



Математическое моделирование импеданса системы идеальных проводников с учетом сосредоточенных элементов в однородной среде с помощью дополненного интегрального уравнения электрического поля

В. М. Аушев

Т1 Интеграция, Москва, Российская Федерация
МГТУ имени Н. Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0009-0009-3571-5448, e-mail: aushevvm@gmail.com

В. О. Милицин

Т1 Интеграция, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0009-0004-2615-3686, e-mail: vmilitsin@t1.ru

Аннотация: Рассматривается решение уравнений Максвелла для идеальных проводников в однородной среде с помощью поверхностного интегрального уравнения электрического поля, дополненного уравнением непрерывности заряда. Полученная система уравнений дискретизируется с помощью метода Галеркина. Приводится способ построения численной схемы, позволяющей проводить расчет импеданса системы питания печатной платы совместно с размещенными на ней сосредоточенными электрическими компонентами, а также рассмотрены граничные условия, характерные для микроэлектронных устройств. Полученная в ходе дискретизации система линейных уравнений решается итерационно, при этом для ускорения умножения плотных блоков матрицы на вектор неизвестных применяется быстрый метод мультиполей. Верификация методики проведена на примере имеющей аналитическое решение задачи рассеяния монохроматической волны на сфере, а также на задаче моделирования импеданса печатной платы, где проведено сравнение с результатами расчетов с использованием коммерческого программного обеспечения.

Ключевые слова: интегральные уравнения, метод моментов, быстрый метод мультиполей, импеданс системы питания, печатная плата.

Для цитирования: Аушев В.М., Милицин В.О. Математическое моделирование импеданса системы идеальных проводников с учетом сосредоточенных элементов в однородной среде с помощью дополненного интегрального уравнения электрического поля // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 1. 85–97. doi 10.26089/NumMet.v26r106.

Mathematical modeling of impedance for a perfect electric conductors system with lumped elements in a homogeneous medium using the augmented electric field integral equation

Viktor M. Aushev

T1 Integration, Moscow, Russia

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

ORCID: 0009-0009-3571-5448, e-mail: aushevvm@gmail.com

Vladimir O. Militsin

T1 Integration, Moscow, Russia

ORCID: 0009-0004-2615-3686, e-mail: vmilitsin@t1.ru

Abstract: The solution of Maxwell's equations for perfect electric conductors in a homogeneous medium is considered using an augmented electric field integral equation (A-EFIE). The resulting system of equations is discretized using the Galerkin method. The method for constructing a numerical scheme is presented, which allows calculating the impedance of a printed circuit board power system together with the lumped electrical components placed on it. Additionally, boundary conditions typical for microelectronic devices are considered. The system of linear equations obtained through discretization is solved iteratively, with the fast multipole method used to accelerate the matrix-vector product. The methodology was verified using the example of scattering of a monochromatic wave by a sphere, for which an analytical solution exists, as well as through the impedance modeling of a printed circuit board, where the results were compared with those obtained from commercial software.

Keywords: augmented electric field integral equation, method of moments, fast multipole method, power delivery network, printed circuit board.

For citation: V. M. Aushev, V. O. Militsin, "Mathematical modeling of impedance for a perfect electric conductors system with lumped elements in a homogeneous medium using the augmented electric field integral equation," *Numerical Methods and Programming*. 26 (1), 85–97 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r106.

1. Введение. Моделирование электромагнитных явлений играет ключевую роль в различных областях науки и техники, от проектирования радиоэлектронных устройств до анализа сложных электромагнитных сред. Практически каждое электронное устройство требует точных расчетов параметров напряжения, тока и полей для обеспечения его корректной работы. В ряде случаев достаточно использования упрощенных методов, таких как анализ электрических цепей с применением законов Кирхгофа, однако для более сложных задач, например в высокочастотных режимах или при взаимодействии электромагнитных волн со сложными трехмерными объектами, необходимо решение полных уравнений Максвелла.

