



Применение сплайновых аппроксимаций второго порядка к решению интегральных уравнений второго рода

И. Г. Бурова

Санкт-Петербургский государственный университет,
 математико-механический факультет, Санкт-Петербург, Российская Федерация
 ORCID: 0000-0002-8743-1377, e-mail: i.g.burova@spbu.ru

Г. О. Алцыбеев

Санкт-Петербургский государственный университет,
 математико-механический факультет, Санкт-Петербург, Российская Федерация
 ORCID: 0000-0001-6257-5609, e-mail: gleb.alcybeev@spbu.ru

Аннотация: Локальные интерполяционные сплайны используются для решения различных задач, таких как интерполяция, аппроксимация, решение краевых задач, решение интегральных уравнений. Полиномиальные кусочно-линейные сплайны известны давно и являются частным случаем непрерывных локальных сплайнов максимального дефекта. Неполиномиальные локальные сплайны были построены и изучены авторами ранее. Аппроксимация кусочно-гладкой функции полиномиальными и неполиномиальными сплайнами строится на каждом интервале сетки отдельно как сумма произведений базисных сплайнов и значений функции в узлах сетки. Формулы базисных сплайнов находятся в аналитическом виде путем решения системы аппроксимационных тождеств. Предлагаемый численный метод решения интегральных уравнений Фредгольма использует полиномиальные или неполиномиальные сплайны второго порядка аппроксимации. Основа предлагаемого метода — вычисление интегралов от произведения ядра и базисных функций. Наилучший результат будет получен, если предположить, что функция (т.е. решение интегрального уравнения) является как минимум дважды дифференцируемой функцией. Сравнение рассматриваемого метода с известными численными методами решения интегральных уравнений (например, методами, основанными на использовании составных квадратурных формул трапеций и средних прямоугольников) показывает, что предлагаемый метод может дать существенно меньшую погрешность вычислений. Погрешность вычислений может быть уменьшена за счет того, что во многих случаях интегралы могут быть вычислены точно. Если интегралы затруднительно вычислить точно, то для их вычисления можно использовать различные квадратурные формулы. К преимуществам использования локальных полиномиальных и неполиномиальных сплайнов второго порядка аппроксимации следует также отнести удобство их применения на неравномерной сетке узлов. Представлены результаты численного решения линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма.

Ключевые слова: интегральные уравнения Фредгольма, локальные сплайны второго порядка аппроксимации, аппроксимация, интерполяция.

Благодарности: Авторы благодарят Санкт-Петербургский государственный университет за предоставление пакета Maple (проект Pure ID: 119548249).

Для цитирования: Бурова И.Г., Алцыбеев Г.О. Применение сплайновых аппроксимаций второго порядка к решению интегральных уравнений второго рода // Вычислительные методы и программирование. 2025. 26, № 2. 175–191. doi 10.26089/NumMet.v26r213.



Application of the second-order spline approximations to solving integral equations of the second kind

Irina G. Burova

Saint Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics,
Saint Petersburg, Russia

ORCID: 0000-0002-8743-1377, e-mail: i.g.burova@spbu.ru

Gleb O. Alcybeev

Saint Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics,
Saint Petersburg, Russia

ORCID: 0000-0001-6257-5609, e-mail: gleb.alcybeev@spbu.ru

Abstract: Local interpolation splines are used to solve various problems such as interpolation, approximation, the solving of boundary value problems and the solving of integral equations. Polynomial piecewise linear splines have been known for a long time and are a special case of local continuous splines of maximum defect. Non-polynomial local splines were constructed and studied by the authors earlier. The approximation of a function with polynomial or non-polynomial splines is constructed on each grid interval separately as a sum of products of basis splines and values of the function at the grid nodes. We find the formulas of the basis splines in analytical form by solving a system of approximation identities. The paper discusses a numerical method for solving a Fredholm integral equation of the second kind. This method is based on the use of polynomial or non-polynomial splines of the second order of the approximation. The main idea of the proposed method is based on calculating integrals of the product of the kernel and the basis functions. The best result will be obtained if we assume that the function (that is the solution of the integral equation) is a twice differentiable function. When comparing the method under discussion with the well-known numerical methods (for example, methods based on the use of composite quadrature rules of trapezoids and midpoint rectangles) for solving integral equations, it can be noted, that the proposed method in this paper can give a significantly smaller calculation error. The calculation error can be reduced due to the fact that in many cases the integrals can be calculated exactly. When the integrals can't be calculated exactly then various quadrature formulas can be used to calculate these integrals. The advantages of using local polynomial and non-polynomial splines of the second order of approximation should also include the convenience of their application on a non-uniform grid of nodes. The results of the numerical solution of linear and nonlinear integral Fredholm equations are presented.

Keywords: Fredholm integral equations of the second kind, local splines of the second order of approximation, approximation, interpolation.

Acknowledgements: The authors thank Saint Petersburg State University for providing the Maple package (project Pure ID: 119548249).

For citation: I. G. Burova, G. O. Alcybeev, "Application of the second-order polynomial spline approximations to solving integral equations of the second kind," Numerical Methods and Programming. 26 (2), 175–191 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r213.

1. Введение. Впервые уравнения, в которых неизвестная функция была под знаком интеграла, получил норвежский математик Нильс Хенрик Абель в 1826 г. [1]. Однако теория интегральных уравнений стала интенсивно развиваться в начале двадцатого века. Вначале появились практические и теоретические результаты по решению интегральных уравнений, в которых интеграл содержал переменный



верхний или нижний предел. Такие интегральные уравнения были предложены итальянским математиком Вито Вольтерра [2]. Уравнения Вольтерра нашли применение при изучении свойств вязкоупругих материалов, в финансовой математике, в демографии и т.д. Затем стала активно развиваться теория интегральных уравнений Фредгольма [3], получивших свое название по имени шведского математика Эрика Ивара Фредгольма.

В настоящее время становится особенно актуальным построение высокоэффективных методов решения интегральных уравнений Фредгольма. Значительный вклад в развитие методов численного решения интегральных уравнений внесли представители московской математической школы. В работе [4] построено решение интегрального уравнения методом квадратур с двенадцатым порядком погрешности. Эффективный численный метод решения интегрального уравнения второго рода в задачах электродинамики предложен в работе [5]. Изящное решение уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями в виде интегрального уравнения было получено в работе [6]. Много внимания уделяется также теоретическим вопросам существования и единственности решения интегральных уравнений [7, 8]. Задача вычисления матриц индуктивности сверхпроводящих линий передач является одной из важных проблем сверхпроводниковой микроэлектроники [9, 10]. В работе [11] решена задача нахождения решения модели стационарного электрического тока методом граничных интегральных уравнений. При решении многих прикладных задач возникает необходимость восстанавливать характеристики исследуемых объектов. Численное решение интегральных уравнений первого рода с распараллеливанием рассмотрено в работе [12]. В частности, этот метод был применен для восстановления распределения областей намагниченности по объему судна. Решение интегральных уравнений возникающих моделей стационарных биологических сообществ исследовано в работах [7, 13].

Из ученых, работавших в Санкт-Петербургском (Ленинградском) государственном университете, которые занимались решением интегральных уравнений, отметим следующих профессоров: Г. М. Мюнц, С. Г. Михлин, В. И. Смирнов, А. Ф. Гаврилов, М. К. Гавурин, Г. М. Фихтенгольц, Я. Д. Тамаркин, С. Л. Соболев, В. И. Крылов, И. К. Даугавет, И. П. Мысовских. Решению интегральных уравнений второго рода на математико-механическом факультете много внимания уделял заведующий лабораторией методов вычислений профессор С. Г. Михлин. Первая монография по линейным интегральным уравнениям им была опубликована в 1947 г. [14].

При решении интегральных уравнений важную роль играют метод конечных элементов, применение вейвлетов и сплайнов. В работе [15] предложено численное решение двумерного интегро-дифференциального уравнения для плотности листового тока с помощью метода конечных элементов. Среди новых численных методов для решения интегральных уравнений с использованием вейвлетов отметим [16, 17].

В 1956 г. В. С. Рябенький защитил кандидатскую диссертацию, в которой использовались полиномиальные сплайны (теперь эти сплайны называются сплайнами Рябенького (см., например, [18])). Сплайны Рябенького послужили для С. Г. Михлина толчком для развития теории полиномиальных сплайновых аппроксимаций ненулевой высоты. Под высотой понимается количество производных функции, которые входят в аппроксимацию. Статья по сплайновым аппроксимациям эрмитова типа была опубликована в 1974 г. [19].

