



## Спектральный предобуславливатель для решения уравнения Пуассона

**А. А. Манаев**

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,  
Новосибирск, Российская Федерация  
ORCID: 0009-0003-2948-3683, e-mail: [manaeff.leha@gmail.com](mailto:manaeff.leha@gmail.com)

**В. В. Лисица**

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,  
Новосибирск, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: [lisitsavv@yandex.ru](mailto:lisitsavv@yandex.ru)

**Аннотация:** В работе представлен подход к построению предобуславливателя для численного решения уравнения Пуассона для существенно неоднородной среды в приложении к задачам вычислительной физики горных пород. В качестве предобуславливателя используется оператор, обратный к дискретному оператору Лапласа, но для упрощенной — слоистой — модели среды. Для обращения оператора Лапласа в этом случае используется спектральное разложение по одному из пространственных направлений и метод прогонки для серии одномерных задач по второму направлению. Такой подход к построению предобуславливателя обеспечивает независимость числа итераций от размера решаемой задачи, что подтверждается серией численных экспериментов. Важной особенностью предложенного подхода является именно использование слоистых моделей среды для построения предобуславливателя, что увеличивает скорость сходимости метода сопряженных градиентов на 10–40% в сравнении с использованием предобуславливателя, основанного на обращении оператора Лапласа для однородной среды. При этом ускорение зависит от контраста коэффициентов исходной модели, с ростом контраста повышается и эффективность предложенного подхода.

**Ключевые слова:** уравнение Пуассона, метод сопряженных градиентов, спектральное разложение.

**Благодарности:** Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00352, <https://rscf.ru/project/25-21-00352/>.

**Для цитирования:** Манаев А.А., Лисица В.В. Спектральный предобуславливатель для решения уравнения Пуассона // Вычислительные методы и программирование. 2025. 26, № 2. 111–128. doi 10.26089/NumMet.v26r208.



## Spectral preconditioner for solving the Poisson equation

**Aleksei A. Manaev**

Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS,  
Novosibirsk, Russia

ORCID: 0009-0003-2948-3683, e-mail: [manaeff.leha@gmail.com](mailto:manaeff.leha@gmail.com)

**Vadim V. Lisitsa**

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,  
Novosibirsk, Russia

ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: [lisitsavv@yandex.ru](mailto:lisitsavv@yandex.ru)

**Abstract:** The paper presents an approach to constructing a preconditioner for numerically solving the Poisson equation for a substantially inhomogeneous medium in application to problems of computational rock physics. The preconditioner is an operator inverse to the discrete Laplace operator, but for a simplified, layered model of the medium. In this case, the Laplace operator is inverted using spectral decomposition in one of the spatial directions and a sweep method for a series of one-dimensional problems in the second direction. This approach to constructing a preconditioner ensures that the number of iterations does not depend on the size of the problem being solved, which is confirmed by a series of numerical experiments. An important feature of the proposed approach is the use of layered models of the medium to construct the preconditioner, which increases the convergence rate of the conjugate gradient method by 10–40% compared to using a preconditioner based on inverting the Laplace operator for a homogeneous medium. In this case, the acceleration depends on the contrast of the coefficients of the original model; with increasing contrast, the efficiency of the proposed approach also increases.

**Keywords:** Poisson equation, conjugate gradient method, spectral decomposition.

**Acknowledgements:** The work was supported by the Russian Science Foundation under the agreement No. 25-21-00352, <https://rscf.ru/project/25-21-00352/>.

**For citation:** A. A. Manaev, V. V. Lisitsa, “Spectral preconditioner for solving the Poisson equation,” *Numerical Methods and Programming*. 26 (2), 111–128 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r208.

**1. Введение.** Вычислительная физика горных пород — современное направление петрофизических исследований. В качестве моделей среды выступают микротомографические изображения породы, описывающие ее на масштабе пор. Численная оценка эффективных физических свойств пористых материалов является одним из основных разделов вычислительной физики горных пород. В частности, широкий интерес представляют оценки упругих параметров [1–5], абсолютной проницаемости [3, 6–8], коэффициентов диффузии [9, 10], коэффициента теплопроводности [11] и удельного электрического сопротивления [3, 12, 13].

Для получения численной оценки удельного сопротивления или электропроводности образца породы необходимо вычислить электрический потенциал при заданном изменении напряжения на противоположных сторонах образца, после чего электропроводность может быть оценена как отношение электрического тока к изменению напряжения. Наиболее сложной частью получения оценки является вычисление электрического потенциала, так как для его нахождения необходимо решить уравнение Пуассона в сильно неоднородной среде. В данном случае под сильно неоднородной подразумевается среда, в которой в соседних узлах расчетной сетки проводимость может отличаться на несколько порядков, при этом размер неоднородностей составляет несколько точек сетки.

Среди возможных способов вычисления электрического потенциала можно выделить методы Крыловского типа [14], применяемые для решения систем линейных алгебраических уравнений, полученных из аппроксимации дифференциальных уравнений конечными разностями [15, 16]. Однако у таких систем будет большое число обусловленности из-за того, что в сильно неоднородной среде электропроводность может варьироваться на несколько порядков. Кроме того, число обусловленности будет расти с увеличением



размера СЛАУ. В связи с этим для увеличения скорости сходимости итерационных методов целесообразно использовать подходящие предобуславливатели.

В качестве предобуславливателя для дискретного уравнения Пуассона часто используется неполная LU-факторизация [17] с малоранговыми аппроксимациями [18–21], а также многосеточные методы [22, 23]. Первый тип предобуславливателей требует хранения матриц, полученных из неполного LU-разложения исходной матрицы. Второй тип предобуславливателей требует решения серии задач на вложенных сетках. Стоит заметить, что укрупнение размера сетки приводит к изменению внутренней геометрии пористой среды, что существенно влияет на распределение потенциала. Поэтому решение задачи на грубой сетке может быть не ближе к точному решению, чем решение в однородной или слоистой среде.

В работе в качестве предобуславливателя предлагается использовать оператор Лапласа, соответствующий слоистой среде, а для его обращения используется прямой метод решения СЛАУ, основанный на спектральном разложении одномерных операторов. Проводимость слоистой среды рассчитывается путем осреднения проводимости исходной неоднородной среды по одному из направлений. Алгоритм является обобщением подходов, предложенных в работах [13, 24, 25].

## 2. Постановка задачи.

**2.1. Уравнение Пуассона для неоднородной среды.** Рассматривается уравнение Пуассона, заданное в области  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ :

$$\nabla \cdot (\sigma(x, y) \nabla \varphi(x, y)) = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma(x, y)$  — строго положительная ограниченная скалярная функция,  $\varphi(x, y)$  — скалярная функция.

На двух противоположных границах заданы условия Дирихле:

$$\varphi(x, y)|_{y=c} = \varphi_c, \quad \varphi(x, y)|_{y=d} = \varphi_d, \quad (2)$$

где  $\varphi_c$  и  $\varphi_d$  — постоянные величины.

На двух других границах заданы условия Неймана:

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}|_{x=a} = 0, \quad \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}|_{x=b} = 0. \quad (3)$$

Схематичное представление расчетной области приведено на рис. 1. Следует отметить, что в работе рассматривается конкретный набор граничных условий, наиболее важный с практической точки зрения, однако предлагаемый подход легко обобщается на случай других комбинаций граничных условий.

**2.2. Конечно-разностная аппроксимация.** Для построения конечно-разностной аппроксимации вводится сетка с шагами  $h_x = \frac{b-a}{N_x-1}$  и  $h_y = \frac{d-c}{N_y-1}$ , где  $N_x, N_y$  — количество точек сетки в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно. Узлы сетки определяются по правилу  $x_i = a + ih_x, y_j = c + jh_y$ , а ячейками сетки являются:

$$C_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$

где  $i = 0, 1, \dots, N_x - 1, j = 0, 1, \dots, N_y - 1$ .

Для аппроксимации уравнения Пуассона в неоднородной среде используется консервативная конечно-разностная схема [16] в предположении, что функции  $\varphi(x, y)$  и  $\sigma(x, y)$  являются постоянными внутри ячейки сетки, но могут иметь разрыв на гранях ячеек.

Тогда конечно-разностная аппроксимация уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x} (\tilde{\sigma}_{i+1/2,j} D_x(\varphi)_{i+1/2,j} - \tilde{\sigma}_{i-1/2,j} D_x(\varphi)_{i-1/2,j}) + \\ & + \frac{1}{h_y} (\tilde{\sigma}_{i,j+1/2} D_y(\varphi)_{i,j+1/2} - \tilde{\sigma}_{i,j-1/2} D_y(\varphi)_{i,j-1/2}) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

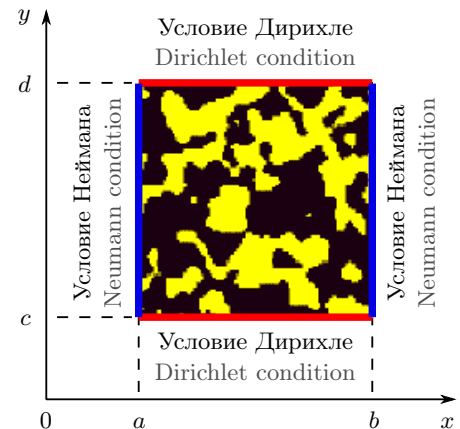


Рис. 1. Пример расчетной области с двухфазной средой

Fig. 1. Example of a computational domain with a two-phase medium

где операторы  $D_x$  и  $D_y$  определены как

$$D_x(\varphi)_{i+1/2,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_x}, \quad D_y(\varphi)_{i,j+1/2} = \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_y},$$

а значения  $\sigma(x, y)$  на границах ячеек аппроксимируются как

$$\tilde{\sigma}_{i+1/2,j} = \frac{2}{\frac{1}{\sigma_{i+1,j}} + \frac{1}{\sigma_{i,j}}}, \quad \tilde{\sigma}_{i,j+1/2} = \frac{2}{\frac{1}{\sigma_{i,j+1}} + \frac{1}{\sigma_{i,j}}}.$$

Аппроксимация условий Дирихле (2) и Неймана (3) имеет следующий вид:

$$\varphi_{i,0} = \varphi_c, \quad \varphi_{i,N_y-1} = \varphi_d, \\ \frac{\varphi_{0,j} - \varphi_{1,j}}{h_x} = 0, \quad \frac{\varphi_{N_x-1,j} - \varphi_{N_x-2,j}}{h_x} = 0,$$

где  $i = 0, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 2$ . Более подробное описание построения конечно-разностной аппроксимации (4) можно найти в [17, 26]. Расположение сетки относительно области  $\Omega$  и шаблон схемы (4) представлены на рис. 2.

