2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

doi 10.26089/NumMet.v26r212 УДК 519.622

Приближенное интегрирование задачи Коши для канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом рядов Чебышева с контролем точности

С. Ф. Залеткин
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский вычислительный центр,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0009-0006-1593-2339, e-mail: v.zaletkin@yandex.ru

Аннотация: Рассматривается приближенный метод решения задачи Коши для канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, основанный на применении смещенных рядов Чебышева и квадратурной формулы Маркова. Приведены способы оценки погрешности приближенного решения и его производной, выраженных в виде частичных сумм смещенных рядов Чебышева некоторого порядка. Погрешность оценивается с помощью второго приближенного решения, вычисленного специальным образом и представленного частичной суммой ряда более высокого порядка. На основе предложенных способов оценки погрешности построен алгоритм автоматического разбиения промежутка интегрирования на элементарные сегменты, что делает возможным вычисление приближенного решения и его производной с наперед заданной точностью.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, приближенные аналитические методы, численные методы, ортогональные разложения, смещенные ряды Чебышева, квадратурные формулы Маркова, полиномиальная аппроксимация, контроль точности, оценка погрешности, автоматическое управление длиной шага.

Благодарности: Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ на проведение НИР по теме “Исследование и разработка методов, алгоритмов и программного обеспечения в области вычислительной математики” (государственное задание на проведение НИР № АААА–А21–121011990147–4).

Для цитирования: Залеткин С.Ф. Приближенное интегрирование задачи Коши для канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом рядов Чебышева с контролем точности // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 2. 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212.

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

Approximate integration of the Cauchy problem for canonical systems of second order ordinary differential equations by the Chebyshev series method with precision control

Sergei F. Zaletkin
Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Moscow, Russia
ORCID: 0009-0006-1593-2339, e-mail: v.zaletkin@yandex.ru

Abstract: An approximate method of solving the Cauchy problem for canonical systems of second order ordinary differential equations is considered. The method is based on using the shifted Chebyshev series and a Markov quadrature formula. Some approaches are given to estimate the errors of an approximate solution and its derivative expressed by partial sums of a certain order shifted Chebyshev series. The errors are estimated using the second approximation of the solution calculated in a special way and expressed by a partial sum of a higher order series. An algorithm of partitioning the integration interval into elementary subintervals to ensure the computation of the solution and its derivative with prescribed accuracy is discussed on the basis of proposed approaches to error estimation.

Keywords: ordinary differential equations, approximate analytical methods, numerical methods, orthogonal expansions, shifted Chebyshev series, Markov quadrature formulas, polynomial approximation, precision control, error estimate, automatic step size control.

Acknowledgements: The work was fulfilled on the subject “Study and development of methods, algorithms and software in the field of numerical mathematics” (state assignment No. AAAA–A21–121011990147–4).

For citation: S. F. Zaletkin, “Approximate integration of the Cauchy problem for canonical systems of second order ordinary differential equations by the Chebyshev series method with precision control,” Numerical Methods and Programming. **26** (2), 160–174 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r212.

---

1. Введение. Рассматривается задача Коши для канонической системы M нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с правой частью, зависящей от производной,

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X = x_f. \tag{1}$$

Предполагается, что функция $f(x, y, y')$ имеет в области определения системы непрерывные ограниченные частные производные по переменным x, y, y', а сама задача (1) имеет на отрезке $[x_0,\, x_f]$ единственное решение $y(x)$. Тогда это решение $y(x) = y(x_0 + \alpha X)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и его производные

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(x_0 + \alpha X), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ y''(x) &= y''(x_0 + \alpha X) = f\big(x_0 + \alpha X, y(x_0 + \alpha X), y'(x_0 + \alpha X)\big) = \Phi(\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \end{aligned}$$

разлагаются на промежутке интегрирования $[x_0,\, x_f]$ в равномерно сходящиеся ряды по смещенным многочленам Чебышева первого рода:

$$y(x_0 + \alpha X) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad a_i^*[y] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{y(x_0 + \alpha X) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha, \tag{2}$$

$$y'(x_0 + \alpha X) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[y'] T_i^*(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad a_i^*[y'] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{y'(x_0 + \alpha X) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha, \tag{3}$$

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

$$\Phi(\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[\Phi]T_i^*(\alpha), \qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1, \qquad a_i^*[\Phi]=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\Phi(\alpha)T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,d\alpha. \tag{4}$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем 1/2, $T_i^*(\alpha)$ — смещенный многочлен Чебышева первого рода на $[0,1]$: $T_i^*(\alpha)=T_i(2\alpha-1)$, $T_i(t)$ — многочлен Чебышева первого рода на $[-1,1]$.

Если ряды (2)–(4) быстро сходятся на всем промежутке интегрирования $[x_0,\,x_f]$, то с такими рядами удобно иметь дело на практике для фактического вычисления их сумм, непосредственно заменяя бесконечные суммы частичными суммами некоторого порядка и принимая последние в качестве приближенного аналитического представления решения задачи (1) и его производных. В противном случае, т.е. когда сходимость этих рядов на всем промежутке интегрирования медленная, попытка получить аналитическое решение задачи в виде одной частичной суммы на всем отрезке $[x_0,\,x_f]$ может привести в затруднительное положение. В этом случае разумно поступить следующим образом. Следует разбить промежуток интегрирования $[x_0,\,x_f]$ на элементарные (частичные) сегменты $[x_s,\,x_s+h]$, $s=0,1,\ldots$, $0<h\leqslant X$, так, чтобы на каждом таком элементарном сегменте соответствующие ряды Чебышева (2)–(4) быстро сходились. Чем меньше длина h элементарного сегмента, тем быстрее стремится к нулю на этом сегменте остаточный член r_k ряда Чебышева при $k\to\infty$.

В [1–5] нами предложен, подробно описан и наглядно проиллюстрирован на различных примерах приближенный метод решения задачи Коши (1) с помощью данных рядов Чебышева. Суть метода заключается в следующем.

1) Ряды Чебышева для $f(x,y(x),y'(x))$, $y'(x)$ и $y(x)$ на элементарных сегментах замещаются их частичными суммами k-го, $(k+1)$-го и $(k+2)$-го порядков соответственно:

$$\Phi(\alpha)=f\big(x_s+\alpha h,y(x_s+\alpha h),y'(x_s+\alpha h)\big)\approx\sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[\Phi]T_i^*(\alpha),$$
$$y'(x_s+\alpha h)\approx\sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y']T_i^*(\alpha), \quad y(x_s+\alpha h)\approx\sum_{i=0}^{k+2}{}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha). \tag{5}$$

2) Для вычисления коэффициентов Чебышева $a_i^*[\Phi]$ правой части $\Phi(\alpha)$, представленных интегралом в (4), привлекается формула численного интегрирования Маркова [6, 7].