В настоящее время известно множество различных типов сплайнов. Особенно часто применяются B -сплайны. Так, например, в работах [20, 21] обсуждаются численные методы решения интегральных уравнений с использованием B -сплайнов. Среди численных методов отметим метод Галеркина со сплайн-аппроксимацией на равномерных и неравномерных сетках [17, 22]. В ряде работ [20, 21, 23, 24] рассматриваются коллокационные методы на основе различных типов сплайнов.

В представленной работе рассматриваются особенности применения локальных интерполяционных сплайнов нулевой высоты второго порядка аппроксимации для решения интегральных уравнений.

2. Построение численного метода.

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) - \int_a^b K(x, s) u(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

где ядро $K(x, s)$ определено на квадрате $\Pi = \{(x, s) \mid a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$. Далее, если не оговорено другое, считаем, что $a = 0, b = 1$. Также предполагаем, что $K(x, s)$ — непрерывная функция на квадрате Π , $f(x)$ — непрерывная функция на промежутке $[a, b]$.

Пусть n — натуральное число. На промежутке $[a, b]$ построим сетку упорядоченных узлов $\{x_k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Будем использовать нормы

$$\|K\|_C = \max_{(x,s) \in \Pi} |K(x, s)|, \quad \|K\| = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |K(x, s)| ds.$$

Относительно ядра $K(x, s)$ предположим, что $\|K\| \leq q < 1$, $\|K\|_C \leq q < 1$.

2.2. Построение приближенного решения. Для нахождения каркаса приближенного решения [25] интегрального уравнения применим сплайновые аппроксимации второго порядка [26, 27]. Сплайновые аппроксимации строятся отдельно на каждом сеточном интервале, поэтому для построения численного метода потребуется следующее представление функции $u(s) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$:

$$u(s) = U_k^h(s) + O(h_k^2), \quad h_k = x_{k+1} - x_k.$$

Здесь

$$U_k^h(s) = u(x_k) w_k(s) + u(x_{k+1}) w_{k+1}(s), \quad s \in [x_k, x_{k+1}],$$

где $w_k(s)$, $w_{k+1}(s)$ — базисные сплайны.

Предполагаем, что носитель базисного сплайна w_k занимает два сеточных интервала:

$$\text{supp } w_k = [x_{k-1}, x_{k+1}].$$

Пусть функции $\varphi_0(s)$, $\varphi_1(s)$ образуют чебышевскую систему на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$. Базисные сплайны на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ находим из условия $U_k^h(s) = u(s)$, $u(s) = \varphi_0(s)$, $\varphi_1(s)$. Таким образом, приходим к системе аппроксимационных соотношений

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_k) w_k(s) + \varphi_0(x_{k+1}) w_{k+1}(s) &= \varphi_0(s), \\ \varphi_1(x_k) w_k(s) + \varphi_1(x_{k+1}) w_{k+1}(s) &= \varphi_1(s), \quad s \in [x_k, x_{k+1}]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулы базисных сплайнов в общем виде

$$\begin{aligned} w_k(s) &= \frac{\varphi_0(s) \varphi_1(x_{k+1}) - \varphi_1(s) \varphi_0(x_{k+1})}{\varphi_1(x_{k+1}) \varphi_0(x_k) - \varphi_1(x_k) \varphi_0(x_{k+1})}, \quad s \in [x_k, x_{k+1}], \\ w_{k+1}(s) &= \frac{\varphi_0(s) \varphi_1(x_k) - \varphi_1(s) \varphi_0(x_k)}{\varphi_1(x_k) \varphi_0(x_{k+1}) - \varphi_1(x_{k+1}) \varphi_0(x_k)}, \quad s \in [x_k, x_{k+1}]. \end{aligned}$$

На соседнем промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ формулы базисных сплайнов находим, решая аналогичную систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_{k-1}) w_{k-1}(s) + \varphi_0(x_k) w_k(s) &= \varphi_0(s), \\ \varphi_1(x_{k-1}) w_{k-1}(s) + \varphi_1(x_k) w_k(s) &= \varphi_1(s), \quad s \in [x_{k-1}, x_k]. \end{aligned}$$

На сеточных интервалах вблизи концов промежутка $[a, b]$ имеем

$$\begin{aligned} U_0^h(s) &= u(x_0) w_0(s) + u(x_1) w_1(s), \quad s \in [x_0, x_1], \\ U_{n-1}^h(s) &= u(x_{n-1}) w_{n-1}(s) + u(x_n) w_n(s), \quad s \in [x_{n-1}, x_n]. \end{aligned}$$

Отметим частные случаи.

1. Если $\varphi_0(s) = 1$, $\varphi_1(s) = s$, то получаем формулы полиномиальных базисных сплайнов

$$\begin{aligned} w_k^p(s) &= \begin{cases} \frac{s - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & s \in [x_k, x_{k+1}], \\ \frac{s - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & s \in [x_{k-1}, x_k], \end{cases} \\ w_{k+1}^p(s) &= \frac{s - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad s \in [x_k, x_{k+1}]. \end{aligned}$$



При этом на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ при $t \in [0, 1]$ можно использовать формулы $w_k^p(x_k + th_k) = 1 - t$, $w_{k+1}^p(x_k + th_k) = t$.

Нетрудно видеть, что

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} w_k^p(s) ds = \frac{h_k}{2}, \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} w_k^p(s) ds = \frac{h_k}{2}.$$

Ранее было показано [28, 29], что при аппроксимации полиномиальными сплайнами функции $u(s) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$, $s \in [x_k, x_{k+1}]$, имеет место следующая оценка погрешности:

$$|R^p(s)| = |u(s) - U_k^h(s)| \leq C_1 h_k^2 \max_{s \in [x_k, x_{k+1}]} |u''(s)|, \quad C_1 = \frac{1}{8}.$$

2. Если $\varphi_0(s) = \sin s$, $\varphi_1(s) = \cos s$, то

$$w_k^T(s) = \frac{\sin(s - x_{k+1})}{\sin(x_k - x_{k+1})}, \quad s \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$w_{k+1}^T(s) = \frac{\sin(s - x_k)}{\sin(x_{k+1} - x_k)}, \quad s \in [x_k, x_{k+1}].$$

При этом на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ при $t \in [0, 1]$ получаем $w_k^T(x_k + th_k) = 1 - t + O(h_k^2)$, $w_{k+1}^T(x_k + th_k) = t + O(h_k^2)$. Отметим также, что в тригонометрическом случае оценка погрешности при $s \in [x_k, x_{k+1}]$ имеет вид

$$|R^T(s)| \leq C_2 h_k^2 \|u + u''\|_{[x_k, x_{k+1}]}, \quad h_k < \pi/2. \quad (2)$$

3. Если $\varphi_0(s) = 1$, $\varphi_1(s) = e^s$, то

$$w_k^{ep}(s) = \frac{e^s - e^{x_{k+1}}}{e^{x_k} - e^{x_{k+1}}}, \quad s \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$w_{k+1}^{ep}(s) = \frac{e^s - e^{x_k}}{e^{x_{k+1}} - e^{x_k}}, \quad s \in [x_k, x_{k+1}].$$

Отметим, что в этом случае оценка погрешности при $s \in [x_k, x_{k+1}]$ имеет вид

$$|R^{ep}(s)| \leq C_3 h_k^2 e^{x_{k+1}} \|u' - u''\|_{[x_k, x_{k+1}]}. \quad (3)$$

4. Если $\varphi_0(s) = 1$, $\varphi_1(s) = e^{-s}$, то

$$w_k^{eo}(s) = \frac{e^{-s} - e^{-x_{k+1}}}{e^{-x_k} - e^{-x_{k+1}}}, \quad s \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$w_{k+1}^{eo}(s) = \frac{e^{-s} - e^{-x_k}}{e^{-x_{k+1}} - e^{-x_k}}, \quad s \in [x_k, x_{k+1}].$$

Отметим, что в этом случае оценка погрешности при $s \in [x_k, x_{k+1}]$ имеет вид

$$|R^{eo}(s)| \leq C_4 h_k^2 e^{-x_k} \|u' + u''\|_{[x_k, x_{k+1}]}. \quad (4)$$

В оценках (2)–(4): C_2, C_3, C_4 – некоторые положительные константы [28]. В неполиномиальном случае имеем

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} w_k(s) ds = \frac{h_k}{2} + O(h_k^2), \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} w_k(s) ds = \frac{h_k}{2} + O(h_k^2).$$

2.3. Построение каркаса приближенного решения. В этом разделе для упрощения рассуждений рассмотрим применение полиномиальных сплайнов на равномерной сетке узлов. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Представим интеграл из уравнения (1) в виде

$$S(x) = \int_a^b K(x, s) u(s) ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, s) u(s) ds.$$

Функцию $u(s)$, $s \in [x_k, x_{k+1}]$, приближенно заменим сплайновой аппроксимацией второго порядка на каждом сеточном интервале и, отбрасывая погрешность, получим

$$u(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, s) u_k^h(s) ds = f(x), \tag{5}$$

где $u_k^h(s) = u_k w_k(s) + u_{k+1} w_{k+1}(s)$, $s \in [x_k, x_{k+1}]$, $u_k \approx u(x_k)$.