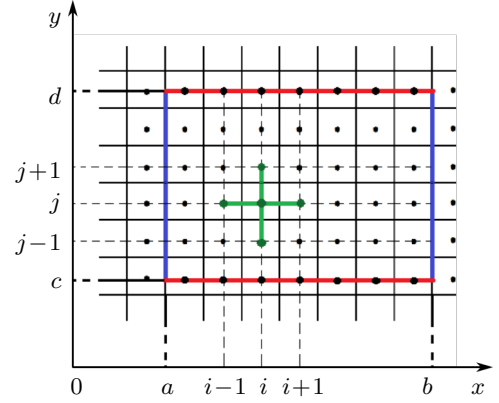


Рис. 2. Расчетная сетка  
 Fig. 2. Computational grid

**2.3. Матричное представление.** Для дальнейших рассуждений понадобится выписать матричное представление

$$A\varphi = \mathbf{f} \tag{5}$$

полученной СЛАУ. При этом уравнения записываются только для внутренних узлов сетки, а граничные узлы исключаются подстановкой граничных условий.

Векторы  $\varphi$  и  $\mathbf{f}$  из системы (5) имеют следующий вид:

$$\varphi = \left( \varphi_1^T \mid \varphi_2^T \mid \dots \mid \varphi_{N_y-3}^T \mid \varphi_{N_y-2}^T \right)^T, \quad \mathbf{f} = \left( \frac{1}{h_y^2} G_{1/2}^y \mathbf{f}_c^T \mid \mathbf{0}^T \mid \dots \mid \mathbf{0}^T \mid \frac{1}{h_y^2} G_{N_y-3/2}^y \mathbf{f}_d^T \right)^T,$$

где  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор длины  $N_x - 2$ ,

$$\varphi_j = \left( \varphi_{1,j}, \varphi_{2,j}, \dots, \varphi_{N_x-3,j}, \varphi_{N_x-2,j} \right), \quad \mathbf{f}_c = \left( \varphi_c, \varphi_c, \dots, \varphi_c, \varphi_c \right), \\ \mathbf{f}_d = \left( \varphi_d, \varphi_d, \dots, \varphi_d, \varphi_d \right)$$

— векторы длины  $N_x - 2$  ( $j = 1, \dots, N_y - 2$ ),  $G_j^y = \text{diag}(\tilde{\sigma}_{1,j}, \tilde{\sigma}_{2,j}, \dots, \tilde{\sigma}_{N_x-3,j}, \tilde{\sigma}_{N_x-2,j})$  — диагональная матрица размера  $(N_x - 2) \times (N_x - 2)$ .

Матрица системы (5) имеет следующий вид:

$$A = \frac{1}{h_y^2} \begin{pmatrix} G_{1/2}^y + G_{3/2}^y & -G_{3/2}^y & & & \\ -G_{3/2}^y & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -G_{N_y-5/2}^y & \\ & & & -G_{N_y-5/2}^y & G_{N_y-5/2}^y + G_{N_y-3/2}^y \end{pmatrix} + \frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} G_1^x & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & G_{N_y-2}^x \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$G_i^x = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{3/2,i} & -\tilde{\sigma}_{3/2,i} & & & \\ -\tilde{\sigma}_{3/2,i} & \tilde{\sigma}_{3/2,i} + \tilde{\sigma}_{5/2,i} & -\tilde{\sigma}_{5/2,i} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\tilde{\sigma}_{N_x-7/2,i} & \tilde{\sigma}_{N_x-7/2,i} + \tilde{\sigma}_{N_x-5/2,i} & -\tilde{\sigma}_{N_x-5/2,i} \\ & & & -\tilde{\sigma}_{N_x-5/2,i} & \tilde{\sigma}_{N_x-5/2,i} \end{pmatrix}$$

— трехдиагональная матрица размера  $(N_x - 2) \times (N_x - 2)$ .



Матрица (6) является самосопряженной и положительно определенной. Для решения СЛАУ, подобных (5), обычно используются итерационные методы крыловского типа [14], так, например, для метода сопряженных градиентов гарантирована теоретическая сходимость к решению системы (5). Однако сходимость может существенно замедлиться, так как матрица (6) имеет большое число обусловленности из-за близости спектра матрицы к нулю. К тому же на величину числа обусловленности существенно влияет отношение параметров фаз.

Обычно для построения предобуславливателей используются неполная LU-факторизация [17] с малоранговыми аппроксимациями [18, 19] или многосеточные методы [22, 23]. Стоит заметить, что при использовании LU-факторизации требуется дополнительная память для хранения сомножителей, полученных из факторизации исходной матрицы. В свою очередь, использование многосеточных методов предполагает решение задачи на грубой сетке, что может привести к существенным изменениям внутренней геометрии среды, например возникновению изолирующих слоев или проводящих каналов, которых не было на сетке с мелким шагом. Таким образом, нельзя гарантировать, что решение на грубой сетке будет ближе к точному решению, чем решение в однородной среде.

**3. Спектральный предобуславливатель.** В работе предлагается развить подход, описанный в [13, 25]. В качестве предобуславливателя рассматриваемой системы уравнений предлагается использовать оператор, обратный к оператору Лапласа, соответствующему более простой модели среды. В работе [13] в качестве такой модели рассматривалась однородная модель, т.е. при  $\sigma(x, y) = \text{const}$ .

Уравнение Пуассона для однородной среды можно эффективно решить спектральным методом [25, 27]. Для этого достаточно применить преобразование Фурье или синус-преобразование (в зависимости от граничных условий) по одному из пространственных направлений к уравнению Пуассона и получить серию одномерных задач:

$$\psi_{yy}(k, y) - k^2\psi(k, y) = \frac{g(k, y)}{\sigma}, \tag{7}$$

где  $k$  — пространственная частота,  $\psi$  и  $g$  — фурье-образы функций  $\varphi$  и  $f$  соответственно. Уравнения (7) можно решать независимо для каждой пространственной частоты  $k$ . Воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией, аналогичной (4), и решим каждую одномерную задачу прогонкой. После этого, применив обратное преобразование Фурье, получим решение исходного уравнения.

В работе предлагается использовать предобуславливатель, полученный из аппроксимации задачи (1)–(3) при  $\sigma(x, y) = \sigma(x)$  или  $\sigma(x, y) = \sigma(y)$ . Иначе говоря, на каждой итерации метода сопряженных градиентов необходимо решать уравнение Пуассона для слоистой среды с теми же граничными условиями (2), (3). Слоистая среда строится как некоторая аппроксимация исходной неоднородной среды. Для решения предобуславливающей системы предлагается использовать прямой метод решения СЛАУ, основанный на спектральном разложении одномерных операторов и идейно аналогичный спектральному методу.

**3.1. Решение уравнения Пуассона для слоистой среды.** Рассматривается уравнение Пуассона для слоистой среды в случае  $\sigma(x_i, y_j) = \sigma(y_j) = \sigma_j$ . Систему уравнений, полученную аппроксимацией этого уравнения, представим в виде

$$Mz = r, \tag{8}$$

где векторы  $z$  и  $r$  имеют нумерацию элементов, аналогичную нумерации векторов  $\varphi$  и  $f$  из раздела 2.3. В рассматриваемом случае матрица  $M$  имеет следующий вид:

$$M = \frac{1}{h_y^2} \left( \begin{array}{c|c|c|c} (\tilde{\sigma}_{1/2} + \tilde{\sigma}_{3/2})I & -\tilde{\sigma}_{3/2}I & & \\ \hline -\tilde{\sigma}_{3/2}I & \ddots & \ddots & \\ \hline & \ddots & \ddots & -\tilde{\sigma}_{N_y-5/2}I \\ \hline & & -\tilde{\sigma}_{N_y-5/2}I & (\tilde{\sigma}_{N_y-5/2} + \tilde{\sigma}_{N_y-3/2})I \end{array} \right) + \frac{1}{h_x^2} \left( \begin{array}{c|c|c} \sigma_1 P & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \sigma_{N_y-2} P \end{array} \right), \tag{9}$$

где  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$  — трехдиагональная матрица размера  $(N_x - 2) \times (N_x - 2)$ .

Матрица  $P$  является самосопряженной, поэтому ее спектральное разложение имеет вид

$$P = Q \Sigma Q^T,$$

где  $\Sigma$  — диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы  $P$ , а  $Q$  — ортогональная матрица, составленная из собственных векторов матрицы  $P$ .

Пусть  $\Theta = \begin{pmatrix} Q & & \\ & \ddots & \\ & & Q \end{pmatrix}$ ,  $\xi = \Theta^T z$ ,  $\eta = \Theta^T r$ .