3) Используется связь между коэффициентами Чебышева решения $a_i^*[y]$ и коэффициентами Чебышева правой части системы $a_i^*[\Phi]$:

$$a_i^*\left[y(x_0+\alpha h)\right]=\frac{h^2}{16}\,\frac{(i+1)a_{i-2}^*[\Phi]-2ia_i^*[\Phi]+(i-1)a_{i+2}^*[\Phi]}{i(i^2-1)}, \quad i>2,$$

$$a_2^*\left[y(x_0+\alpha h)\right]=\frac{h^2}{96}\big(3a_0^*[\Phi]-4a_2^*[\Phi]+a_4^*[\Phi]\big),$$

$$a_1^*\left[y(x_0+\alpha h)\right]=\frac{h}{2}\left[y_0'+\frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi]-\frac{3}{4}\,a_1^*[\Phi]+\frac{1}{4}a_3^*[\Phi]\right)+\frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j-1}\right)a_j^*[\Phi]\right],$$

$$\frac{1}{2}\,a_0^*\left[y(x_0+\alpha h)\right]=y_0+\frac{h}{2}\,y_0'+\frac{h^2}{32}\,\left(3a_0^*[\Phi]-2a_1^*[\Phi]+a_2^*[\Phi]\right)+$$
$$+\frac{h^2}{8}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j-1}\right)a_j^*[\Phi]-\frac{h^2}{16}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+2}-\frac{1}{j}\right)\frac{a_j^*[\Phi]-a_{j+2}^*[\Phi]}{j+1}.$$

4) Используется связь между коэффициентами Чебышева первой производной решения $a_i^*[y']$ и коэффициентами Чебышева его второй производной $a_i^*[\Phi]$:

$$a_i^*\left[y'(x_0+\alpha h)\right]=\frac{h}{4i}\big(a_{i-1}^*[\Phi]-a_{i+1}^*[\Phi]\big), \quad i>0,$$

$$\frac{1}{2}\,a_0^*\left[y'(x_0+\alpha h)\right]=y_0'+\frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi]-\frac{1}{2}\,a_1^*[\Phi]\right)+\frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j-1}\right)a_j^*[\Phi].$$

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

5) Указанные частичные суммы (5) для $y(x)$ и $y'(x)$ подставляются в качестве аргументов функции $\Phi(\alpha) = f\left(x_s + \alpha h, y(x_s + \alpha h), y'(x_s + \alpha h)\right)$ в квадратурную формулу Маркова, которая, как только что было отмечено, используется для вычисления интегралов, представляющих коэффициенты Чебышева функции $\Phi(\alpha)$ на каждом элементарном сегменте.

В результате появляется система конечных уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышева $\Phi(\alpha)$. В левых частях этих уравнений стоят приближенные значения коэффициентов, а правые части этих уравнений содержат классическую сумму в квадратурной формуле Маркова. В [4] доказана (методом неподвижных точек, или на основе принципа сжатых отображений) теорема, устанавливающая условия существования единственного решения этой системы уравнений и дающая конструктивный метод его нахождения. Данная система решается методом последовательных приближений. Вместе с решением этой системы определяются также приближенные коэффициенты Чебышева $a_i^*[y]$ решения и приближенные коэффициенты Чебышева $a_i^*[y']$ его производной. Описываемая процедура выполняется для каждого элементарного сегмента. В итоге определяется последовательность частичных сумм, представляющих на соответствующих сегментах решение задачи Коши (1) и его производную.

Частичные суммы рядов Чебышева для рассматриваемых функций $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ не только являются многочленами наилучшего среднеквадратичного приближения этих функций на элементарных сегментах, но и дают также для них хорошие равномерные приближения. Можно сказать, что в обсуждаемом методе интегрирование задачи Коши (1) осуществляется с помощью многочленов (5), близких к многочленам наилучшего равномерного приближения. В этом заключается существенное отличие нашего подхода от традиционных численных методов интегрирования дифференциальных уравнений, которые строятся с использованием степенных разложений на основе формулы Тейлора, применяемых при малых значениях шага интегрирования. Поэтому аппроксимация дифференциальных уравнений, основанная на частичных суммах рядов Чебышева, позволяет существенно повысить точность интегрирования по сравнению с разностными методами и при этом значительно увеличить длину элементарных сегментов.

В дополнение к сказанному выделим некоторые замечательные особенности данного подхода, отличающие его от других методов решения дифференциальных уравнений, связанных с многочленами Чебышева.

Рассматриваемый в статье подход отличается от распространенного способа построения многочленного приближения для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, известного как τ-метод, или метод Ланцоша [8, 9]. Независимо от того, используется ли τ-метод с каноническими полиномами (однозначно связанными с заданным дифференциальным уравнением и применяемыми для приближенного представления его решения) или в чебышевской форме, построение конечного степенного разложения, т.е. многочленного приближения, выполняется без практического вычисления каких-либо определенных интегралов. Однако стремление избежать вычисления интегралов (которыми определяются коэффициенты Чебышева) безусловно ведет к ограничению вида дифференциального уравнения, а именно: τ-метод непосредственно применим лишь к линейным дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых (в том числе и свободный член уравнения) являются полиномами относительно независимой переменной x. Если коэффициенты линейного дифференциального уравнения являются рациональными функциями от x, то такое уравнение можно записать без знаменателя, умножив его на общий знаменатель всех рациональных дробей — коэффициентов уравнения, и привести его к виду линейного уравнения с полиномиальными коэффициентами. Для более общих линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых не обязательно являются полиномами, существует обобщение τ-метода, называемое методом коллокации, или методом избранных точек [8].

Аналогичное ограничение на дифференциальное уравнение присуще и другим приближенным методам, которые основаны на вычислении коэффициентов Чебышева решения по линейным рекуррентным соотношениям и которые позволяют получать аналитическое выражение решения обыкновенных дифференциальных уравнений в виде линейной суперпозиции многочленов Чебышева (методы Миллера, Олвера, Кленшоу) [10]. Эти методы также обобщены на такие линейные дифференциальные уравнения, в которых коэффициенты хотя и не являются полиномами, но, по предположению, должны иметь известные коэффициенты Чебышева.

Однако все эти методы непосредственно применимы только для линейных дифференциальных уравнений. В случае нелинейного дифференциального уравнения обязательно нужна линеаризация данного нелинейного уравнения. Она заключается в замене этого уравнения (например, общим методом Ньютона–

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

Канторовича) последовательностью рекуррентно составляемых линейных уравнений и последующем решении каждого линейного уравнения некоторым из таких методов.

Описанный же в данной статье подход значительно отличается от упомянутых здесь методов. По существу, он основан на использовании формулы численного интегрирования Маркова для вычисления коэффициентов Чебышева (4) правой части дифференциального уравнения. При этом он не накладывает никаких ограничений на вид дифференциального уравнения (1) и применяется в единообразной форме к решению как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому можно сказать, что в предлагаемом подходе расширена область применимости метода рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы оценить погрешности полученных в виде частичных сумм (5) приближенного решения $y(x)$ и его производной $y'(x)$ на одном элементарном сегменте длиной h и по этим оценкам погрешности выбрать такую длину h^* элементарного сегмента, при которой найденные на нем приближенное решение и его производная удовлетворяли бы наперед заданной точности.

В данной работе обобщается подход, разработанный ранее автором для решения аналогичной проблемы применительно к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений [11].