Обозначим

$$V(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, s) u_k^h(s) ds = \sum_{k=0}^n u_k S_k(x),$$

где

$$S_0(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, s) \frac{s - x_1}{x_0 - x_1} ds,$$

$$S_k(x) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} K(x, s) \frac{s - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} ds + \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, s) \frac{s - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} ds, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$S_n(x) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} K(x, s) \frac{s - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} ds.$$

Далее, для определения в узлах сетки приближенного решения $u_k \approx u(x_k)$ полагаем в уравнении (5) $x = x_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, и получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$MU = F, \tag{6}$$

где $U = (u_0, \dots, u_n)^T$, $F = (f_0, \dots, f_n)^T$, $f_k = f(x_k)$, а элементы матрицы

$$M = \begin{pmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

таковы:

$$m_{00} = 1 - S_0(x_0), \quad m_{0n} = -S_n(x_0), \quad m_{n0} = -S_0(x_n), \quad m_{nn} = 1 - S_n(x_n).$$

Докажем следующее, вообще говоря, очевидное утверждение.

Теорема 1. Матрица M имеет диагональное преобладание.

Доказательство. Применяя интегральную теорему о среднем, получаем

$$S_k(x) = \frac{K(x, z_{k-1})h}{2} + \frac{K(x, z_k)h}{2},$$

где $z_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k]$, $z_k \in [x_k, x_{k+1}]$, и далее имеем при $k = 1, 2, \dots, n-1$ следующие неравенства:

$$|S_0(x)| \leq hq/2, \quad |S_k(x)| \leq hq, \quad |S_n(x)| \leq hq/2.$$

После несложных вычислений получаем, что матрица M системы уравнений (6) имеет диагональное преобладание, причем

$$|m_{ii}| - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n |m_{ij}| \geq 1 - q.$$



3. Устойчивость и сходимость. Как известно, из теорем об аппроксимации и устойчивости каркасов следует сходимости каркасов приближенного решения к каркасу точного решения интегрального уравнения. Имеем

$$u(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, s) u_k^h(s) ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, s) R(s) ds + f(x).$$

Пусть k таково, что $u_k = \max(u_0, \dots, u_n)$.

Отбрасывая погрешность, получаем

$$|u_k| \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, s) u_k^h(s) ds \right| + |f(x)|.$$

Отсюда

$$|u_k| \leq \sum_{k=0}^n |u_k S_k(x)| + |f(x)|.$$

Положив $x = x_k$, имеем

$$|u_k| \leq q |u_k| + |f(x_k)|,$$

откуда

$$|u_k| \leq \frac{1}{1-q} |f(x_k)|.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\|u\|_C \leq \frac{1}{1-q} \|f\|_C.$$

Далее докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $u \in C^2[0, 1]$, $f \in C^1[0, 1]$, на промежутке $[0, 1]$ построена равномерная сетка узлов $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ с шагом h ,

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |K(x, s)| ds < 1.$$

тогда для $x \in [x_m, x_{m+1}]$ справедлива оценка

$$|u(x) - u_h^k(x_m)| \leq \left(\max_{x \in [x_m, x_{m+1}]} q(x) + 1 \right) \frac{h^2}{8} \max_{x \in [x_m, x_{m+1}]} |u''(x)| + \max_{x \in [x_m, x_{m+1}]} |f'(x)| h.$$

Доказательство. В уравнении

$$u(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, s) u(s) ds = f(x)$$

заменим $u(x)$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ сплайновым приближением $u_k^h(s) = u_k w_k(s) + u_{k+1} w_{k+1}(s)$. Пусть $(u_0, \dots, u_n)^T$ — вектор каркаса приближенного решения, $u_m \approx u(x_m)$. При этом на сеточном промежутке получаем погрешность $R_k(s)$: $R_k(s) = u(s) - u_k^h(s)$. Тогда

$$u_m = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x_m, s) u_k^h(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x_m, s) R_k(s) ds + f(x_m).$$

Далее, отбрасывая погрешность, получаем

$$\begin{aligned} u(x) - u_m &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, s) u(s) ds - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x_m, s) u_k^h(s) ds - \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x_m, s) R(s) ds + f(x) - f(x_m). \end{aligned}$$

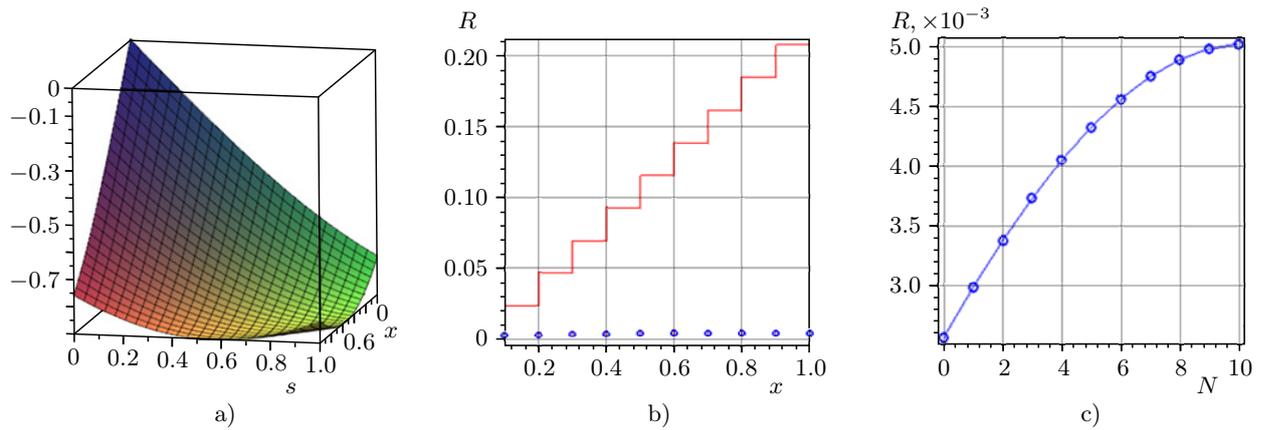


Рис. 1. Иллюстрации к примеру 1: а) ядро интегрального уравнения $K(x, s)$; б) фактическая (синий цвет) и теоретическая (красный цвет) погрешности; в) график абсолютной величины фактической погрешности

Fig. 1. Illustrations for example 1: a) the kernel of the integral equation $K(x, s)$; b) the actual (blue) and theoretical (red) errors; c) the graph of the absolute value of the actual error

Обозначим

$$q_m = \max_{x \in [x_m, x_{m+1}]} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |K(x, s)| ds.$$

Таким образом, при $x \in [x_k, x_{k+1}]$ получаем

$$\begin{aligned} R(x) = |u(x) - u_m| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |K(x, s)| \cdot |u(s) - u_k^h(s)| ds + |f(x) - f(x_m)| \leq \\ &\leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in [x_m, x_{m+1}]} |u''(x)| + q_m \frac{h^2}{8} \max_{x \in [x_m, x_{m+1}]} |u''(x)| + \max_{x \in [x_m, x_{m+1}]} |f'(x)| h. \end{aligned}$$

Замечание 1. Оценка погрешности в теореме 2 несколько завышена. Об этом свидетельствуют примеры 1 и 2.

Пример 1. Пусть ядро интегрального уравнения имеет вид $K(x, s) = -0.9 \sin(x + s)$ (график на рис. 1 а), а правая часть уравнения строится по известному решению $u(x) = x^2$. Для этого случая на рис. 1 в представлены фактическая и теоретическая погрешности. Отдельно на рис. 1 с показан график абсолютной величины фактической погрешности (по оси абсцисс отложены номера узлов сетки N). Здесь использовались полиномиальные базисные сплайны.

Пример 2. Пусть ядро интегрального уравнения имеет вид

$$K(x, s) = \frac{0.08}{\cos(x + s) + 0.5}, \tag{7}$$

а правую часть уравнения вычисляем по точному решению $u(x) = e^x$.

График ядра представлен на рис. 2 а. На рис. 2 б представлены графики теоретической и фактической погрешностей. На рис. 2 с отдельно представлен график фактической погрешности в узлах сетки (погрешность каркаса приближенного решения).