Тогда, умножив систему (8) слева на  $\Theta^T$  и заменив  $z$  на  $\Theta \xi$ , получим эквивалентную систему

$$W \xi = \eta, \tag{10}$$

где

$$W = \frac{1}{h_y^2} \begin{pmatrix} (\tilde{\sigma}_{1/2} + \tilde{\sigma}_{3/2})I & -\tilde{\sigma}_{3/2}I & & \\ -\tilde{\sigma}_{3/2}I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\tilde{\sigma}_{N_y-5/2}I \\ & & -\tilde{\sigma}_{N_y-5/2}I & (\tilde{\sigma}_{N_y-5/2} + \tilde{\sigma}_{N_y-3/2})I \end{pmatrix} + \frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} \sigma_1 \Sigma & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{N_y-2} \Sigma \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица  $W$  является блочно-трехдиагональной матрицей с диагональными блоками, поэтому систему (10) можно представить как  $(N_x - 2)$  независимых СЛАУ

$$\frac{1}{h_y^2} \begin{pmatrix} (\tilde{\sigma}_{1/2} + \tilde{\sigma}_{3/2}) & -\tilde{\sigma}_{3/2} & & \\ -\tilde{\sigma}_{3/2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\tilde{\sigma}_{N_y-5/2} \\ & & -\tilde{\sigma}_{N_y-5/2} & (\tilde{\sigma}_{N_y-5/2} + \tilde{\sigma}_{N_y-3/2}) \end{pmatrix} \xi_i + \frac{1}{h_x^2} k_i \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{N_y-2} \end{pmatrix} \xi_i = \eta_i, \tag{11}$$

где  $i = 1, \dots, N_x - 2$ ,  $k_i$  — соответствующее собственное значение матрицы  $P$ ,

$$\xi_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots, \xi_{i,N_y-3}, \xi_{i,N_y-2})^T, \eta_i = (\eta_{i,1}, \eta_{i,2}, \dots, \eta_{i,N_y-3}, \eta_{i,N_y-2})^T.$$

Решив каждую СЛАУ (11) прогонкой и применив обратную замену  $z = \Theta \xi$ , получим решение преобуславливающей системы (8).

Метод решения СЛАУ в случае  $\sigma(x_i, y_j) = \sigma(x_i) = \sigma_i$  аналогичен представленному в этом разделе.



#### 4. Численные эксперименты.

**4.1. Верификация алгоритма.** Как отмечалось ранее, задачу (1)–(3) необходимо решать для получения численной оценки эффективной электрической проводимости. В связи с этим для верификации алгоритма была проведена серия расчетов эффективной электропроводности для моделей с простой внутренней геометрией, и результаты расчетов сравнивались с теоретическими оценками проводимости. Ниже показано получение численной оценки эффективной проводимости через электрический потенциал.

Используя потенциал  $\varphi(x, y)$ , полученный из решения задачи (1)–(3), можно найти электрический ток в направлении  $y$  следующим образом:

$$J_y = \int_a^b \sigma(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dx.$$

Также заметим, что ток  $J_y$  не зависит от пространственных координат [28].

В случае однородной среды с постоянной проводимостью  $\tilde{\sigma} = \text{const}$  задача (1)–(3) будет иметь решение:

$$\tilde{\varphi}(y) = \frac{y - c}{d - c} \varphi_d + \frac{y - d}{c - d} \varphi_c.$$

В данном случае сила тока удовлетворяет закону Ома [28]:

$$\tilde{J}_y = \int_a^b \tilde{\sigma} \frac{\partial \tilde{\varphi}(x, y)}{\partial y} dx = \tilde{\sigma} \frac{b - a}{d - c} (\varphi_d - \varphi_c).$$

Полагая, что заданная разность потенциалов вызывает одинаковый ток в неоднородной и эффективной однородной средах, т.е.  $J_y = \tilde{J}_y$ , можно определить проводимость эффективного материала:

$$\tilde{\sigma} = \frac{d - c}{(b - a)(\varphi_d - \varphi_c)} \int_a^b \sigma(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dx. \tag{12}$$

Для вычисления интеграла в формуле (12) можно использовать, например, одну из квадратурных формул [29, 30].

Первая серия расчетов была выполнена для квадратной слоистой среды (рис. 3) со слоями, параллельными направлению основного изменения потенциала.

Электропроводность “желтых” слоев  $\sigma_1$  составляла 10 См, электропроводность “черных” слоев  $\sigma_2$  составляла 1 См. Граничные условия Дирихле задавались так, чтобы разность потенциалов равнялась единице. Размер образца задавался как  $20 \cdot 2^n$  узлов по каждому направлению, где  $n = 0, \dots, 5$ . После вычисления потенциала эффективная проводимость оценивалась по формуле (12).

Данная модель эквивалентна электрическому контуру с параллельными резисторами, поэтому эффективная проводимость по закону Ома равна:

$$\sigma_{\text{par}} = \frac{h_1}{H} \sigma_1 + \frac{h_2}{H} \sigma_2,$$

где  $h_1, h_2, H$  – суммарная ширина слоев с  $\sigma_1$ , суммарная ширина слоев с  $\sigma_2$  и общая ширина образца соответственно. Для образца (рис. 3) отношения  $\frac{h_1}{H} = 0.6$  и  $\frac{h_2}{H} = 0.4$ .

Вторая серия расчетов была выполнена для квадратной слоистой среды (рис. 4) со слоями, перпендикулярными направлению основного изменения потенциала. Проводимость и ширина слоев, а также размер задачи и разность потенциалов были такими же, как в предыдущей модели.



Рис. 3. Первая слоистая среда  
 Fig. 3. The first layered medium



Рис. 4. Вторая слоистая среда  
 Fig. 4. The second layered medium



Таблица 1. Результаты расчетов на последовательности измельченных сеток для модели, эквивалентной параллельным резисторам

Table 1. The results of calculations on a sequence of crushed grids for a model equivalent to parallel resistors

Число узлов Number of nodes	Аналитическая оценка $\sigma_{\text{par}}$ Analytical estimation $\sigma_{\text{par}}$	Численная оценка $\tilde{\sigma}$ Numerical estimation $\tilde{\sigma}$	Ошибка Error
20 <sup>2</sup>	6.4	6.66667	0.26666
40 <sup>2</sup>	6.4	6.52991	0.12991
80 <sup>2</sup>	6.4	6.46414	0.06413
160 <sup>2</sup>	6.4	6.43187	0.03186
320 <sup>2</sup>	6.4	6.41588	0.01588
640 <sup>2</sup>	6.4	6.40793	0.00792

Таблица 2. Результаты расчетов на последовательности измельченных сеток для модели, эквивалентной последовательным резисторам

Table 2. The results of calculations on a sequence of crushed grids for a model equivalent to serial resistors

Число узлов Number of nodes	Аналитическая оценка $\sigma_{\text{ser}}$ Analytical estimation $\sigma_{\text{ser}}$	Численная оценка $\tilde{\sigma}$ Numerical estimation $\tilde{\sigma}$	Ошибка Error
20 <sup>2</sup>	2.17391	2.27642	0.10251
40 <sup>2</sup>	2.17391	2.22222	0.04830
80 <sup>2</sup>	2.17391	2.19739	0.02347
160 <sup>2</sup>	2.17391	2.18549	0.01157
320 <sup>2</sup>	2.17391	2.17966	0.00574
640 <sup>2</sup>	2.17391	2.17678	0.00286

Данная модель эквивалентна электрическому контуру с последовательными резисторами, поэтому для эффективной проводимости по закону Ома справедливо равенство:

$$\sigma_{\text{ser}}^{-1} = \frac{h_1}{H} \sigma_1^{-1} + \frac{h_2}{H} \sigma_2^{-1}.$$

Результаты численного моделирования представлены в табл. 1, 2. Стоит заметить, что при расчете потенциала для каждой модели использовались соответствующие “слоистые” предобуславливатели, поэтому метод сопряженных градиентов сходился за одну итерацию. Численные оценки проводимости сходились к теоретическим с первым порядком, что соответствует используемой конечно-разностной аппроксимации (4).

**4.2. Зависимость количества итераций от размера задачи и контраста среды.** Для исследования свойств предобуславливателей проводились численные эксперименты на синтетических моделях, построенных методом гауссовского распределения (рис. 5 а) и усеченного гауссовского распределения (рис. 5 б) с фиксированной длиной корреляции и пористостью [31], а также на моделях, полученных путем комбинирования моделей двух предыдущих типов (рис. 5 с). Первый тип моделей характерен для макромасштаба — размера полноразмерного керна (образца породы), второй тип моделей соответствует моделям порового пространства, третий тип — моделям порового пространства с неразрешенной пористостью. Все модели генерировались с размером 100 узлов по каждому направлению.

При генерации моделей первого типа варьировались длины корреляций от 1 до 13 точек модели в каждом направлении. Для каждой статистической модели первого типа (фиксированные длины корреляций) генерировались по 10 статистических реализаций среды. При генерации моделей второго типа варьировалась пористость в пределах от 30% до 50% с шагом 5%. Для каждой статистической модели второго типа (фиксированная пористость) также генерировались по 10 статистических реализаций. При генерации моделей третьего типа за основу брались модели второго типа и распределение в каждой фазе зависело от распределения в соответствующей области модели первого типа.

Расчеты проводились на последовательности измельченных сеток, размер сеток составлял  $2^n \cdot 100$  узлов по каждому направлению, где  $n = 0, 1, 2, 3$ . Для каждой пористой среды, построенной по стати-



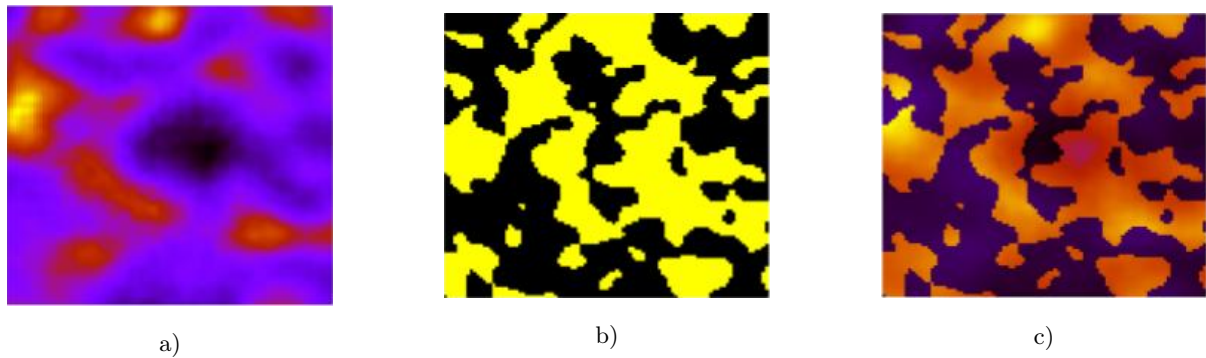


Рис. 5. Представители неоднородных сред, на которых проводились эксперименты  
 Fig. 5. Representatives of heterogeneous media on which experiments were conducted

стической реализации модели второго типа, проводимость “черной” фазы  $\sigma_1 = 1$  См, а проводимость “желтой” фазы  $\sigma_2 = 10^k$  См, где  $k = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \pm 3$ . Аналогичным образом строились среды по статистическим реализациям моделей первого и третьего типов. Значения из статистических реализаций непрерывно отображались на отрезок с границами  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , так, чтобы минимальное значение из статистической реализации отобразилось в  $\sigma_1$ , а максимальное — в  $\sigma_2$ .