3. Оценка погрешности приближенного решения и его первой производной на одном элементарном сегменте. Рассмотрим способы оценки погрешности для первого элементарного сегмента $[x_0,\, x_0{+}h]$, где $h \leqslant X$. Пусть на этом сегменте приближенное решение $U_{k+2}(x) = U_{k+2}(x_0{+}\alpha h) \approx y(x_0{+}\alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, задачи Коши (1) представляется в виде $(k+2)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышева с приближенными коэффициентами при $k = k_1$

$$U_{k_1+2}(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{k_1+2}}{}' a_i^*[U_{k_1+2}] T_i^*(\alpha)$$

и имеет порядок точности $O(h^{k_1+3})$ относительно h при $h \to 0$, а его первая производная $U'_{k_1+2}(x) = U'_{k_1+2}(x_0+\alpha h) \approx y'(x_0+\alpha h)$ выражается в виде (k_1+1)-й частичной суммы

$$U'_{k_1+2}(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{k_1+1}}{}' a_i^*[U'_{k_1+2}] T_i^*(\alpha)$$

и имеет порядок точности $O(h^{k_1+2})$ относительно h при $h \to 0$. Допустим, что на этом же сегменте рассматривается еще одно приближенное решение, которое также представляется в виде $(k+2)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышева со своими приближенными коэффициентами при $k = k_2 > k_1$

$$U_{k_2+2}(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{k_2+2}}{}' a_i^*[U_{k_2+2}] T_i^*(\alpha)$$

и имеет порядок точности $O(h^{k_2+3})$ относительно h при $h \to 0$, а его первая производная выражается в виде (k_2+1)-й частичной суммы

$$U'_{k_2+2}(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{k_2+1}}{}' a_i^*[U'_{k_2+2}] T_i^*(\alpha)$$

и имеет порядок $O(h^{k_2+2})$. Таким образом, имеют место следующие равенства:

$$y(x_0+\alpha h) - U_{k_1+2}(x_0+\alpha h) = O(h^{k_1+3}), \tag{6}$$

$$y'(x_0+\alpha h) - U'_{k_1+2}(x_0+\alpha h) = O(h^{k_1+2}), \tag{7}$$

$$y(x_0+\alpha h) - U_{k_2+2}(x_0+\alpha h) = O(h^{k_2+3}),$$

$$y'(x_0+\alpha h) - U'_{k_2+2}(x_0+\alpha h) = O(h^{k_2+2}).$$

Заметим, что приведенные здесь асимптотические оценки получены в [1–5] и являются характеристическими свойствами используемого метода. Они дают погрешность приближенного решения и его производной

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

на одном элементарном сегменте в виде ее порядка относительно длины h элементарного сегмента, или *локальную погрешность решения* и *локальную погрешность производной*.

Из последних равенств следует, что погрешность приближенного решения $U_{k_1+2}(x)$ на элементарном сегменте $[x_0,\, x_0+h]$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} y(x_0+\alpha h) - U_{k_1+2}(x_0+\alpha h) &= U_{k_2+2}(x_0+\alpha h) - U_{k_1+2}(x_0+\alpha h) + O(h^{k_2+3}) = \\ &= \sum_{i=0}^{k_1+2}{}' \big(a_i^*[U_{k_2+2}] - a_i^*[U_{k_1+2}]\big) T_i^*(\alpha) + \sum_{i=k_1+3}^{k_2+2} a_i^*[U_{k_2+2}] T_i^*(\alpha) + O(h^{k_2+3}), \end{aligned}$$

а погрешность производной $U'_{k_1+2}(x)$ — в виде

$$\begin{aligned} y'(x_0+\alpha h) - U'_{k_1+2}(x_0+\alpha h) &= U'_{k_2+2}(x_0+\alpha h) - U'_{k_1+2}(x_0+\alpha h) + O(h^{k_2+2}) = \\ &= \sum_{i=0}^{k_1+1}{}' \big(a_i^*[U'_{k_2+2}] - a_i^*[U'_{k_1+2}]\big) T_i^*(\alpha) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^*[U'_{k_2+2}] T_i^*(\alpha) + O(h^{k_2+2}). \end{aligned}$$

Отбрасывая остаточные члены, получаем оценки погрешности на сегменте $[x_0,\, x_0+h]$:

$$y(x_0+\alpha h) - U_{k_1+2}(x_0+\alpha h) \approx \sum_{i=0}^{k_1+2}{}' \big(a_i^*[U_{k_2+2}] - a_i^*[U_{k_1+2}]\big) T_i^*(\alpha) + \sum_{i=k_1+3}^{k_2+2} a_i^*[U_{k_2+2}] T_i^*(\alpha), \tag{8}$$

$$y'(x_0+\alpha h) - U'_{k_1+2}(x_0+\alpha h) \approx \sum_{i=0}^{k_1+1}{}' \big(a_i^*[U'_{k_2+2}] - a_i^*[U'_{k_1+2}]\big) T_i^*(\alpha) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^*[U'_{k_2+2}] T_i^*(\alpha). \tag{9}$$

В частности, в конце элементарного сегмента, а именно в точке x_0+h, погрешности приближенного решения и его производной можно оценить следующими величинами:

$$\begin{aligned} y(x_0+h) - U_{k_1+2}(x_0+h) &\approx U_{k_2+2}(x_0+h) - U_{k_1+2}(x_0+h) = \\ &= \sum_{i=0}^{k_1+2}{}' \big(a_i^*[U_{k_2+2}] - a_i^*[U_{k_1+2}]\big) + \sum_{i=k_1+3}^{k_2+2} a_i^*[U_{k_2+2}], \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} y'(x_0+h) - U'_{k_1+2}(x_0+h) &\approx U'_{k_2+2}(x_0+h) - U'_{k_1+2}(x_0+h) = \\ &= \sum_{i=0}^{k_1+1}{}' \big(a_i^*[U'_{k_2+2}] - a_i^*[U'_{k_1+2}]\big) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^*[U'_{k_2+2}]. \end{aligned} \tag{11}$$

Из (8) следует еще одна оценка погрешности для l-й компоненты приближенного решения $U_{k_1+2}(x)$ на сегменте $[x_0, x_0+h]$:

$$\left|y^l(x_0+\alpha h) - U^l_{k_1+2}(x_0+\alpha h)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k_1+2}{}' \left|a_i^{*l}[U_{k_2+2}] - a_i^{*l}[U_{k_1+2}]\right| + \sum_{i=k_1+3}^{k_2+2} \left|a_i^{*l}[U_{k_2+2}]\right|. \tag{12}$$

Из (9) вытекает аналогичная оценка погрешности для l-й компоненты производной решения $U'_{k_1+2}(x)$ на сегменте $[x_0, x_0+h]$:

$$\left|y'^l(x_0+\alpha h) - U'^l_{k_1+2}(x_0+\alpha h)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k_1+1}{}' \left|a_i^{*l}[U'_{k_2+2}] - a_i^{*l}[U'_{k_1+2}]\right| + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} \left|a_i^{*l}[U'_{k_2+2}]\right|. \tag{13}$$

Приведенные здесь оценки (10)–(13) являются *апостериорными* оценками локальной погрешности метода, причем оценки (10), (11) асимптотические, а оценки (12), (13) несколько завышены. Они могут быть практически использованы для автоматического разбиения промежутка интегрирования в задаче Коши (1) на элементарные сегменты.

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

Сделаем некоторые пояснения относительно порядка величин, фигурирующих в полученных оценках. Цитируемые здесь выражения для этих величин в виде их порядков также непосредственно следуют из свойств данного метода.

Эти пояснения призваны напомнить еще раз, что мы фактически имеем дело не с точными коэффициентами Чебышева, а с их приближенными значениями. И вот почему. Поскольку правая часть дифференциального уравнения (1) аппроксимируется конечной (а именно, k-й частичной) суммой ряда Чебышева с приближенными коэффициентами, то из-за этого, во-первых, все вычисляемые через них коэффициенты Чебышева для решения и его производной будут приближенными и, во-вторых, помимо сказанного начальные коэффициенты Чебышева $\dfrac{1}{2}a_0^*[y]$, $a_1^*[y]$, $\dfrac{1}{2}a_0^*[y']$ практически вычисляются с помощью конечных (а не бесконечных) сумм, а коэффициенты со старшими номерами $a_{k+1}^*[y']$, $a_k^*[y']$, $a_{k+2}^*[y]$, $a_{k+1}^*[y]$, $a_k^*[y]$, $a_{k-1}^*[y]$ также определяются не по точным, а по усеченным формулам.