Замечание 2. Отметим, что уравнение

$$q \frac{h^2}{8} \max_{x \in [a, b]} |u''(x)| = \varepsilon$$

может быть использовано для априорного определения количества промежутков, требуемых для построения приближенного решения с точностью ε при равномерной сетке узлов с шагом h . Это показано в примере 3.

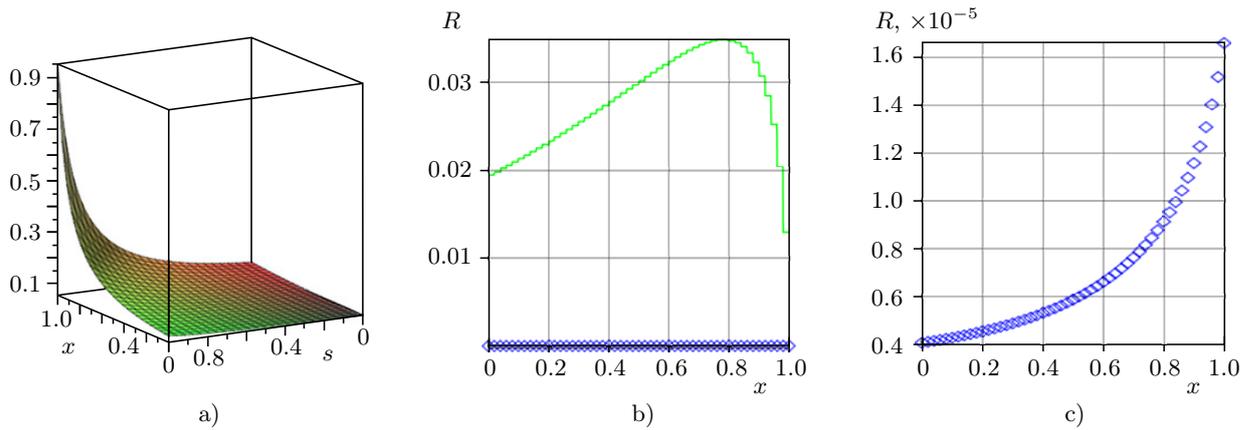


Рис. 2. Иллюстрации к примеру 2: а) ядро интегрального уравнения $K(x, s)$; б) графики теоретической (зеленый цвет) и фактической (синий цвет) погрешностей; в) график фактической погрешности

Fig. 2. Illustrations for example 2: a) the kernel of the integral equation $K(x, s)$; b) graphs of theoretical (green) and actual (blue) errors; c) graph of actual error

Пример 3. Пусть $a = 0, b = 1$. В этом случае для ядра $K(x, s)$ (7) имеем оценку $|K(x, s)| < q = 0.91$. Предположим, что верхняя граница второй производной неизвестной функции удовлетворяет неравенству $|u''| \leq 2.8$. Положим $\varepsilon = 10^{-3}$. Решим уравнение

$$\frac{2.8 h^2}{8} = \varepsilon.$$

В результате получим $1/h \approx 18$. Далее решаем интегральное уравнение с помощью полиномиальных сплайнов второго порядка аппроксимации при $n = 18$ и получаем фактическое приближенное решение и фактическую погрешность приближенного решения (рис. 3).

В следующем разделе приведены примеры, подтверждающие эффективность использования предлагаемого численного метода. Пример 4 подтверждает, что применение классических методов решения интегрального уравнения (метод средних прямоугольников, метод трапеций) может давать большую погрешность при том же количестве узлов, чем предложенный авторами метод. Пример 5 показывает удобство применения метода на больших промежутках интегрирования, даже если решение уравнения — быстро растущая функция. Применение предложенного метода не вызвало затруднений для решения нелинейного уравнения. В примере 6 показана эффективность применения предлагаемого метода в случае, если решение интегрального уравнения разрывно. В этом же примере показано применение неравномерной сетки, при этом получаем меньшую погрешность. Отметим также, что уравнение из примера 6 нелинейное.

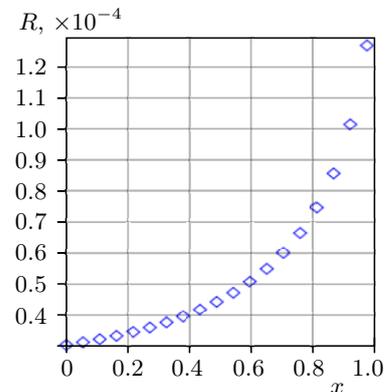


Рис. 3. График фактической погрешности, $n = 18$

Fig. 3. Actual error graph, $n = 18$

4. Результаты численных экспериментов. Рассмотрим результаты решения модельных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$u(x) - \int_{-5}^5 \frac{u(s)}{200 + \cos(s) + x} ds = f(x), \quad x \in [-5, 5],$$

где правая часть строится по точному решению $u(x) = \cos(x + 1/4)$.

Вычисления выполнялись в среде Maple, Digits=10 (переменная окружения, отвечающая за количество знаков в мантиссе числа с плавающей точкой). При $n = 20$ получаем графики точного и приближенного решений, представленные на рис. 4 а, погрешность решения представлена на рис. 4 в.

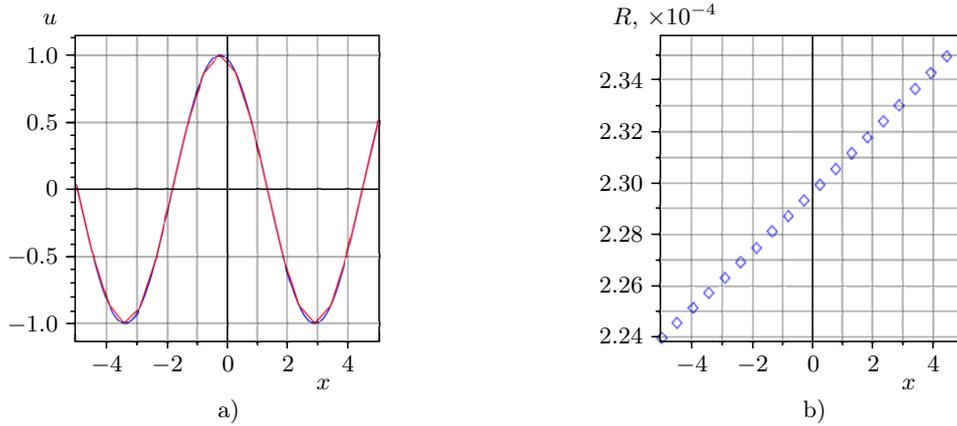


Рис. 4. Иллюстрации к примеру 4: а) точное (синий цвет) и приближенное (красный цвет) решения; б) погрешность приближенного решения

Fig. 4. Illustrations for example 4: a) exact (blue) and approximate (red) solutions; б) error of the approximate solution

На рис. 5 а, б представлены результаты решения этого же интегрального уравнения с применением составной квадратурной формулы средних прямоугольников при $n = 20$. На рис. 5 с, d представлены результаты решения этого же интегрального уравнения с применением составной квадратурной формулы трапеций при $n = 20$.