В дальнейшем величину  $\lg(\sigma_2/\sigma_1)$  будем называть контрастом проводимости среды.

При всех численных экспериментах (включая эксперименты из следующего раздела)  $\varepsilon$ , используемое как пороговое значение относительной невязки для останова итерационного метода, выбиралось равным  $10^{-8}$ .

В данной серии численных экспериментов в качестве предобуславливателя была использована матрица, построенная конечно-разностной аппроксимацией уравнения Пуассона в однородной среде.

На рис. 6 графики с тонкими линиями соответствуют числу итераций в зависимости от контраста проводимости при разных размерах задачи для сред, представленных на рис. 5. Графики с толстыми линиями получены как среднее арифметическое графиков с тонкими линиями соответствующих цветов. Синий, красный, желтый и зеленый графики соответствуют размеру 100, 200, 400, 800 узлов в каждом направлении соответственно.

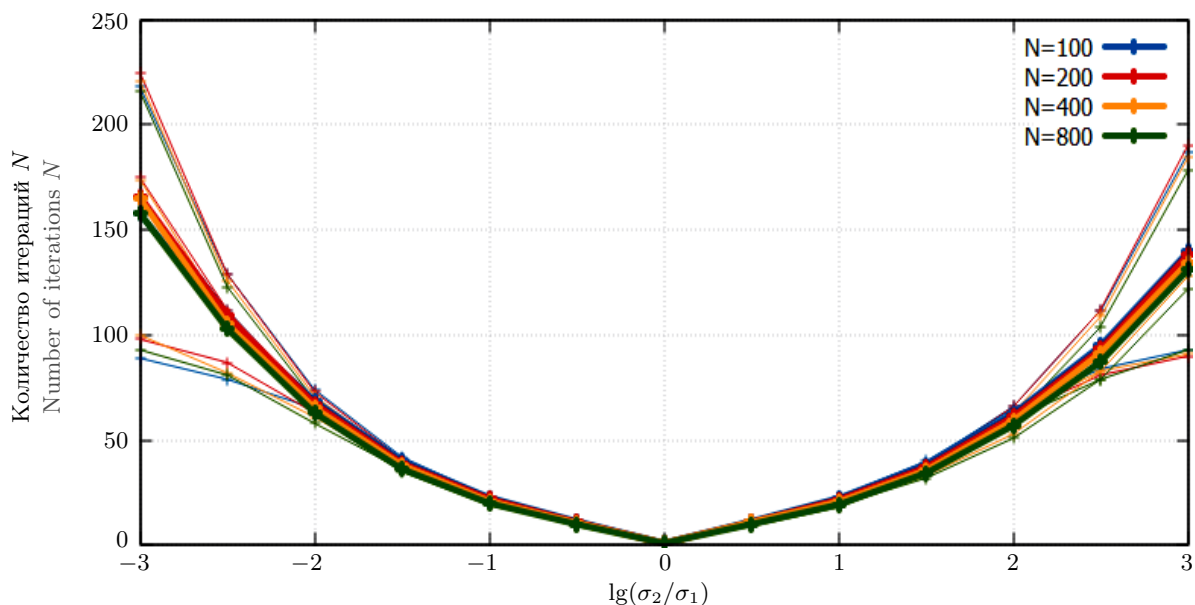


Рис. 6. Количество итераций в зависимости от контраста проводимости и числа узлов  
 Fig. 6. The number of iterations depending on the conductivity contrast and the number of nodes

Анализ графиков показывает, что количество итераций существенно зависит от контраста проводимости, типа статистической модели. Однако, благодаря использованию предобуславливателя, удается подавить рост числа итераций с увеличением размера задачи при сохранении внутренней геометрии среды.

**4.3. Сравнение предобуславливателей.** Для сравнения эффективности предобуславливателей, основанных на аппроксимации уравнения Пуассона для однородной и слоистых моделей сред, были проведены серии численных экспериментов на синтетических моделях, описанных в предыдущем разделе. Из результатов экспериментов следует, что эффективность предобуславливателей существенно зависит от того, на основе статистической модели какого типа построены среды. Поэтому результаты экспериментов и их анализ будут представлены отдельно для каждого типа моделей.

Заметим, что “слоистые” предобуславливатели для одной и той же задачи и среды могут отличаться не только направлением слоистости, но и тем, каким образом была построена слоистая среда. В этой серии экспериментов слоистые среды строились путем осреднения параметров каждого слоя исходной среды. В качестве среднего значения в слое выбиралось одно из четырех значений: среднее арифметическое, среднее гармоническое, максимальное или минимальное. Таким образом, с учетом двух вариантов для направления слоистости, в работе рассматривались восемь типов “слоистых” предобуславливателей.

§ 4.3.1. Модели первого типа.

На рис. 7 а–с представлены некоторые неоднородные среды, соответствующие моделям первого типа. На рис. 8 представлены графики числа итераций в зависимости от контраста проводимости и используе-

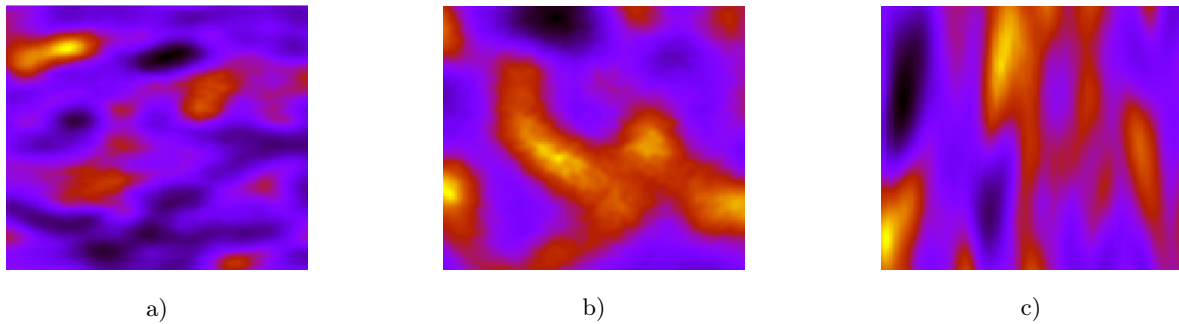


Рис. 7. Представители неоднородных сред, соответствующих статистическим моделям первого типа

Fig. 7. Representatives of heterogeneous media corresponding to statistical models of the first type

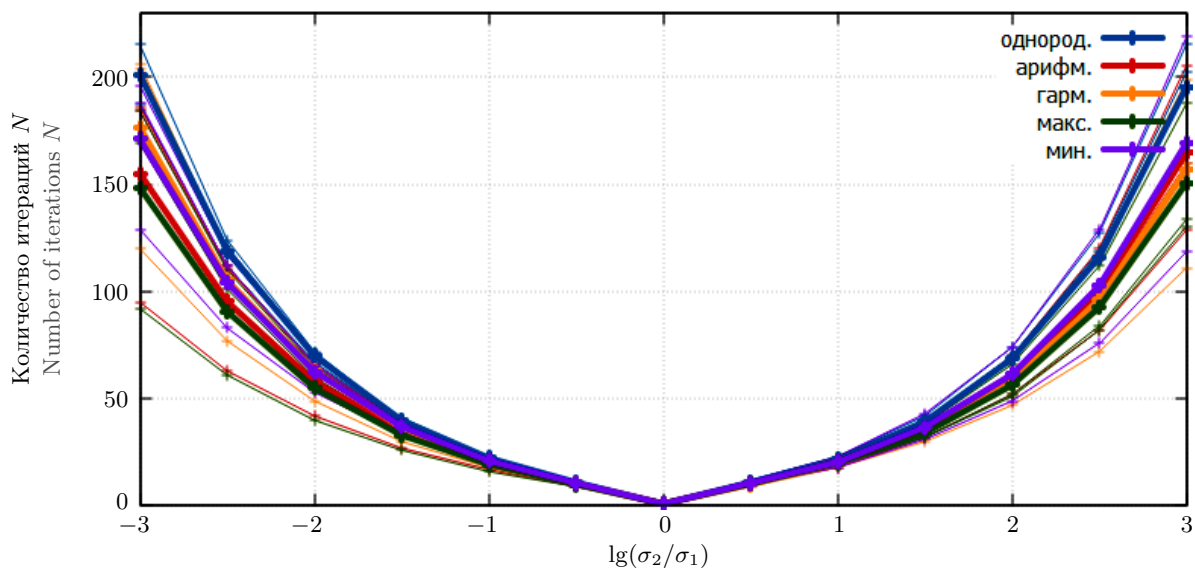


Рис. 8. Количество итераций в зависимости от контрастности проводимости и используемого осреднения моделей в направлении  $x$  (для моделей первого типа)

Fig. 8. The number of iterations depending on the conductivity contrast and the averaging of models in the  $x$  direction (for models of the first type)