Будем рассматривать уравнения Максвелла в частотной области, для численного решения которых применяются в основном два подхода: метод конечных элементов (МКЭ) [1] и метод моментов (ММ) [2, 3]. МКЭ базируется на дифференциальной постановке задачи, в то время как ММ опирается на интегральную формулировку. МКЭ получил широкое распространение благодаря своей универсальности и относительной простоте программной реализации. В то же время ММ, хотя и обладает такими преимуществами, как необходимость дискретизации только поверхности объекта (в случае поверхностных интегральных уравнений) и точное выполнение условий излучения на бесконечности, требует решения плотных систем линейных уравнений и вычисления сингулярных или гиперсингулярных интегралов. Решение таких систем линейных уравнений требует значительных вычислительных ресурсов, так как сложность задачи возрастает кубически с увеличением числа неизвестных при использовании прямых методов решения. Для уменьшения вычислительных затрат используют итерационные методы, сложность которых составляет $O(N^2)$, а для дальнейшего ускорения применяются различные быстрые алгоритмы, позволяющие



сократить сложность до $O(N)$ или $O(N \log N)$ [4]. Однако подобные алгоритмы требуют дополнительного контроля устойчивости и сходимости, что существенно усложняет программную реализацию и ограничивает масштабы внедрения ММ по сравнению с МКЭ.

Активное развитие численных методов решения интегральных уравнений электромагнетизма в последние десятилетия [5] стало результатом стремительного прогресса в области высокотехнологичных устройств. В России количество исследований в данной области невелико, причем особенно ограничено внимание к их программной реализации; к работам в этом направлении можно отнести [6–8]. Особую сложность представляет моделирование электромагнитных процессов в микроэлектронике, где необходимо производить расчет в широком диапазоне частот для сложной многомасштабной геометрии, например при проектировании печатных плат. Несмотря на наличие некоторых работ в этом направлении [9, 10], комплексное моделирование трехмерных структур со сосредоточенными электрическими компонентами остается редкой темой для исследований [11].

В данной работе предложен метод решения электромагнитных задач в микроэлектронике на основе интегрального уравнения для электрического поля, дополненного уравнением непрерывности заряда, что обеспечивает устойчивость численных расчетов в широком диапазоне частот (от 1 Гц до 5 ГГц). Представлена численная схема, позволяющая учитывать сосредоточенные электрические компоненты, и исследованы различные варианты реализации граничных условий. Для решения представляющих практический интерес задач с большим числом неизвестных применен итерационный метод решения СЛАУ, при этом использование предложенного предобуславливателя существенно сократило количество итераций. Применение быстрого метода мультиполей позволило значительно уменьшить вычислительные затраты как по времени, так и по памяти на каждой итерации. Верификация предложенной модели и программного комплекса проведена на примере имеющей аналитическое решение задачи рассеяния монохроматической волны на сфере, а также на задаче моделирования импеданса печатной платы, где проведено сравнение с результатами расчетов в коммерческом программном обеспечении.

2. Постановка задачи. Рассмотрим однородную изотропную среду, содержащую идеально проводящие тела, представленные замкнутыми или простыми поверхностями (или любым их объединением). Напряженности электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{H} в такой среде удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_v, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{D} и \mathbf{B} — индукция электрического и магнитного полей соответственно, \mathbf{J}_v — плотность тока, ρ_v — плотность заряда. Индекс v у плотности тока и заряда введен для обозначения величин, распределенных в объеме, далее мы перейдем к поверхностным величинам. Система (1) также дополняется граничными условиями излучения Зоммерфельда и условиями Мейкснера конечности энергии излучения [12].