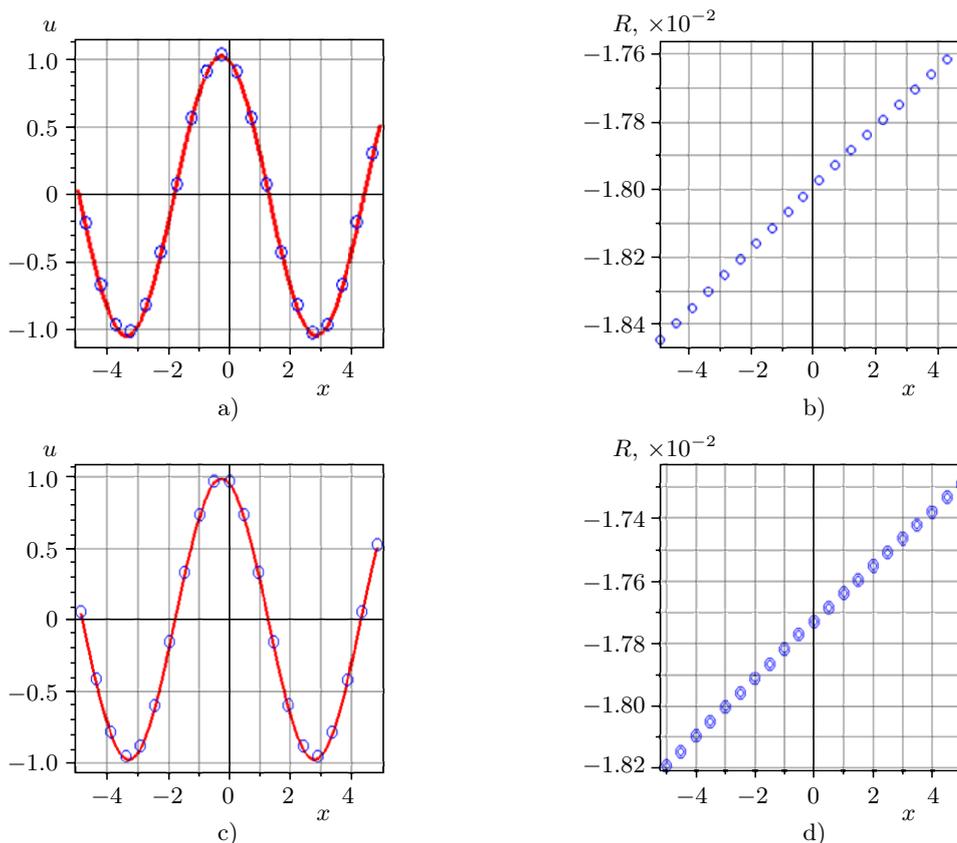


Рис. 5. Иллюстрации к примеру 4, применение составных квадратурных формул: а) точное (синий цвет) и приближенное (красный цвет) решения (метод средних прямоугольников); б) погрешности решения методом средних прямоугольников; с) точное (синий цвет) и приближенное (красный цвет) решения (метод трапеций); д) погрешности решения методом трапеций

Fig. 5. Illustrations for example 4, application of compound quadrature formulas: a) exact (blue) and approximate (red) solutions (midpoint rectangles rule); б) errors of the solution by the midpoint rectangles rule; с) exact (blue) and approximate (red) solutions (trapezoids rule); д) errors of the solution by the trapezoids rule



Пример 5. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода из работы [30]

$$u(x) - \int_a^b \frac{1}{e^x + e^s} u(s) ds = e^x + \ln\left(\frac{1 + e^x}{e^b + e^x}\right), \quad x \in [a, b].$$

Здесь точное решение $u(x) = e^x$. Предварительно преобразуем уравнение. Для этого введем новую неизвестную функцию

$$v(x) = u(x) - f(x)$$

и получим уравнение вида

$$v(x) - \int_a^b K(x, s) v(s) ds = \int_a^b K(x, s) f(s) ds.$$

Сначала рассмотрим решение этого уравнения, когда пределы интегрирования таковы: $a = 0, b = 1$. Графики точного и приближенного решений при $n = 20$ представлены на рис. 6 а. Погрешность приближенного решения в узлах сетки представлена на рис. 6 б.

Теперь рассмотрим решение уравнения, когда пределы интегрирования $a = 0, b = 100$. На рис. 7 а представлены графики точного и приближенного решений модифицированного уравнения ($n = 150$). На рис. 7 б представлен график погрешности приближенного решения модифицированного уравнения, на рис. 7 с представлен график приближенного решения исходного уравнения, а на рис. 7 д представлена фактическая погрешность этого приближенного решения.

Замечание 3. Авторы рассматривали разные варианты предварительного преобразования исходного уравнения. Наиболее эффективным оказалось предложение профессора В. М. Рябова — предварительно преобразовать уравнение с использованием правой части исходного уравнения.

В работе [30] никакие предварительные преобразования не применялись.

Пример 6. Рассмотрим пример решения нелинейного уравнения Фредгольма второго рода [31]

$$u(x) - \int_0^1 xs \sin(u(s)) ds = f(x), \quad x \in [0, 1].$$

Здесь правая часть $f(x)$ строится по точному решению

$$u(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 0.5, \\ \sqrt{x} & \text{при } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

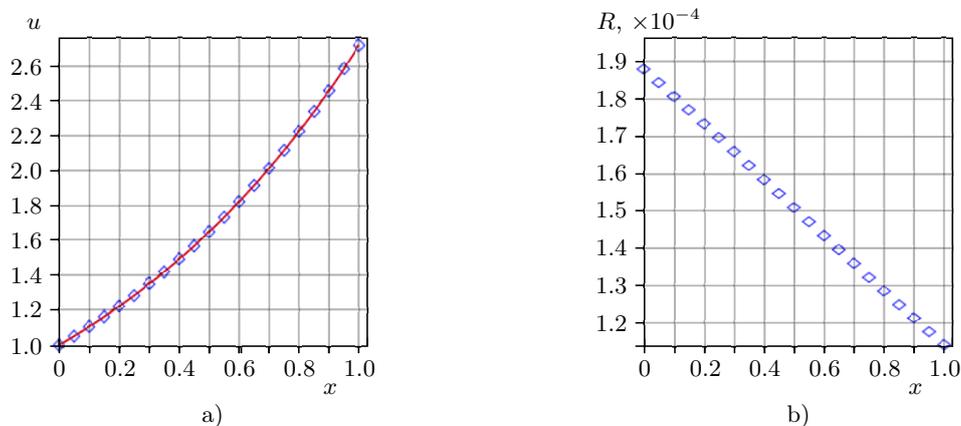


Рис. 6. Иллюстрации к примеру 5: а) точное решение (непрерывная красная линия) и приближенное решение (синие метки); б) погрешность приближенного решения

Fig. 6. Illustrations for the example 5: a) exact solution (continuous red line) and approximate solution (blue labels); b) error of the approximate solution

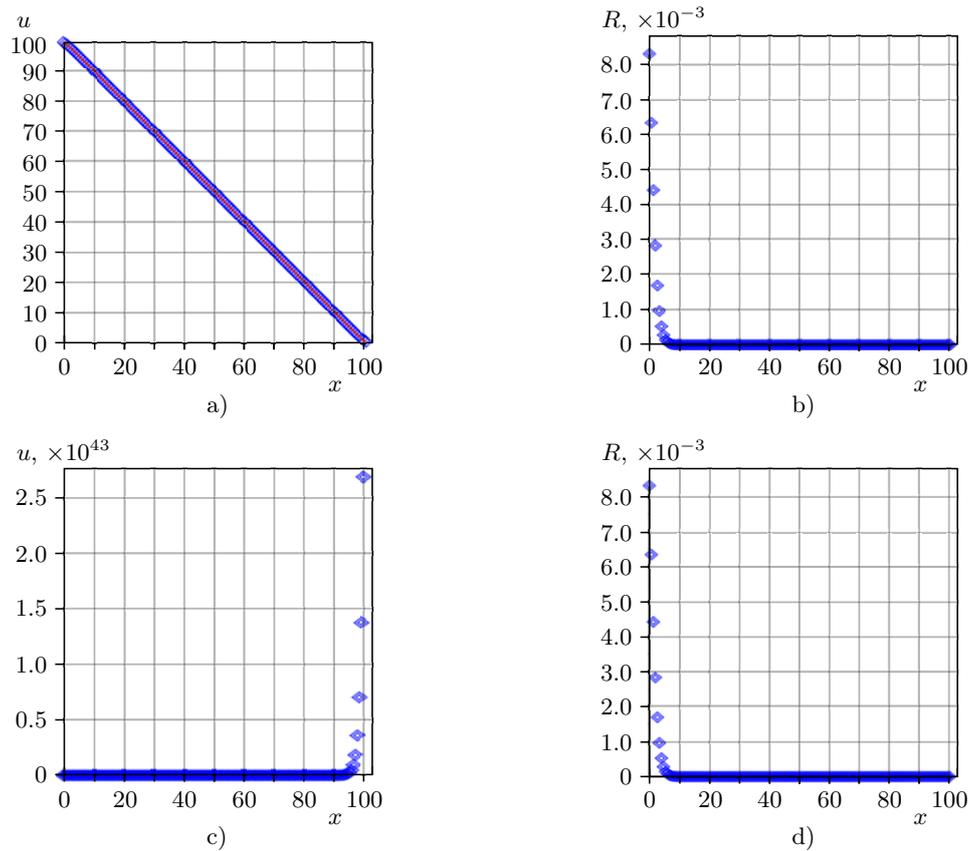


Рис. 7. Иллюстрации к примеру 5, $a = 0$, $b = 100$: а) точное и приближенное решения модифицированного уравнения; б) фактическая погрешность приближенного решения модифицированного уравнения; в) приближенное решение исходного уравнения; г) фактическая погрешность приближенного решения исходного уравнения

Fig. 7. Illustrations for example 5, $a = 0$, $b = 100$: а) exact and approximate solutions of the modified equation; б) actual error of the approximate solution of the modified equation; в) approximate solution of the original equation; г) actual error of the approximate solution of the original equation