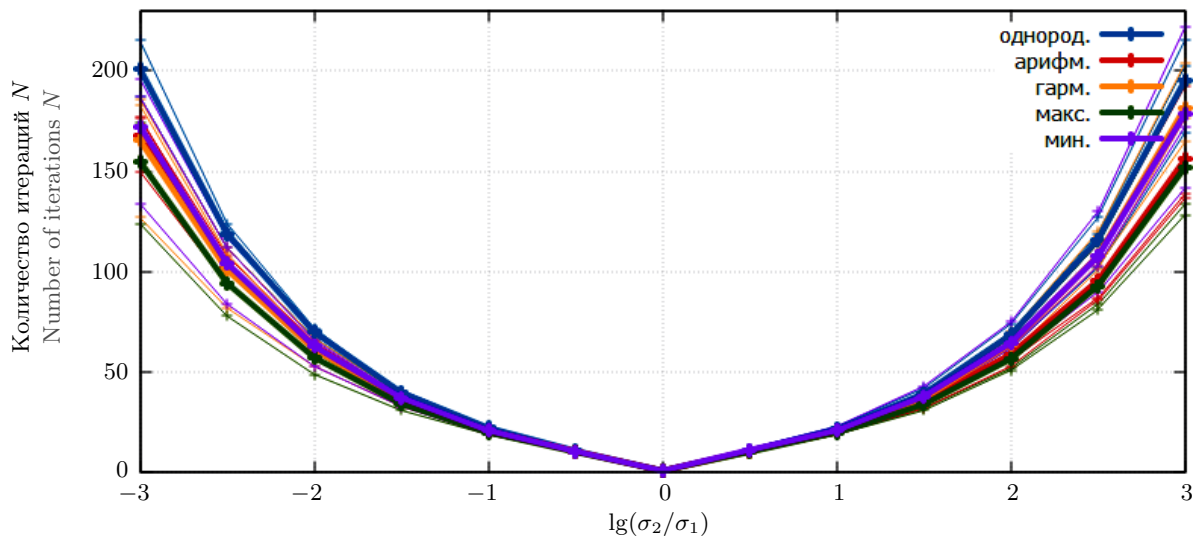


Рис. 9. Количество итераций в зависимости от контрастности проводимости и используемого осреднения моделей в направлении  $y$  (для моделей первого типа)

Fig. 9. The number of iterations depending on the conductivity contrast and the averaging of models in the  $y$  direction (for models of the first type)

мого подхода к осреднению при выборе направления слоистости таким образом, чтобы слои были параллельны границам с условием Дирихле. На рис. 9 представлены аналогичные графики, но направление слоистости выбиралось таким образом, чтобы слои были параллельны границам с условием Неймана. Графики с тонкими линиями соответствуют средам, представленным на рис. 7, графики с толстыми линиями получены как среднее арифметическое графиков с тонкими линиями соответствующих цветов. Синие графики соответствуют “однородным” предобуславливателям. Красные, желтые, зеленые и фиолетовые графики соответствуют “слоистым” предобуславливателям, при построении которых осреднение в слое проводилось путем взятия среднего арифметического, среднего гармонического, максимального и минимального значения соответственно.

Анализ графиков показывает, что все ранее упомянутые “слоистые” предобуславливатели в среднем оказались эффективнее “однородного” предобуславливателя для статистических моделей первого типа. Также можно заметить, что среди всех рассмотренных предобуславливателей лучшим оказался “слоистый” предобуславливатель, при построении которого в качестве среднего значения в слое выбиралось максимальное значение.

Для более удобного анализа и обобщения результатов в качестве меры эффективности “слоистого” предобуславливателя рассматривалось отношение количества итераций метода при использовании “слоистого” предобуславливателя к количеству итераций метода при использовании “однородного” предобуславливателя. В табл. 3–5 представлены отношения числа итераций при использовании предобуславливателя, соответствующего слоистой среде, к числу итераций при использовании “однородного” предобуславливателя. При этом число итераций зависело от направления преимущественной ориентации неоднородностей (направление, в котором длина корреляции выше) и направления, в котором модель для предобуславливателя выбиралась слоистой, а также от конкретной реализации. Поэтому в табл. 3–5 приводятся значения как для случая, когда направление слоистости в модели предобуславливателя совпадает с пре-

Таблица 3. Отношение числа итераций “слоистого” предобуславливателя  $N_{it}^l$  при  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 1$  к числу итераций “однородного” предобуславливателя  $N_{it}^H$  (для моделей первого типа)

Table 3. Ratio of the numbers of iterations of the “layered” preconditioner  $N_{it}^l$  to those of “homogeneous” preconditioner  $N_{it}^H$  for  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 1$  (for models of the first type)

Длины корреляций $(x, y)$ Correlation length $(x, y)$	$N_{it}^{lx} / N_{it}^H$	$N_{it}^{ly} / N_{it}^H$
(1, 1)	0.86	0.86
(5, 1)	0.79	0.86
(5, 5)	0.83	0.83
(9, 1)	0.82	0.88
(9, 5)	0.86	0.86
(9, 9)	0.81	0.81

Таблица 4. Отношение числа итераций “слоистого” предобуславливателя  $N_{it}^l$  при  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 2$  к числу итераций “однородного” предобуславливателя  $N_{it}^H$  (для моделей первого типа)

Table 4. Ratio of the numbers of iterations of the “layered” preconditioner  $N_{it}^l$  to those of “homogeneous” preconditioner  $N_{it}^H$  for  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 2$  (for models of the first type)

Длины корреляций $(x, y)$ Correlation length $(x, y)$	$N_{it}^{lx}/N_{it}^H$	$N_{it}^{ly}/N_{it}^H$
(1, 1)	0.78	0.78
(5, 1)	0.66	0.77
(5, 5)	0.72	0.72
(9, 1)	0.71	0.80
(9, 5)	0.76	0.76
(9, 9)	0.68	0.68

Таблица 5. Отношение числа итераций “слоистого” предобуславливателя  $N_{it}^l$  при  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 3$  к числу итераций “однородного” предобуславливателя  $N_{it}^H$  (для моделей первого типа)

Table 5. Ratio of the numbers of iterations of the “layered” preconditioner  $N_{it}^l$  to those of “homogeneous” preconditioner  $N_{it}^H$  for  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 3$  (for models of the first type)

Длины корреляций $(x, y)$ Correlation length $(x, y)$	$N_{it}^{lx}/N_{it}^H$	$N_{it}^{ly}/N_{it}^H$
(1, 1)	0.72	0.72
(5, 1)	0.56	0.71
(5, 5)	0.64	0.64
(9, 1)	0.63	0.75
(9, 5)	0.69	0.69
(9, 9)	0.60	0.60

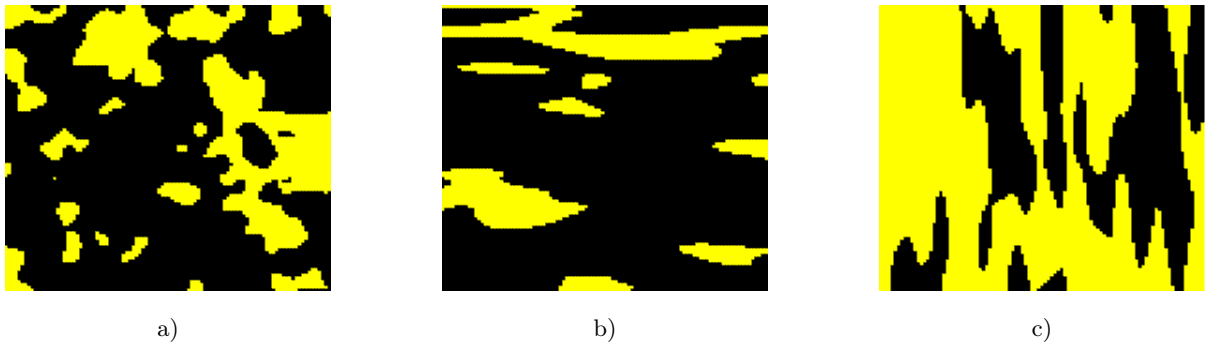


Рис. 10. Представители неоднородных сред, соответствующих статистическим моделям второго типа  
 Fig. 10. Representatives of heterogeneous media corresponding to statistical models of the second type

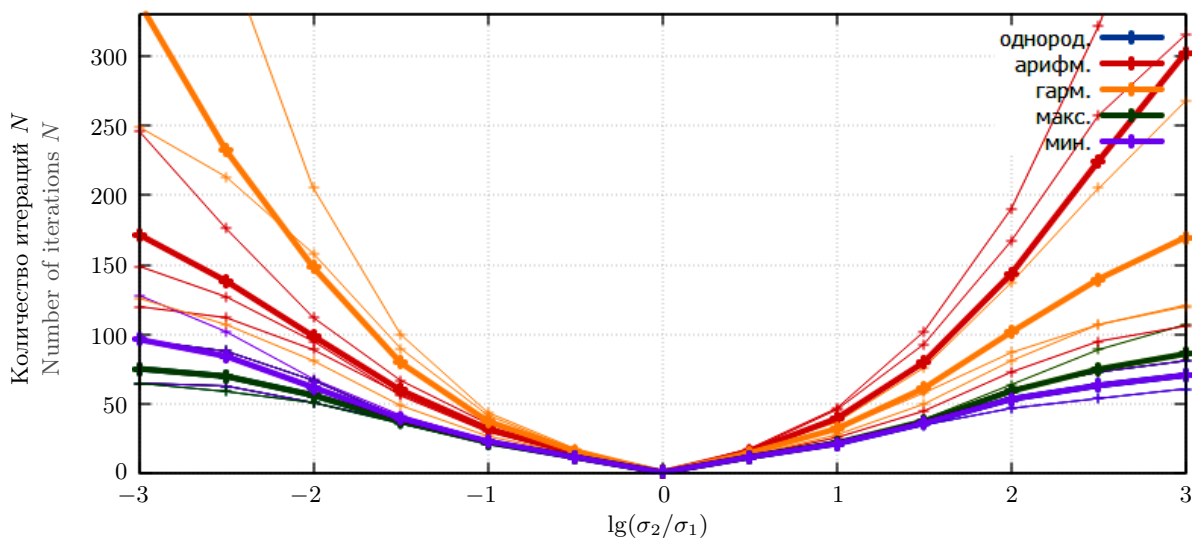


Рис. 11. Количество итераций в зависимости от контрастности проводимости и используемого осреднения моделей в направлении  $x$  (для моделей второго типа)