Рассмотрим сначала погрешность решения. Если только одна граничная точка элементарного сегмента $[x_0, x_0 + h]$, а именно начальная точка x_0, входит в число узлов применяемой на данном сегменте квадратурной формулы Маркова [6] для вычисления интеграла $a_I^*[\Phi]$ в (4), то разности коэффициентов $a_i^*[U_{k_2+2}]$ и $a_i^*[U_{k_1+2}]$, стоящие под знаком первой суммы в (8), (10), (12), имеют порядок $O(h^{k_1+3})$ для

$$i = 0,\ 1,\ k_1 - 2,\ k_1 - 1,\ k_1,\ k_1 + 1,\ k_1 + 2$$

и порядок $O(h^{k_1+4})$ при остальных i, т.е. при

$$i = 2,\ 3, \ldots,\ k_1 - 3.$$

Приведенные оценки верны, если $f(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные по x, y, y' до порядка $2k_2+1$ включительно. Если же обе граничные точки элементарного сегмента $[x_0, x_0+h]$, а именно точки x_0 и x_0+h, входят в множество узлов используемой на данном сегменте квадратурной формулы Маркова [7], то указанные разности коэффициентов $a_i^*[U_{k_2+2}]$ и $a_i^*[U_{k_1+2}]$ имеют порядок $O(h^{k_1+3})$ для

$$i = 0,\ 1,\ k_1 - 1,\ k_1 + 1$$

и порядок $O(h^{k_1+4})$ для всех остальных i, т.е. при

$$i = 2,\ 3, \ldots,\ k_1 - 2,\ k_1,\ k_1 + 2.$$

Независимо от того, входит или не входит граница $x_0 + h$ элементарного сегмента в число узлов применяемой формулы Маркова, вторая сумма в (8), (10), (12) имеет порядок не ниже $O(h^{k_1+3})$. Приведенные оценки верны, если $f(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные по x, y, y' до порядка $2k_2 + 2$ включительно.

Рассмотрим теперь погрешность производной. Если только одна граничная точка элементарного сегмента $[x_0, x_0 + h]$, а именно точка x_0, входит в число узлов квадратурной формулы, то разность коэффициентов $a_i^*[U'_{k_2+2}]$ и $a_i^*[U'_{k_1+2}]$, входящая в первую сумму в (9), (11), (13), имеет порядок $O(h^{k_1+2})$ при

$$i = 0,\ k_1 - 1,\ k_1,\ k_1 + 1$$

и порядок $O(h^{k_1+3})$ при остальных i, т.е. при

$$i = 1,\ 2, \ldots,\ k_1 - 2.$$

Если же обе граничные точки элементарного сегмента $[x_0, x_0+h]$ входят в множество узлов квадратурной формулы, то указанные разности коэффициентов имеют порядок $O(h^{k_1+3})$ при всех $0 < i \leqslant k_1 + 1$, кроме значения $i = k_1$, при котором разность имеет порядок $O(h^{k_1+2})$ (такой же, как и при $i = 0$). Независимо от того, входит или не входит граница $x_0 + h$ элементарного сегмента в число узлов формулы Маркова, вторая сумма в (9), (11), (13) имеет порядок не ниже $O(h^{k_1+2})$.

Тем самым мы подтвердили, что порядок апостериорных оценок (10)–(13), в которых фигурируют приближенные коэффициенты Чебышева, действительно равен порядку, представленному в правых частях равенств (6), (7).

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

4. Вычисление оценивающего решения U_{k_2+2} и его производной. Допустим, что в результате выполнения указанного во введении итерационного процесса (подробно изложенного в предшествующих работах [1–5]) на элементарном сегменте $[x_0,\ x_0{+}h]$ за k_1 итераций получены приближенное решение в виде частичной суммы $U_{k_1+2}(x_0+\alpha h)$, имеющее порядок точности $O(h^{k_1+3})$, и его производная $U'_{k_1+2}(x_0+\alpha h)$, имеющая порядок точности $O(h^{k_1+2})$. Рассмотрим теперь, как экономичней (с точки зрения числа итераций) построить на этом же сегменте второе приближенное решение $U_{k_2+2}(x_0+\alpha h)$ более высокого порядка точности $O(h^{k_2+3})$ и его производную $U'_{k_2+2}(x_0+\alpha h)$ порядка точности $O(h^{k_2+2})$, $k_2>k_1$, избегая повторения дополнительного итерационного процесса длиной k_2 итераций. Напомним, что коэффициенты Чебышева $a_i^*[U_{k+2}]$ приближенного решения $U_{k+2}(x)$ на элементарном сегменте $[x_0, x_0+h]$ определяются через коэффициенты Чебышева $a_i^*[\tilde{J}_k]$ его второй производной, а эти последние вычисляются с помощью квадратурной формулы Маркова с числом узлов $k+1$ или $k+2$ в зависимости от того, одна или две граничные точки элементарного сегмента являются узлами используемой квадратурной формулы Маркова. Например, в первом случае узлы квадратурной формулы есть:

$$x_0+\alpha_j h, \quad \alpha_0=0, \quad \alpha_j=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right), \quad j=1,\dots,k; \tag{14}$$

во втором случае узлами являются следующие точки:

$$x_0+\alpha_j^{(2)}h, \quad \alpha_0^{(2)}=0, \quad \alpha_j^{(2)}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{j\pi}{k+1}\right), \quad j=1,\dots,k, \quad \alpha_{k+1}^{(2)}=1.$$

При вычислении первого приближенного решения $U_{k_1+2}(x_0+\alpha_j h)$ значение k полагается равным k_1. Далее, не теряя общности, ограничимся только первым случаем.

Будем соблюдать следующую последовательность действий.

1) Вычисляем значения приближенного решения $U_{k_1+2}(x_0+\alpha h)$ и его производной в узлах (14) той же квадратурной формулы, что была использована при вычислении первого решения $U_{k_1+2}(x_0+\alpha h)$, но при $k=k_2$. Таких значений будет k_2+1 (с учетом значения $U_{k_2+2}(x_0)=U_{k_1+2}(x_0)$) и погрешность этих значений имеет порядок $O(h^{k_1+3})$ при $h\to 0$ для решения и порядок $O(h^{k_1+2})$ для производной.