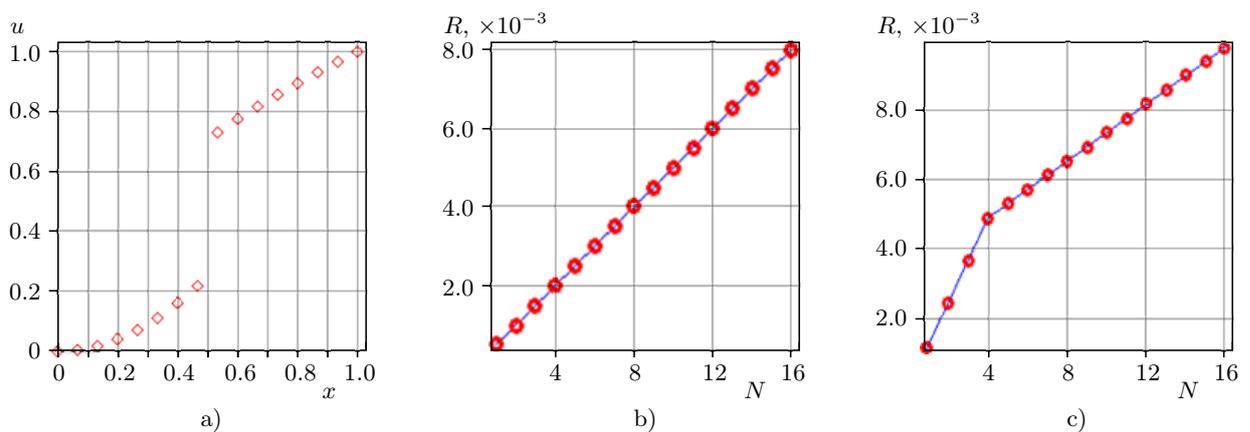


Рис. 8. Иллюстрации к примеру 6: а) каркас приближенного решения, полученный с применением полиномиальных сплайнов; б) погрешность приближенного решения при использовании полиномиальных сплайнов на равномерной сетке узлов; в) погрешность приближенного решения при использовании полиномиальных сплайнов на неравномерной сетке узлов

Fig. 8. Illustrations for the example 6: а) skeleton of the approximate solution obtained using polynomial splines; б) error of the approximate solution when using polynomial splines on a uniform grid of nodes; в) error of the approximate solution when using polynomial splines on a non-uniform grid of nodes



Таблица 1. Фактические погрешности в зависимости от базисных сплайнов
 Table 1. Actual errors depending on the basis splines

Номер примера Example number	$\varphi_0(s) = 1,$ $\varphi_1(s) = s$	$\varphi_0(s) = 1,$ $\varphi_1(s) = e^s$	$\varphi_0(s) = 1,$ $\varphi_1(s) = e^{-s}$	$\varphi_0(s) = \cos s,$ $\varphi_1(s) = \sin s$
$n = 8$				
1	$0.133 \cdot 10^{-2}$	$0.705 \cdot 10^{-3}$	$0.195 \cdot 10^{-2}$	$0.153 \cdot 10^{-2}$
2	$0.635 \cdot 10^{-3}$	$0.206 \cdot 10^{-9}$	$0.127 \cdot 10^{-2}$	$0.127 \cdot 10^{-2}$
4	$0.135 \cdot 10^{-2}$	$0.102 \cdot 10^{-2}$	$0.168 \cdot 10^{-2}$	$0.682 \cdot 10^{-9}$
$n = 16$				
1	$0.332 \cdot 10^{-3}$	$0.176 \cdot 10^{-3}$	$0.489 \cdot 10^{-3}$	$0.383 \cdot 10^{-3}$
2	$0.160 \cdot 10^{-3}$	$0.112 \cdot 10^{-9}$	$0.321 \cdot 10^{-3}$	$0.321 \cdot 10^{-3}$
4	$0.332 \cdot 10^{-3}$	$0.248 \cdot 10^{-3}$	$0.416 \cdot 10^{-3}$	$0.674 \cdot 10^{-9}$
$n = 32$				
1	$0.832 \cdot 10^{-4}$	$0.440 \cdot 10^{-4}$	$0.122 \cdot 10^{-3}$	$0.957 \cdot 10^{-4}$
2	$0.402 \cdot 10^{-4}$	$0.240 \cdot 10^{-9}$	$0.805 \cdot 10^{-4}$	$0.805 \cdot 10^{-4}$
4	$0.828 \cdot 10^{-4}$	$0.617 \cdot 10^{-4}$	$0.103 \cdot 10^{-3}$	$0.672 \cdot 10^{-9}$
$n = 64$				
1	$0.208 \cdot 10^{-4}$	$0.110 \cdot 10^{-4}$	$0.305 \cdot 10^{-3}$	$0.239 \cdot 10^{-4}$
2	$0.100 \cdot 10^{-4}$	$0.143 \cdot 10^{-9}$	$0.201 \cdot 10^{-4}$	$0.201 \cdot 10^{-4}$
4	$0.206 \cdot 10^{-4}$	$0.154 \cdot 10^{-4}$	$0.259 \cdot 10^{-4}$	$0.670 \cdot 10^{-9}$
$n = 128$				
1	$0.519 \cdot 10^{-5}$	$0.275 \cdot 10^{-5}$	$0.764 \cdot 10^{-5}$	$0.598 \cdot 10^{-5}$
2	$0.251 \cdot 10^{-5}$	$0.219 \cdot 10^{-9}$	$0.503 \cdot 10^{-5}$	$0.503 \cdot 10^{-5}$
4	$0.517 \cdot 10^{-5}$	$0.385 \cdot 10^{-5}$	$0.645 \cdot 10^{-5}$	$0.669 \cdot 10^{-9}$

На рис. 8а представлено приближенное решение уравнения. На рис. 8b показана погрешность приближенного решения, полученного с применением полиномиальных сплайнов при $n = 16$. Максимум абсолютной величины погрешности равен 0.00797. Для наглядности на этом графике и далее точки соединены линией.

Хороший результат дает применение неравномерной сетки узлов. Построим неравномерную сетку узлов следующим образом. На промежутке $[0, 0.5]$ построим сетку с шагом $h = 0.5/4$, а на промежутке $[0.5, 1]$ построим сетку с шагом $h = 0.5/12$. График абсолютной величины погрешности приближенного решения, полученного с применением полиномиальных сплайнов при $n = 16$ на неравномерной сетке узлов, приведен на рис. 8с. Таким образом, при одном и том же количестве узлов мы получили меньшую погрешность на неравномерной сетке по сравнению с погрешностью на равномерной сетке. Максимум абсолютной величины погрешности на неравномерной сетке равен 0.00490. На рис. 8b,с по оси абсцисс отложены узлы сетки.

В табл. 1 показано сравнение фактических погрешностей в зависимости от используемых базисных сплайнов. Напомним, что в случае тригонометрических сплайнов есть ограничение: $h < \pi/2$. В примере 2 лучшую погрешность дали экспоненциальные сплайны, это объясняется тем, что экспоненциальная система сплайнов обеспечивает точность решения на экспонентах (а решение уравнения есть экспонента). В примере 4 наименьшую погрешность дали тригонометрические сплайны, так как решение есть косинус. Напомним, что при вычислениях использовался параметр `Digits=10`, поэтому в примере 4 погрешность медленно убывает при увеличении количества узлов сетки. Результаты вычислений, представленные в табл. 1, подтверждают численную устойчивость вычислений.

5. Заключение. В работе представлены результаты численного решения линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Особенность построения численного метода для решения интегральных уравнений второго рода с применением локальных сплайновых аппроксимаций заключается в том, что основная погрешность вно-

сится только при замене неизвестного решения сплайновой аппроксимацией второго порядка в интегральной части уравнения. Это означает, что для сходимости метода достаточно, чтобы решение было непрерывной, непрерывно дифференцируемой или дважды непрерывно дифференцируемой функцией на сеточных интервалах. При уменьшении шага сетки мы получаем каркас приближенного решения со сколь угодно малой погрешностью, которая ограничена только количеством цифр в мантиссе числа. При этом основное решение задачи сводится к вычислению интегралов от произведения ядра и базисной функции. Погрешность вычислений может быть уменьшена за счет того, что во многих случаях эти интегралы можно вычислить точно. Когда интегралы невозможно (или затруднительно) вычислить точно, для их вычисления можно использовать различные квадратурные формулы. При этом на искомое решение никакая дополнительная информация о гладкости решения интегрального уравнения не накладывается. В этом состоит основное отличие предлагаемого метода от других методов, связанных с применением квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов, так как обычно, при применении квадратурных формул высокой точности, накладываются соответствующие ограничения на гладкость подынтегральной функции. К преимуществам использования локальных полиномиальных и неполиномиальных сплайнов второго порядка аппроксимации следует также отнести удобство их применения на неравномерной сетке узлов.