Fig. 11. The number of iterations depending on the conductivity contrast and the averaging of models in the  $x$  direction (for models of the second type)

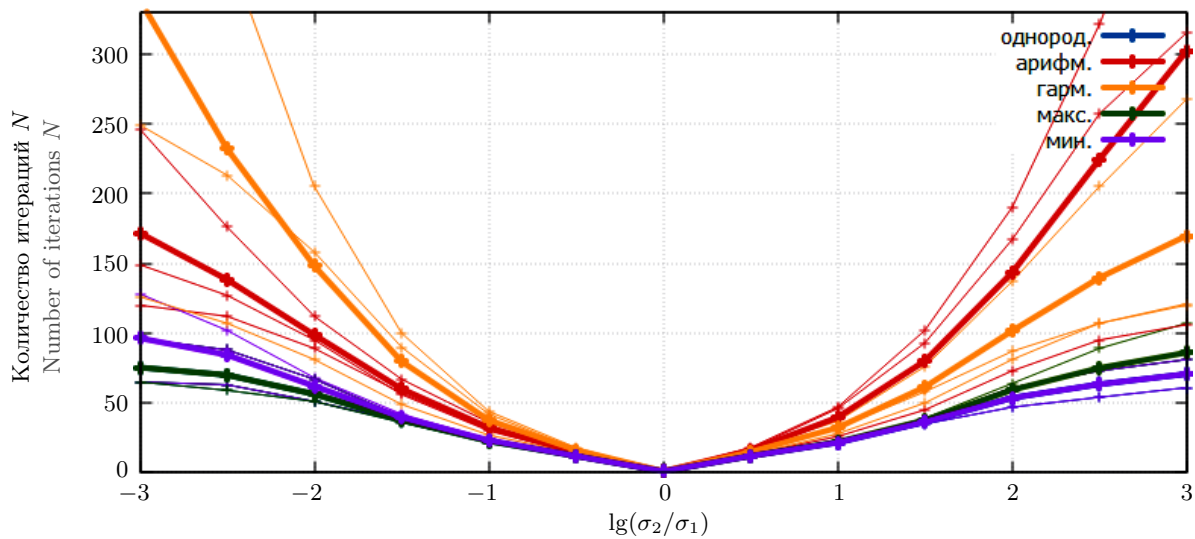


Рис. 12. Количество итераций в зависимости от контрастности проводимости и используемого осреднения моделей в направлении  $y$  (для моделей второго типа)

Fig. 12. The number of iterations depending on the conductivity contrast and the averaging of models in the  $y$  direction (for models of the second type)

имущественной ориентацией неоднородностей, так и для случая, когда они не согласуются. В случае, когда исходная неоднородная модель была изотропной, приводится лишь одно усредненное значение.

Во всех представленных экспериментах наблюдается существенное снижение числа итераций, если направление слоистости в модели, используемой в предобуславливателе, совпадает с направлением преимущественной ориентации неоднородностей. При этом, даже в случае, когда направление слоистости в модели для предобуславливателя выбирается произвольно, т.е. без учета геометрии исходной модели, такой предобуславливатель обеспечивает более высокую скорость сходимости итерационного процесса, чем “однородный” предобуславливатель.

Дополнительно следует отметить, что преимущество предложенного “слоистого” предобуславливателя над “однородным” возрастает с ростом контраста свойств среды. При контрасте коэффициентов  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 1$  уменьшение числа итераций составляет порядка 10–15%, при контрасте  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 2$  оно составляет 15–20%, при дальнейшем увеличении контраста ускорение доходит до 40%.

#### § 4.3.2. Модели второго типа.

На рис. 10 а–с представлены неоднородные среды, соответствующие моделям второго типа. На рис. 11, 12 представлены графики, аналогичные графикам на рис. 8, 9 соответственно. Обратим внимание, что на рис. 11 синий график совпал с зеленым графиком при  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) \in [-3, 0]$  и с фиолетовым при  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) \in [0, 3]$ . На рис. 12 синий график совпал с фиолетовым графиком при  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) \in [-3, 0]$  и с зеленым при  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) \in [0, 3]$ .

Таким образом, можно сделать вывод о том, что ни один из рассматриваемых “слоистых” предобуславливателей не оказался эффективнее “однородного” предобуславливателя для статистических моделей второго типа.

#### § 4.3.3. Модели третьего типа.

На рис. 13 а–с представлены неоднородные среды, соответствующие моделям третьего типа. Заметим, что при генерации сред за основу брались модели второго типа, у которых длины корреляций равны по каждому направлению. На рис. 14, 15 представлены графики, аналогичные графикам на рис. 8, 9 соответственно.

Анализируя графики, можно сделать вывод о том, что в среднем самым эффективным из рассмотренных предобуславливателей оказался “слоистый” предобуславливатель, основанный на осреднении максимальным значением. Также заметим, что только этот тип “слоистых” предобуславливателей оказался эффективнее “однородного” предобуславливателя.



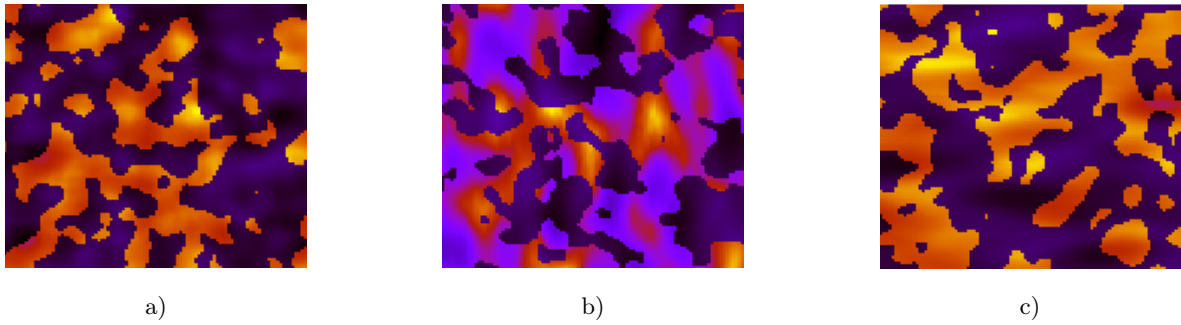


Рис. 13. Представители неоднородных сред, соответствующих статистическим моделям третьего типа  
 Fig. 13. Representatives of heterogeneous media corresponding to statistical models of the third type

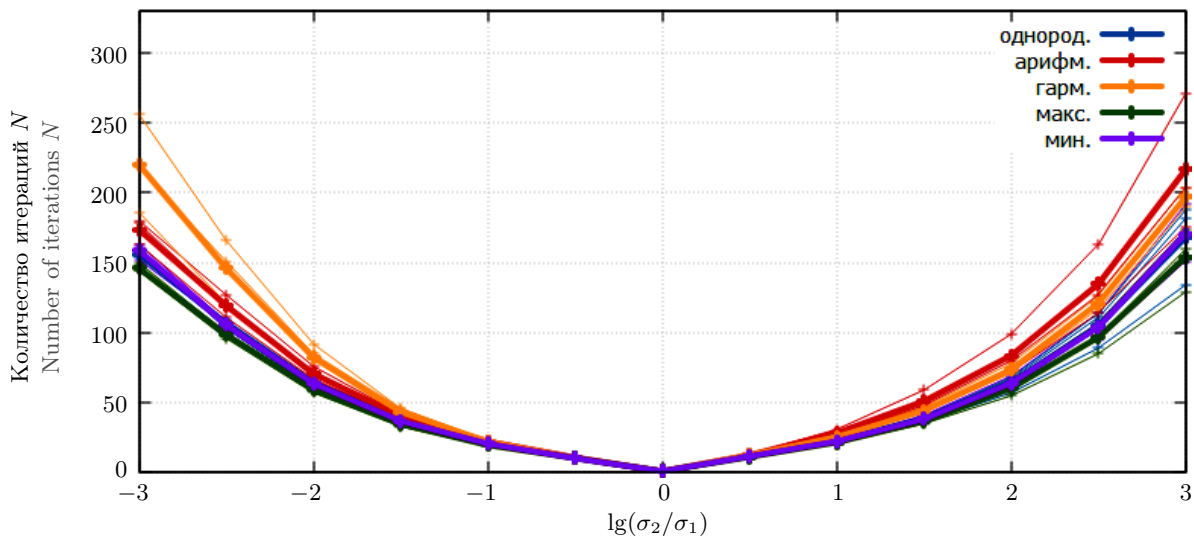


Рис. 14. Количество итераций в зависимости от контрастности проводимости и используемого осреднения моделей в направлении  $x$  (для моделей третьего типа)  
 Fig. 14. The number of iterations depending on the conductivity contrast and the averaging of models in the  $x$  direction (for models of the third type)

