between phases by smoothed particle hydrodynamics: gas-dust mixture with polydisperse particles, linear drag, one-dimensional tests // J. Comput. Phys. 2021. textbf430. Article Number 110035. doi 10.1016/j.jcp.2020.110035.
38. *Morris J.P.* A study of the stability properties of smooth particle hydrodynamics // Publications of the Astronomical Society of Australia. 1996. **13**, No. 1. 97–102. doi 10.1017/S1323358000020610.
39. *Cha S.-H., Whitworth A.P.* Implementations and tests of Godunov-type particle hydrodynamics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2003. **340**, No. 1. 73–90. doi 10.1046/j.1365-8711.2003.06266.x.
40. *Dehnen W., Aly H.* Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. **425**, No. 2. 1068–1082. doi 10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x.
41. *Stoyanovskaya O.P., Lisitsa V.V., Anoshin S.A., et al.* Dispersion analysis of SPH as a way to understand its order of approximation // J. Comput. Appl. Math. 2024. **438**, Article Number 115495. doi 10.1016/j.cam.2023.115495.
42. *Markelova T.V., Arendarenko M.S., Isaenko E.A., and Stoyanovskaya O.P.* Plane sound waves of small amplitude in a gas-dust mixture with polydisperse particles // Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. 2021. **62**, N 4. 158–168. doi 10.15372/PMTF20210416.
43. *Stoyanovskaya O.P., Grigoryev V.V., Savvateeva T.A., et al.* Multi-fluid dynamical model of isothermal gas and buoyant dispersed particles: monodisperse mixture, reference solution of DustyWave problem as test for CFD-solvers, effective sound speed for high and low mutual drag // Int. J. of Multiphase Flow. 2022. **149**, Article Number 103935. doi 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103935.
44. *Markelova T.V., Stoyanovskaya O.P.* Plane sound waves in a macroscopic model of a two-velocity two-temperature gas-dust mixture // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2025 (in press).
45. *Stoyanovskaya O.P., Turova G.D., Yudina N.M.* Dispersion and group analysis of dusty Burgers equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. **45**, N 1. 108–118. doi 10.1134/s1995080224010505.
46. *Stoyanovskaya O.P., Burmistrova O.A., Arendarenko M.S., Markelova T.V.* Dispersion analysis of SPH for parabolic equations: high-order kernels against tensile instability // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2025. **457**, Article Number 116316. doi 10.1016/j.cam.2024.116316.
47. *Fatehi R., Manzari M.T.* Error estimation in smoothed particle hydrodynamics and a new scheme for second derivatives // Computers and Mathematics with Applications. 2011. **61**, No. 2. 482–498. doi 10.1016/j.camwa.2010.11.028.
48. *Laibe G., Price D.J.* Dusty gas with smoothed particle hydrodynamics — II. Implicit timestepping and astrophysical drag regimes // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. **420**, No. 3. 2365–2376. doi 10.1111/j.1365-2966.2011.20201.x.
49. *Lorén-Aguilar P., Bate M.R.* Two-fluid dust and gas mixtures in smoothed particle hydrodynamics II: an improved semi-implicit approach // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015. **454**, No. 4. 4114–4119. doi 10.1093/mnras/stv2262.
50. *Booth R.A., Sijacki D., Clarke C.J.* Smoothed particle hydrodynamics simulations of gas and dust mixtures // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015. **452**, No. 4. 3932–3947. doi 10.1093/mnras/stv1486.
51. *Hutchison M., Price D.J., Laibe G.* MULTIGRAIN: a smoothed particle hydrodynamic algorithm for multiple small dust grains and gas // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018. **476**, No. 2. 2186–2198. doi 10.1093/mnras/sty367.
52. *Price D.J., Laibe G.* A solution to the overdamping problem when simulating dust–gas mixtures with smoothed particle hydrodynamics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2020. **495**, No. 4. 3929–3934. doi 10.1093/mnras/staa1366.
53. *Elsender D., Bate M.R.* An implicit algorithm for simulating the dynamics of small dust grains with smoothed particle hydrodynamics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2024. **529**, No. 4. 4455–4467. doi 10.1093/mnras/stae722.
54. *Burmistrova O., Markelova T., Arendarenko M., Stoyanovskaya O.* A new method for approximating of first derivatives in smoothed particle hydrodynamics: theory and practice for linear transport equation // Lobachevskii J. Math. 2025. **46**. 43–54. doi 10.1134/S1995080224608312.