Отметим также, что система линейных алгебраических уравнений имеет диагональное преобладание, поэтому при ее решении методом Гаусса вносимые погрешности будут незначительными.

Подводя итог, подчеркнем, в чем состоит новизна работы: погрешность минимизируется за счет того, что интегралы $\int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, s) w_j(s) ds$ не содержат искомое решение в подынтегральном выражении. Таким образом, при вычислении интеграла мы не ограничены типом используемой квадратурной формулы. При этом достаточно предполагать, что искомое решение есть кусочно-гладкая функция, возможные точки разрыва следует включать в узлы сетки.

Новизна состоит также в применении неполиномиальных локальных базисных сплайнов, что в итоге дает меньшую погрешность решения интегрального уравнения. При применении соответствующих неполиномиальных базисных сплайнов можно получить меньшую погрешность, если используемая сплайновая аппроксимация точна на соответствующем множестве функций. Например, если предполагаем, что решение тригонометрического или экспоненциального типа.

Локальные сплайны второго порядка аппроксимации легко использовать на неравномерных сетках. В дальнейшем предполагается особое внимание уделить решению интегральных уравнений на неравномерных сетках узлов.

Список литературы

1. *Abel N.H.* Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Größen x und y , wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function von z, x und y ist // *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik.* 1826. **1826**, N 1. 11–15. doi [10.1515/cr11.1826.1.11](https://doi.org/10.1515/cr11.1826.1.11).
2. *Volterra V.* Sopra un problema di elettrostatica // *Nuovo Cim.* 1884. **16**. 49–57. doi [10.1007/BF02737266](https://doi.org/10.1007/BF02737266).
3. *Fredholm I.* Sur une classe d'équations fonctionnelles // *Acta Math.* 1903. **27**, N 1. 365–390. doi [10.1007/BF02421317](https://doi.org/10.1007/BF02421317).
4. *Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.* Решение интегральных уравнений Фредгольма методом замены интеграла квадратурой с двенадцатым порядком погрешности в матричном виде // *Вестник Пермского университета.* 2022. **4**, № 59. 9–17. doi [10.17072/1993-0550-2022-4-9-17](https://doi.org/10.17072/1993-0550-2022-4-9-17).
5. *Воеводин В.В., Свешников А.Г., Тыртышиников Е.Е.* Эффективный численный метод решения интегрального уравнения второго рода в задачах электродинамики // *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика.* 1980. № 1. 14–26.
6. *Моисеев Т.Е.* Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // *Дифференциальные уравнения.* 2011. **47**, № 10. 1446–1451.
7. *Николаев М.В., Никитин А.А.* О существовании и единственности решения одного нелинейного интегрального уравнения // *Доклады Академии наук. Математика.* 2019. **488**, № 6. 595–598. doi [10.31857/S0869-56524886595-598](https://doi.org/10.31857/S0869-56524886595-598).
8. *Кадиев Р.И., Поносков А.В.* Существование и единственность решений нелинейных функционально-интегральных уравнений Ито // *Дифференциальные уравнения.* 2024. **60**, № 9. 1167–1189. doi [10.31857/S0374064124090027](https://doi.org/10.31857/S0374064124090027).
9. *Van Duzer T., Turner C.W.* Principles of superconductive devices and circuits. London: Pearson, 2008.



10. *Chang W.* Numerical calculation of the inductances of a multi-superconductor transmission line system // IEEE Transactions on Magnetics. 1981. **17**, N 1. 764–766. doi [10.1109/TMAG.1981.1060982](https://doi.org/10.1109/TMAG.1981.1060982).
11. *Ханаев М.М.* Метод граничных интегральных уравнений для одной модели электрического тока в сверхпроводниках // Журн. вычисл. матем. матем. физики. 1998. **38**, № 1. 115–121. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=1967&option_lang=rus.
12. *Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г.* Применение многопроцессорных систем для решения трехмерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода для векторных функций // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**, № 4. 336–343.
13. *Никитин А.А., Николаев М.В.* Исследование интегрального уравнения равновесия с ядрами-куртозианами в пространствах различных размерностей // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2018. № 3. 11–19.
14. *Михлин С.Г.* Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
15. *Ханаев М.М.* Численное решение интегро-дифференциального уравнения для листового тока // Дифференциальные уравнения. 2005. **41**, № 7. 970–974.
16. *Mirzaee F., Samadyar N.* Application of Bernoulli wavelet method for estimating a solution of linear stochastic Itô–Volterra integral equations // Multidiscip. Model. Mater. Struct. 2019. **15**, N 3. 575–598. doi [10.1108/MMMS-04-2018-0075](https://doi.org/10.1108/MMMS-04-2018-0075).
17. *Cerna D., Finek V.* Galerkin method with new quadratic spline wavelets for integral and integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. 2020. **363**. 426–443. doi [10.1016/j.cam.2019.06.033](https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.06.033).
18. *Рябенский В.С.* Локальные формулы гладкого восполнения и гладкой интерполяции функций по их значениям в узлах неравномерной прямоугольной сетки. Препринт № 21. М.: Ин-т Прикл. Матем. им. Келдыша, 1974.
19. *Михлин С.Г.* Вариационно-сеточная аппроксимация // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. 1974. **48**. 32–188.
20. *Таур Б., Сегини С., Гибби Х., Гият М.* Два численных метода решения линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма со слабо сингулярным ядром // Вычислительные методы и программирование. 2022. **23**, № 2. 117–136. doi [10.26089/NumMet.v23r208](https://doi.org/10.26089/NumMet.v23r208).
21. *Mirzaee F., Alipour S.* An efficient cubic *B*-spline and bicubic *B*-spline collocation method for numerical solutions of multidimensional nonlinear stochastic quadratic integral equations // Math. Methods Appl. Sci. 2019. **43**, N 1. 384–397. doi [10.1002/mma.5890](https://doi.org/10.1002/mma.5890).
22. *Assari P., Asadi-Mehregan F., Dehghan M.* The implication of local thin plate splines for solving nonlinear mixed integro-differential equations based on the Galerkin scheme // Numer. Math. 2019. **12**, N 4. 1066–1092. doi [10.4208/nmtma.0A-2018-0077](https://doi.org/10.4208/nmtma.0A-2018-0077).
23. *Assari P., Cuomo S.* The numerical solution of fractional differential equations using the Volterra integral equation method based on thin plate splines // Engineering with Computers. 2019. **35**, N 4. 1391–1408. doi [10.1007/s00366-018-0671-x](https://doi.org/10.1007/s00366-018-0671-x).
24. *Assari P., Dehghan M.* On the numerical solution of nonlinear integral equations on non-rectangular domains utilizing thin plate spline collocation method // Proc. Indian Acad. Sci.: Math. Sci. 2019. **129**, N 5. Article 83. doi [10.1007/s12044-019-0511-y](https://doi.org/10.1007/s12044-019-0511-y).
25. *Даугавет И.К.* Теория приближенных методов. Линейные уравнения. СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
26. *Бурова И.Г., Демьянович Ю.К.* Теория минимальных сплайнов. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского унив., 2000.
27. *Бурова И.Г., Демьянович Ю.К.* Минимальные сплайны и их приложения. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского унив., 2010.
28. *Burova I.G.* On left integro-differential splines and Cauchy problem // Int. J. Math. Models Methods Appl. Sci. 2015. **9**. 683–690.
29. *Burova I.G., Alcybeev G.O.* Application of splines of the second order approximation to Volterra integral equations of the second kind. Applications in systems theory and dynamical systems // Int. J. Circuits Syst. Signal Process. 2021. **15**. 63–71. doi [10.46300/9106.2021.15.8](https://doi.org/10.46300/9106.2021.15.8).
30. *Букансус С., Мандэ С., Таур Б., Гибби Х.* Построение обобщенных итерационных методов, используемых для решения интегрального уравнения Фредгольма // Вычислительные методы и программирование. 2022. **23**, № 4. 350–364. doi [10.26089/NumMet.v23r422](https://doi.org/10.26089/NumMet.v23r422).

31. Aziz I., Siraj-ul-Islam, Khan F. A new method based on Haar wavelet for the numerical solution of two-dimensional nonlinear integral equations // J. Comput. Appl. Math. 2014. **272**. 70–80. doi 10.1016/j.cam.2014.04.027.

Поступила в редакцию
7 февраля 2025 г.

Принята к публикации
9 апреля 2025 г.