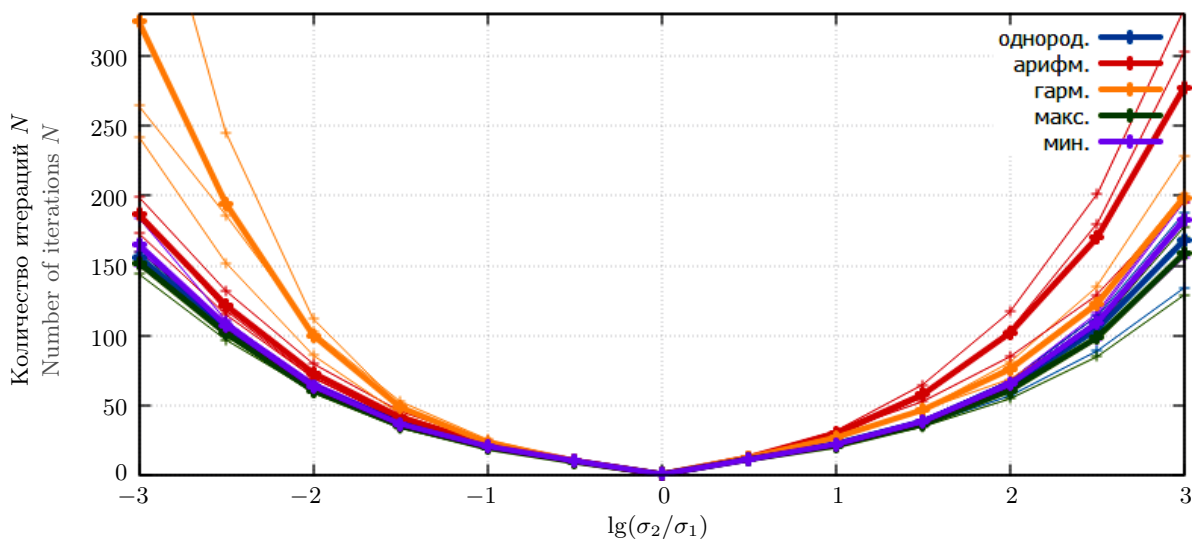


Рис. 15. Количество итераций в зависимости от контрастности проводимости и используемого осреднения моделей в направлении  $y$  (для моделей третьего типа)  
 Fig. 15. The number of iterations depending on the conductivity contrast and the averaging of models in the  $y$  direction (for models of the third type)



Таблица 6. Отношение числа итераций “слоистого” предобуславливателя  $N_{it}^l$  при  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 1$  к числу итераций “однородного” предобуславливателя  $N_{it}^H$  (для моделей третьего типа)

Table 6. Ratio of the numbers of iterations of the “layered” preconditioner  $N_{it}^l$  to those of “homogeneous” preconditioner  $N_{it}^H$  for  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 1$  (for models of the third type)

Длины корреляций $(x, y)$ Correlation length $(x, y)$	$N_{it}^{lx}/N_{it}^H$	$N_{it}^{ly}/N_{it}^H$
(1, 1)	0.94	0.94
(5, 1)	0.91	0.93
(5, 5)	0.91	0.91
(9, 1)	0.90	0.94
(9, 5)	0.92	0.92
(9, 9)	0.91	0.91

Таблица 7. Отношение числа итераций “слоистого” предобуславливателя  $N_{it}^l$  при  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 2$  к числу итераций “однородного” предобуславливателя  $N_{it}^H$  (для моделей третьего типа)

Table 7. Ratio of the numbers of iterations of the “layered” preconditioner  $N_{it}^l$  to those of “homogeneous” preconditioner  $N_{it}^H$  for  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 2$  (for models of the third type)

Длины корреляций $(x, y)$ Correlation length $(x, y)$	$N_{it}^{lx}/N_{it}^H$	$N_{it}^{ly}/N_{it}^H$
(1, 1)	0.95	0.95
(5, 1)	0.91	0.94
(5, 5)	0.93	0.93
(9, 1)	0.91	0.95
(9, 5)	0.93	0.94
(9, 9)	0.92	0.92

Аналогично разделу 4.3.1 была рассмотрена мера эффективности “слоистого” предобуславливателя. Табл. 6, 7 соответствуют табл. 3, 4. Заметим, что длины корреляций в первом столбце табл. 6, 7 относятся к моделям первого типа, которые были использованы при генерации моделей третьего типа.

В представленных экспериментах наблюдается увеличение скорости сходимости в сравнении с “однородным” предобуславливателем. Также можно заметить незначительное снижение числа итераций, если при построении предобуславливателя направление слоистости совпадало с преимущественной ориентацией неоднородностей. Отметим, что как в случае  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 1$ , так и в случае  $\lg(\sigma_2/\sigma_1) = \pm 2$  уменьшение числа итераций составляет порядка 5–10%.

**5. Заключение.** В работе представлен подход к построению предобуславливателя для численного решения уравнения Пуассона для существенно неоднородной среды. В качестве предобуславливателя используется оператор, обратный к дискретному оператору Лапласа, но для упрощенной модели среды. В частности, рассматриваются случаи однородной и слоистых моделей среды. Для обращения оператора Лапласа в этих случаях используется спектральное разложение по одному из пространственных направлений и метод прогонки для серии одномерных задач по второму направлению. Такой подход к построению предобуславливателя обеспечивает независимость числа итераций от размера решаемой задачи, что подтверждается серией численных экспериментов. Важной особенностью предложенного подхода является именно использование слоистых моделей среды для построения предобуславливателя. Согласно численным экспериментам, учет неоднородности при построении предобуславливателя позволяет снизить число итераций в методе сопряженных градиентов на 10–40% в сравнении с использованием предобуславливателя, основанного на обращении оператора Лапласа для однородной среды. При этом ускорение зависит от контраста коэффициентов исходной модели, с ростом контраста повышается и эффективность предложенного подхода. Отдельно следует подчеркнуть, что результаты численных исследований показали, что при построении слоистой модели среды оптимальным является выбор максимального значения коэффициента проводимости вдоль слоя: такой выбор обеспечил наибольшую скорость сходимости алгоритма.

### Список литературы

1. Saenger E.H., Lebedev M., Uribe D., et al. Analysis of high-resolution X-ray computed tomography images of Bentheim sandstone under elevated confining pressures // *Geophysical Prospecting*. 2016. **64**, N 4. 848–859. doi 10.1111/1365-2478.12400.
2. Shulakova V., Pervukhina M., Müller T.M., et al. Computational elastic up-scaling of sandstone on the basis of X-ray micro-tomographic images // *Geophysical Prospecting*. 2012. **61**, N 2. 287–301. doi 10.1111/j.1365-2478.2012.01082.x.
3. Andrä H., Combaret N., Dvorkin J., et al. Digital rock physics benchmarks — part II: computing effective properties // *Computers and Geosciences*. 2013. **50**. 33–43. doi 10.1016/j.cageo.2012.09.008.



4. Хачкова Т.С., Лисица В.В., Колоухин Д.Р., Решетова Г.В. Численная оценка влияния шероховатых границ на упругие параметры слоистой среды // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**, № 3. 225–240. doi 10.26089/NumMet.v21r320.
5. Решетова Г.В., Хачкова Т.С. Численный метод оценки эффективных упругих характеристик горной породы по двумерным и трехмерным цифровым изображениям ядра // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**, № 4. 416–433. doi 10.26089/NumMet.v18r435.
6. Хачкова Т.С., Базайкин Я.В., Лисица В.В. Применение методов вычислительной топологии для анализа изменения порового пространства породы в процессе химического растворения // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**, № 1. 41–55. doi 10.26089/NumMet.v21r104.
7. Васильев Р.В., Герке К.М., Карсанина М.В., Корост Д.В. Решение уравнения Стокса в трехмерной геометрии конечно-разностным методом // Математическое моделирование. 2015. **27**, № 6. 67–80.
8. Гадьльшшина К.А., Хачкова Т.С., Лисица В.В. Численное моделирование химического взаимодействия флюида с горной породой // Вычислительные методы и программирование. 2019. **20**, № 4. 457–470. doi 10.26089/NumMet.v20r440.
9. Lisitsa V., Bazaiкин Ya., Khachkova T. Computational topology-based characterization of pore space changes due to chemical dissolution of rocks // Applied Mathematical Modelling. 2020. **88**. 21–37. doi 10.1016/j.apm.2020.06.037.
10. Molins S., Trebotich D., Yang L., et al. Pore-scale controls on calcite dissolution rates from flow-through laboratory and numerical experiments // Environmental Science and Technology. 2014. **48**, N 13. 7453–7460. doi 10.1021/es5013438.
11. Dorn C., Schneider M. Lippmann-Schwinger solvers for the explicit jump discretization for thermal computational homogenization problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2019. **118**, N 11. 631–653. doi 10.1002/nme.6030.
12. Khachkova T., Lisitsa V., Reshetova G., Tcheverda V. GPU-based algorithm for evaluating the electrical resistivity of digital rocks // Computers and Mathematics with Applications. 2021. **82**. 200–211. doi 10.1016/j.camwa.2020.11.005.
13. Хачкова Т.С., Лисица В.В., Решетова Г.В., Чеверда В.А. Численная оценка удельного электрического сопротивления горных пород по их цифровым изображениям с использованием графических сопроцессоров // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**, № 3. 306–318. doi 10.26089/NumMet.v21r326.
14. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
15. Годунов С.К. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
17. Haber E., Ascher U.M., Aruliah D.A., Oldenburg D.W. Fast simulation of 3D electromagnetic problems using potentials // Journal of Computational Physics. 2000. **163**, N 1. 150–171. doi 10.1006/jcph.2000.6545.
18. Kostin V., Solov'yev S., Bakulin A., Dmitriev M. Direct frequency-domain 3D acoustic solver with intermediate data compression benchmarked against time-domain modeling for full-waveform inversion applications // Geophysics. 2019. **84**, N 4. T207–T219. doi 10.1190/geo2018-0465.1.
19. Chandrasekaran S., Dewilde P., Gu M., Somasunderam N. On the numerical rank of the off-diagonal blocks of Schur complements of discretized elliptic PDEs // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2010. **31**, N 5. 2261–2290. doi 10.1137/090775932.
20. Воронин К.В., Соловьев С.А. Решение уравнения Гельмгольца с использованием метода малоранговой аппроксимации в качестве предобусловливателя // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**, № 2. 268–280. doi 10.26089/NumMet.v16r226.
21. Соловьев С.А. Решение разреженных систем линейных уравнений методом Гаусса с использованием техники аппроксимации матрицами малого ранга // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**, № 3. 441–460.
22. Johansen H., Colella P. A Cartesian grid embedded boundary method for Poisson's equation on irregular domains // Journal of Computational Physics. 1998. **147**, N 1. 60–85. doi 10.1006/jcph.1998.5965.
23. Stüben K. A review of algebraic multigrid // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2001. **128**, N 1–2. 281–309. doi 10.1016/S0377-0427(00)00516-1.
24. Неклюдов Д.А., Сильвестров И.Ю., Чеверда В.А. Итерационный метод решения трехмерного уравнения Гельмгольца с “почти аналитическим” предобусловливателем для моделирования акустических волновых полей в задачах сейсморазведки // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**, № 3. 514–529.
25. Belonosov M., Kostin V., Neklyudov D., Tcheverda V. 3D numerical simulation of elastic waves with a frequency-domain iterative solver // Geophysics. 2018. **83**, N 6. T333–T344. doi 10.1190/geo2017-0710.1.