55. *Arendarenko M., Dzhanbekova A., Kotov S., et al.* SymDR: symbol computer algebra library for generation of classical and approximate dispersion relations for systems of partial differential equations // Lobachevskii J. Math. 2025. **46**. 1–12. doi 10.1134/S1995080224608579.

Поступила в редакцию
7 апреля 2025 г.

Принята к публикации
16 мая 2025 г.

Информация об авторе

Ольга Петровна Стояновская — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр.; Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН, пр-кт Академика Лаврентьева, 15, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. V. P. Maslov, *Asymptotic Methods and Perturbation Theory* (Nauka, Moscow, 1988; Springer, New York, 1999).
2. I. V. Andrianov and L. I. Manevitch, *Asymptotology: Ideas, Methods, and Applications* (Aslan, Moscow, 1994; Kluwer, Dordrecht, 2002).
3. M. I. Vishik and L. A. Lyusternik, “Regular Degeneration and Boundary Layer for Linear Differential Equations with Small Parameter,” Usp. Mat. Nauk **12** (5), 3–122 (1957) [Russ. Math. Surv. **12** (5), 3–122 (1957)].
4. A. L. Goldenveizer, *Theory of Elastic Thin Shells* (Nauka, Moscow, 1976; Pergamon Press, New York, 1961).
5. A. B. Vasil’eva and V. F. Butuzov, *Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
6. A. B. Vasil’eva and V. F. Butuzov, *Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1990) [in Russian].
7. A. Nayfeh, *Perturbation Methods* (Wiley, New York, 1973; Mir, Moscow, 1976).
8. S. A. Lomov, *Introduction to the General Theory of Singular Perturbations* (Nauka, Moscow, 1981; Am. Math. Soc. Vol. 112, Providence, 1992).
9. E. P. Doolan, J. J. H. Miller, and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers* (Boole Press, Dublin, 1980; Mir, Moscow, 1983).
10. L. Govindarao, *Parameter Uniform Numerical Methods for Singularly Perturbed Parabolic Partial Differential Equations*, PhD Thesis in Mathematics and Statistics (National Institute of Technology, Rourkela, India, 2019).
11. N. N. Nefedov and N. N. Deryugina, “The Existence of a Boundary-Layer Stationary Solution to a Reaction–Diffusion Equation with Singularly Perturbed Neumann Boundary Condition,” Vestn. Mosk. Univ., Ser. 3: Fiz. Astron., No. 5, 30–34 (2020) [Moscow Univ. Phys. Bull. **75** (5), 409–414 (2020)]. doi 10.3103/S0027134920050185.
12. A. V. Nesterov and O. V. Shuliko, “ Asymptotic Behavior of the Solution of a Weakly Nonlinear System of Differential Equations of “Reaction–Diffusion” Type,” Mat. Model. **16** (8), 50–58 (2004).
13. A. I. Zadorin, *Finite-Difference Schemes for Nonlinear Differential Equations with a Small Parameter in Bounded and Unbounded Domains*, Doctoral Thesis in Physics and Mathematics (Inst. Comput. Math. Math. Geophys., Novosibirsk, 2000).
14. V. D. Liseikin, *Grid Generation Methods* (Springer, Cham, 2017). doi 10.1007/978-3-319-57846-0.
15. N. V. Kopteva, *A Posteriori and a Priori Estimates of Finite Element Solutions of Some Singularly Perturbed Equations on Anisotropic Meshes.* Doctoral Thesis in Physics and Mathematics (University of Limerik, Ireland, 2018). https://www.keldysh.ru/council/3/D00202403/kopteva_diss.pdf. Cited May 17, 2025.
16. M. V. Alekseev, “Numerical Algorithms for Solving Two-Phase Flows Based on Relaxation Baer–Nunziato Model,” Numerical Methods and Programming. **24** (2), 182–194 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r214.
17. V. N. Snytnikov, E. E. Peskova, and O. P. Stoyanovskaya, “Mathematical Model of a Two-Temperature Medium of Gas–Solid Nanoparticles with Laser Methane Pyrolysis,” Mat. Model. **35** (4), 24–50 (2023) [Math. Models Comput. Simul. **15** (5), 877–893 (2023)]. doi 10.1134/S2070048223050095.
18. V. Akimkin, E. Vorobyov, Y. Pavlyuchenkov, and O. Stoyanovskaya, “Gravitoviscous Protoplanetary Discs with a Dust Component — IV. Disc Outer Edges, Spectral Indices, and Opacity Gaps,” Mon. Not. R. Astron. Soc. **499** (4), 5578–5597 (2020). doi 10.1093/mnras/staa3134.
19. E. I. Vorobyov, V. G. Elbakyan, A. Johansen, et al., “Formation of Pebbles in (Gravito-)Viscous Protoplanetary Disks with Various Turbulent Strengths,” Astron. Astrophys. **670**. Article Number A81 (2023). doi 10.1051/0004-6361/202244500.