2) Вычисляем значения правой части уравнений (1) в узлах (14) квадратурной формулы при $k=k_2$ с погрешностью $O(h^{k_1+2})$:

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j)=f\left(x_0+\alpha_j h,\ U_{k_1+2}(x_0+\alpha_j h),\ U'_{k_1+2}(x_0+\alpha_j h)\right), \quad j=0,1,\dots,k_2.$$

3) Вычисляем приближенные коэффициенты Чебышева $a_i^{*(0)}[\tilde{J}_{k_2}]$ правой части дифференциального уравнения (1) по квадратурной формуле Маркова с $k=k_2$:

$$a_i^{*(0)}[\tilde{J}_{k_2}]=\frac{4}{2k_2+1}{\sum_{j=0}^{k_2}}{}' f\left(x_0+\alpha_j h,\ U_{k_1+2}(x_0+\alpha_j h),\ U'_{k_1+2}(x_0+\alpha_j h)\right)T_i^*(\alpha_j), \quad i=0,1,\dots,k_2,$$

порядок точности которых есть

$$a_i^*[\Phi]-a_i^{*(0)}[\tilde{J}_{k_2}]=O(h^{k_1+2}).$$

Эти значения коэффициентов мы рассматриваем как <u>начальное (нулевое) приближение</u> коэффициентов Чебышева правой части, взятой на решении $U_{k_2+2}(x_0+\alpha h)$: $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_{k_2}]$ при $\nu=0$. Здесь $\tilde{J}_{k_2}(\alpha)$ — многочлен степени k_2, являющийся приближенным представлением производной $\Phi(\alpha)$:

$$\tilde{J}_{k_2}(\alpha)={\sum_{i=0}^{k_2}}{}' a_i^*[\tilde{J}_{k_2}]T_i^*(\alpha).$$

4) Используя связи между коэффициентами Чебышева функции $y(x)$ и коэффициентами Чебышева ее второй производной, по найденным значениям приближенных коэффициентов Чебышева правой части вычисляем ν-е приближение коэффициентов Чебышева $a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+2}]$, $i=0,1,\dots,k_2+2$, приближенного решения $U_{k_2+2}(x_0+\alpha h)$, где $U_{k_2+2}(x_0+\alpha h)$ — многочлен степени k_2+2:

$$U_{k_2+2}(x_0+\alpha h)={\sum_{i=0}^{k_2+2}}{}' a_i^*[U_{k_2+2}]T_i^*(\alpha).$$

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

Порядок точности этих коэффициентов есть

$$a_i^*[y] - a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+2}] = O(h^{k_1+4}) \quad \text{при } \nu = 0.$$

5) По найденным приближенным коэффициентам Чебышева $a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+2}]$ вычисляем ν-е приближение для значений решения $U_{k_2+2}(x_0 + \alpha_j h)$ в узлах (14) при $k = k_2$ по формулам

$$U_{k_2+2}^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h) = {\sum_{i=0}^{k_2+2}}{}' a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+2}] T_i^*(\alpha_j), \quad j = 0, 1, \ldots, k_2. \tag{15}$$

6) Используя связи между коэффициентами Чебышева функции и коэффициентами Чебышева ее производной, по найденным значениям приближенных коэффициентов Чебышева правой части системы (1) вычисляем ν-е приближение коэффициентов Чебышева $a_i^{*(\nu)}[U'_{k_2+2}]$, $i = 0, 1, \ldots, k_2+1$, производной $U'_{k_2+2}(x_0 + \alpha h)$, где $U'_{k_2+2}(x_0 + \alpha h)$ — многочлен степени $k_2 + 1$:

$$U'_{k_2+2}(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k_2+1}}{}' a_i^*[U'_{k_2+2}] T_i^*(\alpha).$$

Порядок точности этих коэффициентов есть

$$a_i^*[y'] - a_i^{*(\nu)}[U'_{k_2+2}] = O(h^{k_1+3}) \quad \text{при } \nu = 0.$$

7) По найденным приближенным коэффициентам Чебышева $a_i^{*(\nu)}[U'_{k_2+2}]$ вычисляем ν-е приближение для значений производной решения $U'_{k_2+2}(x_0 + \alpha_j h)$ в узлах (14) при $k = k_2$ по формулам

$$U_{k_2+2}^{\prime(\nu)}(x_0 + \alpha_j h) = {\sum_{i=0}^{k_2+1}}{}' a_i^{*(\nu)}[U'_{k_2+2}] T_i^*(\alpha_j), \quad j = 0, 1, \ldots, k_2. \tag{16}$$

8) Вычисляем значения правой части дифференциального уравнения (1)

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j) = f\left(x_0 + \alpha_j h,\ U_{k_2+2}^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h),\ U_{k_2+2}^{\prime(\nu)}(x_0 + \alpha_j h)\right), \quad j = 0, 1, \ldots, k_2. \tag{17}$$

9) Теперь по квадратурной формуле Маркова с узлами (14) находим следующее, $(\nu + 1)$-е, приближение для коэффициентов Чебышева правой части уравнения (1), а именно:

$$\begin{aligned} a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_{k_2}] &= \frac{4}{2k_2+1} {\sum_{j=0}^{k_2}}{}' \tilde{\Phi}(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j) = \\ &= \frac{4}{2k_2+1} {\sum_{j=0}^{k_2}}{}' f\left(x_0 + \alpha_j h, U_{k_2+2}^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h), U_{k_2+2}^{\prime(\nu)}(x_0 + \alpha_j h)\right) T_i^*(\alpha_j), \quad i = 0, 1, \ldots, k_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Дальнейшие приближения для коэффициентов Чебышева $a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+2}]$, $a_i^{*(\nu)}[U'_{k_2+2}]$, $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_{k_2}]$, $\nu = 1, 2, \ldots$, вычисляются по такой же схеме с повторением шагов 4–9 и использованием формул (15)–(18) для $\nu = 1, 2, \ldots$.

Данный итерационный процесс полностью аналогичен итерационному процессу, применяемому для построения решения $U_{k_1+2}(x_0 + \alpha h)$, и его сходимость вытекает из принципа сжатых отображений [4]. Для того чтобы погрешность приближенного решения $U_{k_2+2}(x_0 + \alpha h)$ имела порядок $O(h^{k_2+3})$ при $h \to 0$, необходимо выполнить в данном итерационном процессе не менее $k_2 - k_1$ итераций. Таким образом, для вычисления обоих решений $U_{k_1+2}(x_0 + \alpha h)$ и $U_{k_2+2}(x_0 + \alpha h)$ требуется всего k_2 итераций, что меньше суммарного числа итераций, которое понадобилось бы выполнить для определения обоих решений в том случае, когда решение $U_{k_2+2}(x_0 + \alpha h)$ вычисляется независимо от решения $U_{k_1+2}(x_0 + \alpha h)$.

Указанное число итераций носит асимптотический характер. На практике же количество итераций в каждом из двух итерационных процессов зависит от заданной точности, поэтому общее число итераций может быть как меньше, так и больше значения k_2.

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

5. Автоматическое разбиение промежутка интегрирования на элементарные сегменты. Имея в распоряжении способы (10)–(13) оценки погрешности приближенного решения и его производной на одном элементарном сегменте, величину элементарного (частичного) сегмента теперь можно выбирать автоматически в процессе счета. При этом можно исходить из того, чтобы на каждый элементарный сегмент $[x_s, x_s + h]$ приходилась приблизительно одинаковая погрешность для решения ε_y и примерно одинаковая погрешность для производной $\varepsilon_{y'}$.