26. Haber E., Ascher U.M. Fast finite volume simulation of 3D electromagnetic problems with highly discontinuous coefficients // SIAM Journal on Scientific Computing. 2001. 22, N 6. 1943–1961. doi 10.1137/S1064827599360741.
27. Pleshkevich A., Vishnevskiy D., Lisitsa V. Sixth-order accurate pseudo-spectral method for solving one-way wave equation // Applied Mathematics and Computation. 2019. 359. 34–51. doi 10.1016/j.amc.2019.04.029.
28. Парселл Э. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1975.
29. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
30. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.
31. Nyman J.D., Winter C.L. Stochastic generation of explicit pore structures by thresholding Gaussian random fields // Journal of Computational Physics. 2014. 277. 16–31. doi 10.1016/j.jcp.2014.07.046.

Поступила в редакцию  
 28 февраля 2025 г.

Принята к публикации  
 15 марта 2025 г.

### Информация об авторах

Алексей Андреевич Манаев — инженер; Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, пр. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Вадим Викторович Лисица — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр.; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

### References

1. E. H. Saenger, M. Lebedev, D. Uribe, et al., “Analysis of High-Resolution X-Ray Computed Tomography Images of Bentheim Sandstone under Elevated Confining Pressures,” *Geophys. Prospect.* 64 (4), 848–859 (2016). doi 10.1111/1365-2478.12400.
2. V. Shulakova, M. Pervukhina, T. M. Müller, et al., “Computational Elastic Up-scaling of Sandstone on the Basis of X-Ray Micro-Tomographic Images,” *Geophys. Prospect.* 61 (2), 287–301 (2012). doi 10.1111/j.1365-2478.2012.01082.x.
3. H. Andrä, N. Combaret, J. Dvorkin, et al., “Digital Rock Physics Benchmarks — Part II: Computing Effective Properties,” *Comput. Geosci.* 50, 33–43 (2013). doi 10.1016/j.cageo.2012.09.008.
4. T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa, D. R. Kolyukhin, and G. V. Reshetova, “Numerical Estimation of Interface Roughness Effect on Upscaled Elastic Properties of Layered Media,” *Numerical Methods and Programming* 21 (3), 225–240 (2020). doi 10.26089/NumMet.v21r320.
5. G. V. Reshetova and T. S. Khachkova, “A Numerical Method to Estimate the Effective Elastic Moduli of Rocks from Two- and Three-Dimensional Digital Images of Rock Core Samples,” *Numerical Methods and Programming* 18 (4), 416–433 (2017). doi 10.26089/NumMet.v18r435.
6. T. S. Khachkova, Ya. V. Bazaikin, and V. V. Lisitsa, “Use of the Computational Topology to Analyze the Pore Space Changes during Chemical Dissolution,” *Numerical Methods and Programming* 21 (1), 41–55 (2020). doi 10.26089/NumMet.v21r104.
7. R. V. Vasilyev, K. M. Gerke, M. V. Karsanina, and D. V. Korost, “Solution of the Stokes Equation in Three-Dimensional Geometry by the Finite-Difference Method,” *Mat. Model.* 27 (6), 67–80 (2015) [*Math. Models Comput. Simul.* 8 (1), 63–72 (2016)]. doi 10.1134/s2070048216010105.
8. K. A. Gadylyshina, T. S. Khachkova, and V. V. Lisitsa, “Numerical Modeling of Chemical Interaction between a Fluid and Rocks,” *Numerical Methods and Programming* 20 (4), 457–470 (2019). doi 10.26089/NumMet.v20r440.
9. V. Lisitsa, Ya. Bazaikin, and T. Khachkova, “Computational Topology-Based Characterization of Pore Space Changes due to Chemical Dissolution of Rocks,” *Appl. Math. Model.* 88, 21–37 (2020). doi 10.1016/j.apm.2020.06.037.
10. S. Molins, D. Trebotich, L. Yang, et al., “Pore-Scale Controls on Calcite Dissolution Rates from Flow-through Laboratory and Numerical Experiments,” *Environ. Sci. Technol.* 48 (13), 7453–7460 (2014). doi 10.1021/es5013438.
11. C. Dorn and M. Schneider, “Lippmann–Schwinger Solvers for the Explicit Jump Discretization for Thermal Computational Homogenization Problems,” *Int. J. Numer. Methods Eng.* 118 (11), 631–653 (2019). doi 10.1002/nme.6030.

12. T. Khachkova, V. Lisitsa, G. Reshetova, and V. Tcheverda, “GPU-based Algorithm for Evaluating the Electrical Resistivity of Digital Rocks,” *Comput. Math. App.* **82**, 200–211 (2021). doi [10.1016/j.camwa.2020.11.005](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.11.005).
13. T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa, G. V. Reshetova, and V. A. Tcheverda, “Numerical Estimation of Electrical Resistivity in Digital Rocks Using GPUs,” *Numerical Methods and Programming*. **21** (3), 306–318 (2020). doi [10.26089/NumMet.v21r326](https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r326).
14. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (SIAM, Philadelphia, 2003; Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013). doi [10.1137/1.9780898718003](https://doi.org/10.1137/1.9780898718003)
15. S. K. Godunov, *Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1977; North-Holland, Amsterdam, 1987).
16. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1989; CRC Press, Boca Raton, 2001).
17. E. Haber, U. M. Ascher, D. A. Aruliah, and D. W. Oldenburg, “Fast Simulation of 3D Electromagnetic Problems Using Potentials,” *J. Comput. Phys.* **163** (1), 150–171 (2000). doi [10.1006/jcph.2000.6545](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6545).
18. V. Kostin, S. Solovyev, A. Bakulin, and M. Dmitriev, “Direct Frequency-Domain 3D Acoustic Solver with Intermediate Data Compression Benchmarked Against Time-Domain Modeling for Full-Waveform Inversion Applications,” *Geophysics* **84** (4), T207–T219 (2019). doi [10.1190/geo2018-0465.1](https://doi.org/10.1190/geo2018-0465.1).
19. S. Chandrasekaran, P. Dewilde, M. Gu, and N. Somasunderam, “On the Numerical Rank of the Off-Diagonal Blocks of Schur Complements of Discretized Elliptic PDEs,” *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **31** (5), 2261–2290 (2010). doi [10.1137/090775932](https://doi.org/10.1137/090775932).
20. K. V. Voronin and S. A. Solovyev, “Solution of the Helmholtz Problem Using the Preconditioned Low-Rank Approximation Technique,” *Numerical Methods and Programming* **16** (2), 268–280 (2015). doi [10.26089/NumMet.v16r226](https://doi.org/10.26089/NumMet.v16r226).
21. S. A. Solovyev, “Application of the Low-Rank Approximation Technique in the Gauss Elimination Method for Sparse Linear Systems,” *Numerical Methods and Programming* **15** (3), 441–460 (2014).
22. H. Johansen and P. Colella, “A Cartesian Grid Embedded Boundary Method for Poisson’s Equation on Irregular Domains,” *J. Comput. Phys.* **147** (1), 60–85 (1998). doi [10.1006/jcph.1998.5965](https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5965).
23. K. Stüben, “A Review of Algebraic Multigrid,” *J. Comput. Appl. Math.* **128** (1–2), 281–309 (2001). doi [10.1016/S0377-0427\(00\)00516-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00516-1).
24. D. A. Neklyudov, I. Yu. Silvestrov, and V. A. Tcheverda, “A 3D Helmholtz Iterative Solver with a Semi-Analytical Preconditioner for Acoustic Wavefield Modeling in Seismic Exploration Problems,” *Numerical Methods and Programming* **15** (3), 514–529 (2014).
25. M. Belonosov, V. Kostin, D. Neklyudov, and V. Tcheverda, “3D Numerical Simulation of Elastic Waves with a Frequency-Domain Iterative Solver,” *Geophysics* **83** (6), T333–T344 (2018). doi [10.1190/geo2017-0710.1](https://doi.org/10.1190/geo2017-0710.1).
26. E. Haber and U. M. Ascher, “Fast Finite Volume Simulation of 3D Electromagnetic Problems with Highly Discontinuous Coefficients,” *SIAM J. Sci. Comput.* **22** (6), 1943–1961 (2001). doi [10.1137/S1064827599360741](https://doi.org/10.1137/S1064827599360741).
27. A. Pleshkevich, D. Vishnevskiy, and V. Lisitsa, “Sixth-Order Accurate Pseudo-Spectral Method for Solving One-Way Wave Equation,” *Appl. Math. Comput.* **359**, 34–51 (2019). doi [10.1016/j.amc.2019.04.029](https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.04.029).
28. E. Purcell, *Electricity and Magnetism* (McGraw-Hill, New York, 1965; Nauka, Moscow, 1975).
29. N. S. Bakhvalov, *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1973; Mir, Moscow, 1977).
30. V. I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals* (Nauka, Moscow, 1967; Dover, New York, 2006).
31. J. D. Hyman and C. L. Winter, “Stochastic Generation of Explicit Pore Structures by Thresholding Gaussian Random Fields,” *J. Comput. Phys.* **277**, 16–31 (2014). doi [10.1016/j.jcp.2014.07.046](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.046).

Received  
February 28, 2025

Accepted for publication  
March 15, 2025

### Information about the authors

*Aleksei A. Manaev* — engineer; Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Koptyug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.

*Vadim V. Lisitsa* — Dr. Sci., Leading Researcher; Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.