Представим напряженность электрического поля в виде суммы падающего и рассеянного полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{inc}} + \mathbf{E}^{\text{sc}}. \quad (2)$$

Выражение для рассеянного поля можно представить в виде

$$\mathbf{E}^{\text{sc}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi,$$

где \mathbf{A} и Φ — векторный и скалярный потенциалы соответственно. Перейдем в частотную область, т.е. будем искать неизвестные поля в виде

$$F(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x})e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

В этом случае потенциалы имеют следующий вид [13]:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho_v(\mathbf{y}) dV, \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \mu \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{J}_v(\mathbf{y}) dV,\end{aligned}$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $r = \|\mathbf{r}\|$. В случае идеальных проводников заряды и токи будут только на поверхности:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) dS, \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \mu \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{J}(\mathbf{y}) dS.\end{aligned}\tag{4}$$

Подставив (4) в выражение для рассеянного электрического поля, получим:

$$\mathbf{E}^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = i\omega\mu \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{J}(\mathbf{y}) dS - \nabla \frac{1}{\varepsilon} \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) dS.\tag{5}$$

С учетом общепринятых обозначений

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}, \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}},$$

из (5) получаем

$$\frac{1}{\eta_0} \mathbf{E}^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = ik_0\mu_r \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{J}(\mathbf{y}) dS - \frac{c_0}{\varepsilon_r} \nabla \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) dS.\tag{6}$$

Для идеального проводника тангенциальная составляющая электрического поля на границе равна нулю, т.е. выполнено условие [5]

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0.\tag{7}$$

Подставляя в (7) выражения (2) и (6), получим

$$\mathbf{n} \times \left(ik_0\mu_r \int_S G \mathbf{J} dS - \frac{c_0}{\varepsilon_r} \nabla \int_S G \rho dS \right) \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\eta_0} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}} \times \mathbf{n}.\tag{8}$$

Чтобы замкнуть систему, полученное уравнение необходимо дополнить уравнением непрерывности на поверхности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = i_s,$$

или же, с учетом (3),

$$-i\omega\rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = i_s,\tag{9}$$

где i_s является током внешнего источника, а $\nabla \cdot$ — поверхностная дивергенция. Отметим, что если ток поступает на поверхность, то $i_s > 0$, если уходит с нее, то $i_s < 0$.

Выполним замену переменных, которая позволяет привести к одному порядку вклады слагаемых, отвечающих за векторный и скалярный потенциалы [14]:

$$\tilde{\mathbf{J}} = ik_0\mathbf{J}, \quad \tilde{\rho} = c_0\rho.\tag{10}$$

В итоге система уравнений (8), (9) примет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \left(\mu_r \int_S G \tilde{\mathbf{J}} dS - \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \int_S G \tilde{\rho} dS \right) \times \mathbf{n} &= -\frac{1}{\eta_0} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}} \times \mathbf{n}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}} + k_0^2 \tilde{\rho} &= ik_0 i_s.\end{aligned}\tag{11}$$

Система (11) состоит из интегрального уравнения электрического поля и уравнения непрерывности заряда.



3. Численная схема. Для численного решения поставленной задачи триангулируем заданную поверхность и применим метод Галеркина, перейдя к слабой форме уравнений (11). В качестве базисных функций для тока возьмем нормированные RWG-функции [15], в качестве базисных функций для заряда — нормированные ступенчатые функции. RWG-функция задается на паре соседних треугольников T_n^+ и T_n^- :

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2A_n^+}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^+), & \mathbf{r} \in T_n^+, \\ \frac{1}{2A_n^-}(\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}), & \mathbf{r} \in T_n^-, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где \mathbf{r}_n^+ и \mathbf{r}_n^- — вершины напротив общего ребра треугольников T_n^+ и T_n^- , имеющих площади A_n^+ и A_n^- соответственно. На границе незамкнутой поверхности RWG-функция определяется только на одном треугольнике T_n^+ . Нормированная ступенчатая функция имеет вид

$$h_m(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{A_m}, & \mathbf{r} \in T_m, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В качестве проекционных функций для первого уравнения выберем нормированные RWG-функции, для второго уравнения — единичные ступенчатые функции, т.е. $\hat{h}_m(\mathbf{r}) = A_m h_m(\mathbf{r})$. Так как токи поверхностные, то для произвольной функции \mathbf{W} и поверхностной функции \mathbf{T} имеем

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{W} \times \mathbf{n}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}.$$