Рассмотрим сначала контроль точности для приближенного решения. Обозначим величину погрешности для l-й компоненты приближенного решения $U^l_{k_1+2}$, определяемую по формуле (10) или (12), через E^l_y, $l = 1, \ldots, M$. Если для всех компонент решения, которые требуется проверять на точность, выполняется неравенство $|E^l_y| \leqslant \varepsilon_y$ (или $\|E_y\|_\infty \leqslant \varepsilon_y$), то считается, что полученная частичная сумма $U_{k_1+2}(x_0+\alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, удовлетворяет на элементарном сегменте $[x_0, x_0 + h]$ заданной точности ε_y и она принимается в качестве приближенного решения задачи Коши (1) на данном элементарном сегменте. Вместо коэффициентов $a^*_i[U_{k_1+2}]$, $i = 0, 1, \ldots, k_1 + 2$, можно взять коэффициенты $a^*_i[U_{k_2+2}]$, $i = 0, 1, \ldots, k_1 + 2$, частичной суммы $U_{k_2+2}(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, поскольку последние имеют более высокий порядок точности относительно h по сравнению с коэффициентами $a^*_i[U_{k_1+2}]$. Тогда в качестве приближенного решения на сегменте $[x_0, x_0 + h]$ берется сумма

$$S_{k_1+2}(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k_1+2}}{}' a^*_i[U_{k_2+2}]T^*_i(\alpha),$$

которая по-прежнему будет иметь тот же порядок точности $O(h^{k_1+3})$, что и $U_{k_1+2}(x_0 + \alpha h)$. За приближение решения в конце элементарного сегмента $[x_0, x_0 + h]$, т.е. в точке $x_1 = x_0 + h$, можно также взять значение этой суммы $S_{k_1+2}(x_0 + h)$ в точке x_1 либо значение $U_{k_2+2}(x_0 + h)$, как имеющее более высокий порядок точности $O(h^{k_2+3})$ по сравнению с приближенным решением $U_{k_1+2}(x_0 + h)$ или $S_{k_1+2}(x_0 + h)$. За максимальную длину элементарного сегмента, который можно использовать и выдерживать при этом заданную точность решения, можно принять

$$h_{\varepsilon_y} = \xi_y h, \quad \xi_y = \sqrt[k_1+3]{\frac{\varepsilon_y}{\|E_y\|_\infty}}. \tag{19}$$

Здесь $\xi_y \geqslant 1$ и длина следующего элементарного сегмента $[x_1, x_1 + h_{\varepsilon_y}]$ больше длины предыдущего сегмента $[x_0, x_0 + h]$.

Если оценка погрешности приближенного решения $U_{k_1+2}(x_0 + \alpha h)$ превосходит наперед заданную границу $\varepsilon_y : \|E_y\|_\infty > \varepsilon_y$, то считается, что на данном сегменте $[x_0, x_0 + h]$ приближенное решение $U_{k_1+2}(x_0 + \alpha h)$ не достигает требуемой точности. В этом случае выбирается новая длина элементарного сегмента $[x_0, x_0 + h_{\varepsilon_y}]$ по формулам (19). Теперь $\xi_y < 1$ и новая длина элементарного сегмента меньше предыдущей.

В действительности берется несколько меньшее, чем в (19), значение ξ_y, например $\xi^*_y = 0.9\xi_y$, и, соответственно, меньшая длина элементарного сегмента $h^*_{\varepsilon_y} = \xi^*_y h$. Это делается для того, чтобы устранить те элементарные сегменты, на которых, возможно, не будет достигаться требуемая точность приближенного решения.

Если по условию задачи производная решения на точность не проверяется, то описанный выше алгоритм полностью определяет разбиение промежутка интегрирования на элементарные сегменты в процессе интегрирования дифференциального уравнения (1).

Совершенно аналогично производится выбор элементарных сегментов в том случае, когда требуется соблюдать заданную точность $\varepsilon_{y'}$ для производной решения $y'(x)$. Длина элементарных сегментов определяется по сходным с (19) формулам

$$h_{\varepsilon_{y'}} = \xi_{y'} h, \quad \xi_{y'} = \sqrt[k_1+2]{\frac{\varepsilon_{y'}}{\|E_{y'}\|_\infty}}\,, \tag{20}$$

где $E_{y'}$ — погрешность производной приближенного решения U'_{k_1+2}, определяемая по (11) или (13).

Как видно, процедура автоматического разбиения промежутка интегрирования на элементарные сегменты, по существу, проводит классический принцип автоматического управления длиной шага при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений, который достаточно полно изложен в п. 1.1.10 в [12] и в разделе II. 4 в [13].

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

Если необходимо соблюдать заданную точность одновременно для приближенного решения $y(x)$ и его производной $y'(x)$, то за максимальную длину элементарного сегмента можно принять

$$h_\varepsilon = \min(\xi_y, \xi_{y'})h \quad \text{или} \quad h^*_\varepsilon = 0.9\min(\xi_y, \xi_{y'})h,$$

где ξ_y и $\xi_{y'}$ определяются по формулам (19), (20). При таком выборе выполняется либо повторное интегрирование уравнения (1) на сокращенном элементарном сегменте $[x_0, x_0+h^*_\varepsilon]$ в том случае, если заданная точность решения или его производной не была достигнута, либо продолжается дальнейшее интегрирования уравнения (1) из точки $x_1 = x_0 + h$ на следующем элементарном сегменте $[x_1, x_1 + h^*_\varepsilon]$, когда на предыдущем элементарном сегменте решение и его производная были вычислены с заданной точностью.

Для того чтобы не допустить излишнего возрастания погрешности приближенных решений U_{k_1+2}, U_{k_2+2} и их производных U'_{k_1+2}, U'_{k_2+2} из-за чрезмерного увеличения длины элементарных сегментов, можно наложить ограничение сверху на размер выбираемых сегментов. Это позволит повысить степень достоверности приведенных выше оценок и надежность получаемых с их помощью численных результатов.

Важно упомянуть еще раз, что оценка погрешности решения E_y (и производной $E_{y'}$) относится к менее точному приближению U_{k_1+2} (и его производной U'_{k_1+2}) и что погрешность уточненного решения (и производной уточненного решения) нам неизвестна, хотя интуитивно мы предполагаем, что она меньше погрешности уточняемого решения U_{k_1+2}.

6. Пример. Для демонстрации работы метода мы выбрали пример из нелинейной теории колебаний. Рассмотрим колебания математического маятника как нелинейной колебательной системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами трения. Положение подвеса маятника, который мы полагаем невесомым жестким (недеформируемым) стержнем, в произвольный момент времени однозначно определяется углом θ отклонения стержня от вертикали (от нижнего положения равновесия). Свободные колебания такого маятника, совершаемые в определенной вертикальной плоскости, описываются нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка [14]

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0, \tag{21}$$

где $\omega^2 = g/l$, g — ускорение силы тяжести, l — длина подвеса. Зададим начальные условия. Отведем маятник на некоторый угол θ_0 (будем считать такое отклонение положительным: $\theta_0 > 0$) и отпустим без толчка. Это значит, что начальные условия включают положительное начальное отклонение и нулевую начальную скорость:

$$\theta(0) = \theta_0 > 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \tag{22}$$

Мы получили математическую задачу — задачу Коши, состоящую из нелинейного дифференциального уравнения (21) и начальных условий (22). Мы рассмотрим модель математического маятника, не ограничиваясь малыми углами отклонения, а для произвольных углов θ: $-\pi < \theta < \pi$.