20. S. S. Khrapov, "Nonlinear Dynamics of Acoustic Instability in a Vibrationally Excited Gas: Influence of Relaxation Time and Structure of Shock Waves," Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics. **25** (7) (2024). http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-7/articles/1151. Cited May 17, 2025.
21. A. G. Petrova, "Asymptotic Analysis of Viscoelastic Fluid Models with Two Small Relaxation Parameters," Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **65**, No. 5, 157–168 (2024) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **65** (5), 933–943 (2024)]. doi 10.1134/S0021894424050146.
22. T.-P. Liu, "Hyperbolic Conservation Laws with Relaxation," Commun. Math. Phys. **108**, 153–175 (1987). doi 10.1007/BF01210707.
23. F. E. Marble, "Dynamics of Dusty Gases," Annu. Rev. Fluid Mech. **2**, 397–446 (1970). doi 10.1146/annurev.fl.02.010170.002145.
24. D. V. Sadin, "A Method for Computing Heterogeneous Wave Flows with Intense Phase Interaction," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **38**, N 6, 1033–1039 (1998) [Comput. Math. Math. Phys. **38** (6), 987–993 (1998)].
25. S. Jin, "Asymptotic Preserving (AP) Schemes for Multiscale Kinetic and Hyperbolic Equations: A Review," in *Lecture Notes for Summer School on Methods and Models of Kinetic Theory (M&MKT)*, Porto Ercole (Grosseto, Italy). 2010. 177–216.
26. P. Degond and F. Deluzet, "Asymptotic-Preserving Methods and Multiscale Models for Plasma Physics," J. Comput. Phys. **336**, 429–457 (2017). doi 10.1016/j.jcp.2017.02.009.
27. G. Laibe and D. J. Price, "Dusty Gas with Smoothed Particle Hydrodynamics — I. Algorithm and Test Suite," Mon. Not. R. Astron. Soc. **420** (3), 2345–2364 (2012). doi 10.1111/j.1365-2966.2011.20202.x.
28. J. J. Monaghan, "Smoothed Particle Hydrodynamics," Rep. Prog. Phys. **68** (8), 1703–1759 (2005). doi 10.1088/0034-4885/68/8/R01.
29. T. Demidova, T. Savvateeva, S. Anoshin, et al., "Implementation of Dusty Gas Model Based on Fast and Implicit Particle-Mesh Approach SPH-IDIC in Open-Source Astrophysical Code GADGET-2," in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Cham, 2023), Vol. 14389, pp. 195–208. doi 10.1007/978-3-031-49435-2_14.
30. O. P. Stoyanovskaya, N. V. Snytnikov, and V. N. Snytnikov, "An Algorithm for Solving Transient Problems of Gravitational Gas Dynamics: A Combination of the SPH Method with a Grid Method of Gravitational Potential Computation," Numerical Methods and Programming. **16** (1), 52–60 (2015). doi 10.26089/NumMet.v16r106.