В итоге система (11) примет вид

$$\begin{aligned} \mu_r \int_S \mathbf{f}_n \cdot \int_S \tilde{\mathbf{J}} G dS dS' - \frac{1}{\varepsilon_r} \int_S \mathbf{f}_n \cdot \nabla \int_S G \tilde{\rho} dS dS' &= -\frac{1}{\eta_0} \int_S \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}} dS, \\ \int_S \hat{h}_m \nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}} dS + k_0^2 \int_S \hat{h}_m \tilde{\rho} dS &= ik_0 \int_S \hat{h}_m i_s dS. \end{aligned} \quad (12)$$

Из определения скалярного потенциала (4), замены переменных (10) и теоремы Остроградского–Гаусса имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_r} \int_S \mathbf{f}_n \cdot \nabla \int_S G \tilde{\rho} dS dS' &= \frac{1}{\eta_0} \int_S \mathbf{f}_n \cdot \nabla \Phi dS = \frac{1}{\eta_0} \int_{\Gamma} \Phi \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma - \frac{1}{\eta_0} \int_S \nabla \cdot \mathbf{f}_n \Phi dS = \\ &= \frac{1}{\eta_0} \int_{\Gamma} \Phi \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma - \frac{1}{\varepsilon_r} \int_S \int_S \nabla \cdot \mathbf{f}_n G \tilde{\rho} dS dS', \end{aligned}$$

что приводит систему (12) к виду

$$\begin{aligned} \mu_r \int_S \int_S \mathbf{f}_n G \tilde{\mathbf{J}} dS dS' + \frac{1}{\varepsilon_r} \int_S \int_S \nabla \cdot \mathbf{f}_n G \tilde{\rho} dS dS' &= -\frac{1}{\eta_0} \int_S \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}} dS + \frac{1}{\eta_0} \int_{\Gamma} \Phi \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma, \\ \int_S \hat{h}_m \nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}} dS + k_0^2 \int_S \hat{h}_m \tilde{\rho} dS &= ik_0 \int_S \hat{h}_m i_s dS. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что дивергенция нормированной RWG-функции $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ с точностью до знака совпадает с $h_m(\mathbf{r})$ на общем треугольнике. Введем матрицу D , которая имеет следующие элементы:

$$D_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{треугольник } T_m \text{ функции } h_m \text{ есть } T_n^+ \text{ для RWG-функции } \mathbf{f}_n, \\ -1, & \text{треугольник } T_m \text{ функции } h_m \text{ есть } T_n^- \text{ для RWG-функции } \mathbf{f}_n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, матрица D представляет собой разреженную матрицу инцидентности ребер и треугольников с учетом знака RWG-функций. Теперь систему (13) можно представить в матричном виде

$$\begin{bmatrix} V & D^T P \\ D & k_0^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\tilde{j}} \\ \mathbf{c}^{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где $\mathbf{c}^{\tilde{j}}$ и $\mathbf{c}^{\tilde{p}}$ — столбцы неизвестных, \mathbb{I} — единичная матрица, а элементы матриц V , P и столбцов \mathbf{e} , \mathbf{j} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} V_{nm} &= \mu_r \int_S \int_S G \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{f}_m dS dS', \\ P_{nm} &= \frac{1}{\varepsilon_r} \int_S \int_S G h_n h_m dS dS', \\ e_n &= -\frac{1}{\eta_0} \int_S \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}} dS + \frac{1}{\eta_0} \int_{\Gamma} \Phi \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma, \\ j_n &= ik_0 A_n \int_S h_n i_s dS. \end{aligned}$$