Решение задачи (21), (22) не выражается в элементарных функциях. Зависимость от времени угла $\theta(t)$ между подвесом и вертикалью представляется следующим аналитическим выражением, которое содержит специальную функцию — одну из эллиптических функций Якоби, именно эллиптический синус. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный вид этого выражения:

$$\theta(t) = 2\arcsin\left(k \cdot \mathrm{sn}(K(k) - \omega t)\right).$$

Здесь $k = \sin\dfrac{\theta_0}{2}$, $K(k)$ — *полный эллиптический интеграл первого рода* [15]:

$$K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}},$$

для которого имеет место разложение в ряд Тейлора

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 m^3 + \ldots\right], \quad m = k^2, \quad |k| < 1; \tag{23}$$

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

функция *эллиптический синус* $u = \mathrm{sn}(x;k) = \mathrm{sn}\, x$ является обратной по отношению к *неполному эллиптическому интегралу первого рода* (в нормальной форме Якоби)

$$x = \int\limits_0^u \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}\,.$$

Итак, изучение колебания маятника сводится к изучению эллиптической функции sn. Эллиптический синус — двоякопериодическая функция. В нашем рассмотрении нас интересует вещественный период, а ее вещественный примитивный (наименьший) период равен $4K(k)$. Отсюда следует, что переменный угол отклонения подвеса от вертикали $\theta(t)$ — периодическая функция времени с периодом

$$T = \frac{4K(k)}{\omega}. \tag{24}$$

Формула (24) показывает зависимость периода колебаний нелинейного математического маятника от величины размаха колебаний, т.е. от амплитуды θ_0 (*неизохронность* собственных колебаний). Таким образом, период колебаний изменяется от $\dfrac{2\pi}{\omega}$ до бесконечности. Заметим, что ряд (23) при $m = 1$ $(\theta_0 = 180^\circ)$ является расходящимся по признаку Гаусса [16].

Пользуясь разложением (23), мы нашли периоды колебаний для нескольких амплитуд θ_0. Эти амплитуды и соответствующие им периоды при значении $\omega = 2\pi$ представлены в табл. 1.

Таблица 1. Амплитуды и соответствующие им периоды колебаний

Table 1. Amplitudes and corresponding to them periods of oscillations

Амплитуда θ_0 Amplitude θ_0	Период T, с Period T, s
60°	1.073182007149365
160°	2.007507401244127
174°	2.762072906582608
176°	3.019307585825581
178°	3.459971058574408
179°	3.901065160388399
179.4°	4.226224133826726
179.5°	4.342285787895221
179.6°	4.484336740673448

Проиллюстрируем работу и точностные характеристики метода рядов Чебышева при решении задачи Коши (21), (22) на промежутке $[0, x_f]$ длиной, равной периоду искомого решения $x_f = T$ при значении $\omega = 2\pi$. Решение вместе с производной в конце такого промежутка известны из начального условия, поэтому они могут быть использованы для определения истинной (фактической) погрешности приближенного решения и его производной, вычисленных с помощью рядов Чебышева. При этом в качестве приближенного решения и его производной в конце каждого элементарного сегмента (и в том числе в конце промежутка интегрирования x_f) принимаются соответственно значение второго приближенного, оценивающего, решения и значение производной оценивающего решения, поскольку они имеют более высокий порядок точности.

Задача Коши (21), (22) интегрировалась при значениях x_f, равных периодам, соответствующим амплитудам колебаний из табл. 1. Все вычисления проводились с 15–16 значащими цифрами.

Также применялись два способа выбора начального приближения в итерационном процессе вычисления приближенного решения $U_{k_1+2}(x_s+\alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, на каждом элементарном сегменте. Здесь имеется в виду выбор начального приближения для коэффициентов Чебышева (4) правой части дифференциального уравнения. С подробным описанием способов выбора начального приближения можно ознакомиться в [3].

Все данные, относящиеся к интегрированию задачи (21), (22), а именно: амплитуда θ_0 колебаний (начальное значение искомого решения); наперед заданная точность ε, с которой вычислялось решение; порядок k_1 частичной суммы ряда Чебышева, используемой для аппроксимации правой части дифференциального уравнения при вычислении решения $U_{k_1+2}(x_s + \alpha h)$; порядок k_2 частичной суммы, которой аппроксимировалась правая часть дифференциального уравнения при вычислении оценивающего решения $U_{k_2+2}(x_s + \alpha h)$; фактически полученная абсолютная погрешность $\Delta y = \Delta\theta$ приближенного решения и фактически полученная абсолютная погрешность $\Delta y' = \Delta\dot{\theta}$ производной приближенного решения в конце промежутка интегрирования x_f; способ выбора начального приближения I; способ оценки абсолютной погрешности приближенного решения ME (ME = 1, если используется асимптотическая оценка абсолютной погрешности (10), (11) и ME = 2, если используется завышенная оценка абсолютной погрешности (12), (13)); число элементарных сегментов N_h, на которые автоматически разбивался промежуток интегрирования $[0, x_f]$; число отклоненных элементарных сегментов N_r; количество N_f вычислений правой части уравнения, — все эти данные приведены в табл. 2.

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

Таблица 2. Точность интегрирования задачи (21), (22) методом рядов

Table 2. Accuracy of integration problem (21), (22) by series method

θ_0	ε	k_1	k_2	Δy	$\Delta y'$	I	ME	N_h	N_r	N_f
60°	0.5×10^{-8}	7	14	0.22×10^{-15}	0.20×10^{-13}	1	2	8	4	2360
160°	0.5×10^{-8}	6	14	0.88×10^{-15}	0.63×10^{-13}	2	2	19	6	4375
174°	0.5×10^{-10}	10	19	0.44×10^{-15}	-0.19×10^{-12}	1	1	14	6	6414
176°	0.5×10^{-10}	10	19	-0.22×10^{-14}	-0.29×10^{-12}	1	1	15	5	6795
178°	0.5×10^{-10}	10	19	0	-0.32×10^{-12}	2	1	16	7	7593
179°	0.5×10^{-10}	11	20	-0.11×10^{-13}	-0.20×10^{-12}	1	1	15	5	7275
179.4°	0.5×10^{-10}	11	19	-0.10×10^{-13}	-0.37×10^{-11}	2	1	16	8	8475
179.5°	0.5×10^{-10}	11	19	-0.11×10^{-13}	-0.36×10^{-11}	1	1	16	7	8618
179.6°	0.5×10^{-10}	11	19	0	-0.36×10^{-11}	2	1	17	9	9960

Заметим, что при интегрировании методом рядов был выбран такой режим работы вычислительной программы, при котором указанная точность ε относилась только к вычислению приближенного решения; производная решения на точность не проверялась.

Результаты из табл. 2 убедительно подтверждают, что метод рядов Чебышева с автоматическим разбиением промежутка интегрирования на элементарные сегменты вычисляет приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения и его производную со стабильно высокой точностью.

Задача Коши (21), (22) также решалась для тех же значений амплитуд θ_0 методом Штермера [13, 17, 18] пятого порядка типа предиктор-корректор, реализованным по схеме $P(EC)^tE$, $t = 1$ или 2, с автоматическим выбором шага интегрирования (здесь использованы стандартные обозначения: P означает однократное применение предсказывающей формулы, C — однократное применение исправляющей формулы, E — вычисление правой части уравнения). Интегрирование производилось при нескольких различных значениях наперед заданной точности приближенного решения; производная приближенного решения в методе Штермера на точность не проверялась. Среди всех полученных результатов мы отобрали те из них, которые оказались наилучшими по фактически достигнутой точности приближенного решения. В табл. 3 приводятся для каждой амплитуды θ_0 фактически полученные абсолютные погрешности приближенного решения Δy и его производной $\Delta y'$ в конце промежутка x_f с соответствующими значениями числа шагов N_h и количества вычислений правой части N_f.