31. O. P. Stoyanovskaya, "Numerical Simulation of Gravitational Instability Development and Clump Formation in Massive Circumstellar Disks Using Integral Characteristics for the Interpretation of Results," Numerical Methods and Programming. **17** (3), 339–352 (2016). doi 10.26089/NumMet.v17r332.
32. V. Springel, "The Cosmological Simulation Code GADGET-2," Mon. Not. R. Astron. Soc. **364** (4), 1105–1134 (2005). doi 10.1111/j.1365-2966.2005.09655.x.
33. D. J. Price, J. Wurster, T. S. Tricco, et al., "Phantom: A Smoothed Particle Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics Code for Astrophysics," Publ. Astron. Soc. Aust. **35**, id.e031 (2018). doi 10.1017/pasa.2018.25.
34. C. Zhang, M. Rezavand, Y. Zhu, et al., "SPHinXsys: An Open-Source Multi-Physics and Multi-Resolution Library Based on Smoothed Particle Hydrodynamics," Comput. Phys. Commun. **267**, Article Number 108066 (2021). doi 10.1016/j.cpc.2021.108066.
35. J. Monaghan and A. Kocharyan, "SPH Simulation of Multi-Phase Flow," Comput. Phys. Commun. **87** (1–2), 225–235 (1995). doi 10.1016/0010-4655(94)00174-Z.
36. O. P. Stoyanovskaya, T. A. Glushko, N. V. Snytnikov, and V. N. Snytnikov, "Two-Fluid Dusty Gas in Smoothed Particle Hydrodynamics: Fast and Implicit Algorithm for Stiff Linear Drag," Astron. Comput. **25**, 25–37 (2018). doi 10.1016/j.ascom.2018.08.004.
37. O. Stoyanovskaya, M. Davydov, M. Arendarenko, et al., "Fast Method to Simulate Dynamics of Two-Phase Medium with Intense Interaction between Phases by Smoothed Particle Hydrodynamics: Gas-Dust Mixture with Polydisperse Particles, Linear Drag, One-Dimensional Tests," J. Comput. Phys. **430**, Article Number 110035 (2021). doi 10.1016/j.jcp.2020.110035.
38. J. P. Morris, "A Study of the Stability Properties of Smooth Particle Hydrodynamics," Publ. Astron. Soc. Aust. **13** (1), 97–102 (1996). doi 10.1017/S1323358000020610.
39. S.-H. Cha and A. P. Whitworth, "Implementations and Tests of Godunov-Type Particle Hydrodynamics," Mon. Not. R. Astron. Soc. **340** (1), 73–90 (2003). doi 10.1046/j.1365-8711.2003.06266.x.
40. W. Dehnen and H. Aly, "Improving Convergence in Smoothed Particle Hydrodynamics Simulations without Pairing Instability," Mon. Not. R. Astron. Soc. **425** (2), 1068–1082 (2012). doi 10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x.