Информация об авторах

Ирина Герасимовна Бурова — д.ф.-м.н., профессор; Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетская наб., 7/9, 199034, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

Глеб Олегович Алцубеев — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетская наб., 7/9, 199034, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

References

1. N. H. Abel, “Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Größen x und y , wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function von z , x und y ist,” Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **1826** (1), 11–15 (1826). doi 10.1515/crll.1826.1.11.
2. V. Volterra, “Sopra un problema di elettrostatica,” Nuovo Cim. **16**, 49–57 (1884). doi 10.1007/BF02737266.
3. I. Fredholm, “Sur une classe d’équations fonctionnelles,” Acta Math. **27** (1), 365–390 (1903). doi 10.1007/BF02421317.
4. N. K. Volosova, K. A. Volosov, A. K. Volosova, et al., “Solution of the Fredholm Integral Equations Method of Replacing the Integral by a Quadrature with the Twelveth Order of Error in Matrix Form,” Bull. Perm Univ. **4** (59), 9–17 (2022). doi 10.17072/1993-0550-2022-4-9-17.
5. V. V. Voevodin, A. G. Sveshnikov, and E. E. Tyrtshnikov, “An Effective Numerical Method for Solving an Integral Equation of the Second Kind in Problems of Electrodynamics,” Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15: Vychisl. Mat. Kibern., No. 1, 14–26 (1980).
6. T. E. Moiseev, “On an Integral Representation of the Solution of the Laplace Equation with Mixed Boundary Conditions,” Differ. Uravn. **47** (10), 1446–1451 (2011) [Differ. Equ. **47** (10), 1461–1467 (2011)]. doi 10.1134/S0012266111100090.
7. M. V. Nikolaev and A. A. Nikitin, “On the Existence and Uniqueness of a Solution of a Nonlinear Integral Equation,” Dokl. Akad. Nauk **488** (6), 595–598 (2019) [Dokl. Math. **100** (2), 485–487 (2019)]. doi 10.1134/S1064562419050247.
8. R. I. Kadiev and A. Ponosov, “Existence and Uniqueness of Solutions to Nonlinear Functional Integral Itô Equations,” Differ. Uravn. **60** (9), 1167–1189 (2024) [Differ. Equ. **60** (9), 1160–1182 (2024)]. doi 10.1134/S0012266124090040.
9. T. Van Duzer and C. W. Turner, *Principles of Superconductive Devices and Circuits* (Pearson, London, 2008).
10. W. Chang, “Numerical Calculation of the Inductances of a Multi-Superconductor Transmission Line System,” IEEE Tran. Magn. **17** (1), 764–766 (1981). doi 10.1109/TMAG.1981.1060982.
11. M. M. Khapaev, “The Method of Boundary Integral Equations for a Model of Electric Current in Superconductors,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **38** (1), 115–121 (1998) [Comput. Math. Math. Phys. **38** (1), 115–121 (1998)]. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=1967&option_lang=eng.
12. D. V. Lukyanenko and A. G. Yagola, “Application of Multiprocessor Systems for Solving Three-Dimensional Fredholm Integral Equations of the First Kind for Vector Functions,” Numerical Methods and Programming **11** (4), 336–343 (2010).
13. A. A. Nikitin and M. V. Nikolaev, “The Analysis of the Integral Equilibrium Equation with the Kurtic Kernels in Spaces of Different Dimensions,” Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15: Vychisl. Mat. Kibern. No. 3, 11–19 (2018).
14. S. G. Mikhlin, *Applications of Integral Equations to Some Problems of Mechanics, Mathematical Physics and Engineering* (OGIZ Publ., Moscow–Leningrad, 1947) [in Russian].
15. M. M. Khapaev, “Numerical Solution of an Integro-Differential Equation for a Sheet Current,” Differ. Uravn. **41** (7), 970–974 (2005) [Differ. Equ. **41** (7), 1019–1024 (2005)]. doi 10.1007/s10625-005-0243-x.



16. F. Mirzaee and N. Samadyar, “Application of Bernoulli Wavelet Method for Estimating a Solution of Linear Stochastic Itô–Volterra Integral Equations,” *Multidiscip. Model. Mater. Struct.* **15** (3), 575–598 (2019). doi [10.1108/MMMS-04-2018-0075](https://doi.org/10.1108/MMMS-04-2018-0075).
17. D. Cerna and V. Finek, “Galerkin Method with New Quadratic Spline Wavelets for Integral and Integro-Differential Equations,” *J. Comput. Appl. Math.* **363**, 426–443 (2020). doi [10.1016/j.cam.2019.06.033](https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.06.033).
18. V. S. Ryaben’kii, *Local Formulas for Smooth Completion and Smooth Interpolation of Functions by Their Values at the Nodes of a Non-Uniform Rectangular Grid*, Preprint No. 21 (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 1974) [in Russian].
19. S. G. Mikhlin, “Variational-Grid Approximation,” *Zap. Nauch. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova* **48**, 32–188 (1974) [in Russian].
20. B. Tair, S. Segni, H. Guebbai, and M. Ghait, “Two Numerical Treatments for Solving the Linear Integro-Differential Fredholm Equation with a Weakly Singular Kernel,” *Numerical Methods and Programming* **23** (2), 117–136 (2022). doi [10.26089/NumMet.v23r208](https://doi.org/10.26089/NumMet.v23r208).
21. F. Mirzaee and S. Alipour, “An Efficient Cubic B -Spline and Bicubic B -Spline Collocation Method for Numerical Solutions of Multidimensional Nonlinear Stochastic Quadratic Integral Equations,” *Math. Methods Appl. Sci.* **43** (1), 384–397 (2019). doi [10.1002/mma.5890](https://doi.org/10.1002/mma.5890).
22. P. Assari, F. Asadi-Mehregan, and M. Dehghan, “The Implication of Local Thin Plate Splines for Solving Nonlinear Mixed Integro-Differential Equations Based on the Galerkin Scheme,” *Numer. Math.* **12** (4), 1066–1092 (2019). doi [10.4208/nmtma.0A-2018-0077](https://doi.org/10.4208/nmtma.0A-2018-0077).
23. P. Assari and S. Cuomo, “The Numerical Solution of Fractional Differential Equations Using the Volterra Integral Equation Method Based on Thin Plate Splines,” *Eng. Comput.* **35** (4), 1391–1408 (2019). doi [10.1007/s00366-018-0671-x](https://doi.org/10.1007/s00366-018-0671-x).
24. P. Assari and M. Dehghan, “On the Numerical Solution of Nonlinear Integral Equations on Non-Rectangular Domains Utilizing Thin Plate Spline Collocation Method,” *Proc. Indian Acad. Sci.: Math. Sci.* **129** (5), Article 83 (2019). doi [10.1007/s12044-019-0511-y](https://doi.org/10.1007/s12044-019-0511-y).
25. I. K. Daugavet, *Theory of Approximate Methods. Linear Equations* (BKHV-Peterburg, Saint Petersburg, 2006) [in Russian].
26. I. G. Burova and Yu. K. Dem’yanovich, *Theory of Minimal Splines* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2000) [in Russian].
27. I. G. Burova and Yu. K. Dem’yanovich, *Minimal Splines and Their Applications* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2010) [in Russian].
28. I. G. Burova, “On Left Integro-Differential Splines and Cauchy Problem,” *Int. J. Math. Models Methods Appl. Sci.* **9**, 683–690 (2015).
29. I. G. Burova and G. O. Alcybeev, “Application of Splines of the Second Order Approximation to Volterra Integral Equations of the Second Kind. Applications in Systems Theory and Dynamical Systems,” *Int. J. Circuits Syst. Signal Process.* **15**, 63–71 (2021). doi [10.46300/9106.2021.15.8](https://doi.org/10.46300/9106.2021.15.8).
30. S. Boukansous, X. Mande, B. Tair, and H. Guebbai, “Construction of the Generalized Iterative Methods Used for Solution of the Fredholm Integral Equation,” *Numerical Methods and Programming* **23** (4), 350–364 (2022). doi [10.26089/NumMet.v23r422](https://doi.org/10.26089/NumMet.v23r422).
31. I. Aziz, Siraj-ul-Islam, and F. Khan, “A New Method Based on Haar Wavelet for the Numerical Solution of Two-Dimensional Nonlinear Integral Equations,” *J. Comput. Appl. Math.* **272**, 70–80 (2014). doi [10.1016/j.cam.2014.04.027](https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.04.027).

Received
 February 7, 2025

Accepted for publication
 April 9, 2025

Information about the authors

Irina G. Burova — Dr. Sci., Professor; Saint Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Universitetskaya naberezhnaya, 7/9, 199034, Saint Petersburg, Russia.

Gleb O. Alcybeev — Post-graduate Student; Saint Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Universitetskaya naberezhnaya, 7/9, 199034, Saint Petersburg, Russia.