Таблица 3. Точность интегрирования методом Штермера

Table 3. Accuracy of integration by Störmer method

θ_0	Δy	$\Delta y'$	N_h	N_f
60°	-0.22×10^{-15}	-0.28×10^{-11}	5134	13171
160°	-0.32×10^{-13}	-0.37×10^{-11}	8232	22733
174°	0.12×10^{-13}	-0.18×10^{-12}	10144	28322
176°	0.61×10^{-13}	0.53×10^{-12}	14301	40814
178°	-0.29×10^{-13}	0.94×10^{-12}	15432	44207
179°	-0.78×10^{-13}	-0.55×10^{-11}	36119	100240
179.4°	0.22×10^{-12}	0.21×10^{-10}	28411	73988
179.5°	-0.45×10^{-13}	-0.28×10^{-10}	62091	161688
179.6°	0.96×10^{-13}	-0.17×10^{-10}	43084	109940

Сравнивая эти результаты с данными из табл. 2, видим, что метод рядов Чебышева с контролем точности дает возможность получить на одной и той же разрядной сетке ЭВМ приближенное решение и его производную с бóльшей точностью и за существенно меньшее число шагов и количество вычислений правой части. Выигрыш по сравнению с методом Штермера весьма значительный.

В связи с нелинейностью данного осциллятора было бы весьма кстати сделать небольшое отступление и напомнить, что выдающийся американский ученый, прославленный физик Ричард Фейнман с целью дать наглядное представление о пользе и мощи численного анализа для определения движения приводит в своих знаменитых лекциях по физике (см. [19, вып. 1, гл. 9, § 5, § 6]) помимо иных задач о расчетах движений планет также численное решение (разностным методом) динамических уравнений колебаний гармонического осциллятора (грузика на пружинке).

7. Заключение. Подводя итоги наших исследований, мы приходим к следующему важному выводу. Такое замечательное качество метода рядов Чебышева с автоматическим разбиением области интегрирования на элементарные сегменты, как возможность интегрировать с высокой точностью обыкновенные

2025, **26** (2), 160–174. doi 10.26089/NumMet.v26r212

дифференциальные уравнения второго порядка, наглядно подтверждено на примере нелинейного уравнения из теории колебаний. Также продемонстрирована способность метода превосходить по точности распространенный разностный метод Штермера численного интегрирования дифференциальных уравнений, используя при этом значительно меньшее число элементарных сегментов и, как следствие, существенно сокращая количество вычислений правой части дифференциального уравнения.

Благодаря этому допускается использование метода рядов Чебышева в тех же областях, в которых находят применение традиционные численные методы, и, что особенно важно, метод рядов Чебышева представляется наиболее эффективным и перспективным в таких научных приложениях, где требуется высокая точность решения обыкновенных дифференциальных уравнений (например, в небесной механике, звездной динамике, эфемеридной астрономии, космической геодезии и др.).

Список литературы

1. *Залеткин С.Ф.* Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием ортогональных разложений // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 1. 69–85.
2. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О применении ортогональных разложений для приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2010. № 4. 40–43.
3. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Вычисление коэффициентов разложения решения задачи Коши в ряд по многочленам Чебышева // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2012. № 5. 24–30.
4. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* К теории вычисления ортогонального разложения решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**, № 2. 178–184.
5. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Об одной реализации метода рядов Чебышева для приближенного аналитического решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вычислительные методы и программирование. 2019. **20**, № 2. 97–103. doi 10.26089/NumMet.v20r210.
6. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* О применении формулы численного интегрирования Маркова в ортогональных разложениях // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2009. № 6. 18–22.
7. *Залеткин С.Ф.* Формула численного интегрирования Маркова с двумя фиксированными узлами и ее применение в ортогональных разложениях // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 3. 1–17.
8. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.
9. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972.
10. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.
11. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Об оценке погрешности приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, определенного с помощью рядов Чебышева // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**, № 3. 241–250. doi 10.26089/NumMet.v21r321.
12. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики. М.: Академия, 2013.
13. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
14. *Ершов Н.М.* Дифференциальные уравнения в прикладных задачах. М.: ДМК Пресс, 2021.
15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
16. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.
17. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
18. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990.
19. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 1–Т. 7. М.: АСТ-Пресс, 2019–2021.

Поступила в редакцию
2 марта 2025 г.

Принята к публикации
16 апреля 2025 г.

Информация об авторе

Сергей Федорович Залеткин — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 1, стр. 4, 119234, Москва, Российская Федерация.

References

1. S. F. Zaletkin, "Numerical Integration of Ordinary Differential Equations Using Orthogonal Expansions," Mat. Model. **22** (1), 69–85 (2010).
2. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Application of Orthogonal Expansions for Approximate Integration of Ordinary Differential Equations," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 4, 40–43 (2010) [Moscow Univ. Math. Bull. **65** (4), 172–175 (2010)]. doi 10.3103/S0027132210040078.
3. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Calculation of Expansion Coefficients of Series in Chebyshev Polynomials for a Solution to a Cauchy Problem," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No 5, 24–30 (2012) [Moscow Univ. Math. Bull. **67** (5–6), 211–216 (2012)]. doi 10.3103/S0027132212050051.
4. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "To the Orthogonal Expansion Theory of the Solution to the Cauchy Problem for Second-Order Ordinary Differential Equations," Numerical Methods and Programming **19** (2), 178–184 (2018).
5. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "An Implementation of the Chebyshev Series Method for the Approximate Analytical Solution of Second-Order Ordinary Differential Equations," Numerical Methods and Programming **20** (2), 97–103 (2019). doi 10.26089/NumMet.v20r210.
6. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "Application of Markov's Quadrature in Orthogonal Expansions," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 6, 18–22 (2009) [Moscow Univ. Math. Bull. **64** (6), 244–248 (2009)]. doi 10.3103/S0027132209060035.
7. S. F. Zaletkin, "Markov's Formula with Two Fixed Nodes for Numerical Integration and Its Application in Orthogonal Expansions," Numerical Methods and Programming **6** (3), 1–17 (2005).
8. C. Lanczos, *Applied Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1956; Fizmatgiz, Moscow, 1961).
9. R. W. Hamming, *Numerical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1962; Nauka, Moscow, 1972).
10. S. Paszkowski, *Numerical Applications of Chebyshev Polynomials and Series* (PWN, Warsaw, 1975; Nauka, Moscow, 1983).
11. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "An Error Estimate for an Approximate Solution to Ordinary Differential Equations Obtained Using the Chebyshev Series," Numerical Methods and Programming **21** (3), 241–250 (2020). doi 10.26089/NumMet.v21r321.
12. N. N. Kalitkin and P. V. Koryakin, *Numerical Methods* Vol. 2: *Methods of Mathematical Physics* (Akademiya, Moscow, 2013) [in Russian].
13. E. Hairer, S. P. Norsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems* (Springer, Berlin, 1987; Mir, Moscow, 1990).
14. N. M. Ershov, *Differential Equations in Applied Problems* (DMK Press, Moscow, 2021) [in Russian].
15. M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables* (Dover Publ., New York, 1970; Nauka, Moscow, 1979).
16. I. N. Bronshtein and K. A. Semendyaev, *Mathematical Handbook for Engineers and Students* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
17. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel'kov, *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].
18. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations in Fortran* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1990) [in Russian].
19. R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Volumes 1–3 (Addison-Wesley, Boston, 2005).

Received
March, 2025

Accepted for publication
April 16, 2025

Information about the author

Sergei F. Zaletkin — Ph. D., Senior Scientist; Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Leninskie Gory, 1, building 4, 119234, Moscow, Russia.