41. O. P. Stoyanovskaya, V. V. Lisitsa, S. A. Anoshin, et al., “Dispersion Analysis of SPH as a Way to Understand Its Order of Approximation,” J. Comput. Appl. Math. **438**, Article Number 115495 (2024). doi 10.1016/j.cam.2023.115495.
42. T. V. Markelova, M. S. Arendarenko, E. A. Isaenko, and O. P. Stoyanovskaya, “Plane Sound Waves of Small Amplitude in a Gas-Dust Mixture with Polydisperse Particles,” Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **62**, No. 4. 158–168 (2021) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **62** (4), 663–672 (2021)]. doi 10.1134/S0021894421040167.
43. O. P. Stoyanovskaya, V. V. Grigoryev, T. A. Savvateeva, et al., “Multi-Fluid Dynamical Model of Isothermal Gas and Buoyant Dispersed Particles: Monodisperse Mixture, Reference Solution of DustyWave Problem as Test for CFD-Solvers, Effective Sound Speed for High and Low Mutual Drag,” Int. J. Multiph. Flow **149**, Article Number 103935 (2022). doi 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103935.
44. T. V. Markelova and O. P. Stoyanovskaya, “Plane Sound Waves in a Macroscopic Model of a Two-Velocity Two-Temperature Gas-Dust Mixture,” J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2025 (in press).
45. O. P. Stoyanovskaya, G. D. Turova, and N. M. Yudina, “Dispersion and Group Analysis of Dusty Burgers Equations,” Lobachevskii J. Math. **45** (1), 108–118 (2024). doi 10.1134/s1995080224010505.
46. O. P. Stoyanovskaya, O. A. Burmistrova, M. S. Arendarenko, and T. V. Markelova, “Dispersion Analysis of SPH for Parabolic Equations: High-Order Kernels against Tensile Instability,” J. Comput. Appl. Math. **457**, Article Number 116316 (2025). doi 10.1016/j.cam.2024.116316.
47. R. Fatehi and M. T. Manzari, “Error Estimation in Smoothed Particle Hydrodynamics and a New Scheme for Second Derivatives,” Comput. Math. Appl. **61** (2), 482–498 (2011). doi 10.1016/j.camwa.2010.11.028.
48. G. Laibe and D. J. Price, “Dusty Gas with Smoothed Particle Hydrodynamics — II. Implicit Timestepping and Astrophysical Drag Regimes,” Mon. Not. R. Astron. Soc. **420** (3), 2365–2376 (2012). doi 10.1111/j.1365-2966.2011.20201.x.
49. P. Lorén-Aguilar and M. R. Bate, “Two-Fluid Dust and Gas Mixtures in Smoothed Particle Hydrodynamics II: an Improved Semi-Implicit Approach,” Mon. Not. R. Astron. Soc. **454** (4), 4114–4119 (2015). doi 10.1093/mnras/stv2262.
50. R. A. Booth, D. Sijacki, and C. J. Clarke, “Smoothed Particle Hydrodynamics Simulations of Gas and Dust Mixtures,” Mon. Not. R. Astron. Soc. **452** (4), 3932–3947 (2015). doi 10.1093/mnras/stv1486.
51. M. Hutchison, D. J. Price, and G. Laibe, “MULTIGRAIN: a Smoothed Particle Hydrodynamic Algorithm for Multiple Small Dust Grains and Gas,” Mon. Not. R. Astron. Soc. **476** (2), 2186–2198 (2018). doi 10.1093/mnras/sty367.
52. D. J. Price and G. Laibe, “A Solution to the Overdamping Problem when Simulating Dust–Gas Mixtures with Smoothed Particle Hydrodynamics,” Mon. Not. R. Astron. Soc. **495** (4), 3929–3934 (2020). doi 10.1093/mnras/staa1366.
53. D. Elsender and M. R. Bate, “An Implicit Algorithm for Simulating the Dynamics of Small Dust Grains with Smoothed Particle Hydrodynamics,” Mon. Not. R. Astron. Soc. **529** (4), 4455–4467 (2024). doi 10.1093/mnras/stae722.
54. O. Burmistrova, T. Markelova, M. Arendarenko, and O. Stoyanovskaya, “A New Method for Approximating of First Derivatives in Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Practice for Linear Transport Equation,” Lobachevskii J. Math. **46**, 43–54 (2025). doi 10.1134/S1995080224608312.
55. M. Arendarenko, A. Dzhanbekova, S. Kotov, et al., “SymDR: Symbol Computer Algebra Library for Generation of Classical and Approximate Dispersion Relations for Systems of Partial Differential Equations,” Lobachevskii J. Math. **46**, 1–12 (2025). doi 10.1134/S1995080224608579.

Received
April 7, 2025

Accepted for publication
May 16, 2025

Information about the author

Olga P. Stoyanovskaya — Ph.D., Senior Scientist; Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Ave. Academician Lavrentiev, 15, 630090, Novosibirsk, Russia.