В области низких частот система (13) плохо обусловлена, а при нулевой частоте ($k_0 = 0$) не имеет единственного решения для заряда. Чтобы выделить единственное решение и улучшить обусловленность полученной СЛАУ (14), применяют условие нейтральности заряда [14]. Данное условие позволяет исключить зависимые неизвестные из системы. Рассмотрим случай односвязной области, тогда можем выразить последнее неизвестное $c_N^{\tilde{p}}$ через все остальные:

$$c_N^{\tilde{p}} = -\sum_{i=1}^{N-1} c_i^{\tilde{p}}. \quad (15)$$

Чтобы учесть это в (14), введем матрицы B и F , которые имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда (14) примет вид

$$\begin{bmatrix} V & D^T P F \\ B D & k_0^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\tilde{j}} \\ \mathbf{c}^{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ B \mathbf{j} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Отметим, что строка и столбец, отвечающие в (16) за неизвестное $c_N^{\tilde{p}}$, остаются “формальными” и сохранены для удобства практической реализации; эквивалентное решение можно получить, вычеркнув строку и столбец. После решения (16) находим $c_N^{\tilde{p}}$ в соответствии с (15).

Рассмотрим теперь наиболее распространенные типы граничных условий.

1. *Непротекание тока через границу.* В этом случае неизвестные, соответствующие RWG-функциям на границе, должны быть равны нулю. Это эквивалентно удалению из системы соответствующих строк и столбцов.
2. *Фиксированный потенциал на границе.* В случае, если $\Phi = \Phi_0$ на границе, для элементов e_n , соответствующих этой границе, контурный интеграл в правой части системы (14) принимает вид

$$\frac{1}{\eta_0} \int_{\Gamma} \Phi \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma = \pm \frac{1}{\eta_0} \Phi_0,$$

где знак выбирается исходя из знака RWG-функции на соответствующем треугольнике.



3. На поверхность S_p поступает или с нее уходит заданный ток. Если на поверхность поступает или с нее уходит внешний ток I_0 , то, предполагая равномерное распределение плотности тока, получим $i_s = \pm \frac{I_0}{A_p}$, где A_p — площадь поверхности S_p , откуда для элементов j_n столбца в правой части (14) имеем

$$j_n = \pm ik_0 I_0 A_n / A_p;$$

здесь знак “+” соответствует источнику, знак “-” — стоку.

4. Задано падающее поле \mathbf{E}^{inc} . При решении задач теории рассеяния это самое часто встречающееся граничное условие, однако в случае моделирования микроэлектронных устройств зачастую $\mathbf{E}^{\text{inc}} \equiv 0$. Отметим, что возможно задание \mathbf{E}^{inc} в виде дельта-функции при возбуждении системы разностью потенциалов, однако данный способ не универсален [16], поэтому мы не будем его рассматривать. Далее мы приведем способы возбуждения системы более общими методами.

4. Учет элементов схемотехники. Для начала введем следующие понятия:

- *классический* многополюсник — электрическая цепь, у которой каждому порту соответствуют два полюса (рис. 1 а);
- *абсолютный* многополюсник (далее будем называть просто многополюсником) — электрическая цепь, у которой каждому порту соответствует один полюс (рис. 1 б).

Данные определения аналогичны представленным в [17]. У классического многополюсника имеются следующие особенности:

- 1) ток, входящий в P_i^+ , равен току, выходящему из P_i^- ;
- 2) напряжение в порту измеряется как разность потенциалов на P_i^+ и P_i^- .

Для абсолютного многополюсника приняты следующие соглашения:

- 1) токи на схеме всегда направлены от портов в сторону цепи;
- 2) напряжение в портах измеряется как абсолютное относительно земли.

Типовая схема, используемая для расчета импеданса различных устройств, в том числе печатных плат, приведена на рис. 1 с. В этой схеме имеется порт, возбуждаемый либо источником напряжения, либо источником тока и подключенный к пассивной сети, которая может включать в себя как трехмерную геометрию, так и подключенные к ней многополюсники. В случае печатных плат полюсы (зажимы) портов называются *пинами*. Импеданс системы питания определяется как

$$Z = \frac{v_1}{i_1}.$$

В случае возбуждения системы источником тока на пинах P_1^+ и P_1^- задается ток $\pm I_0$ (граничное условие 3, рис. 2 а), далее из решения задачи мы находим средний потенциал на P_1^+ и P_1^- :

$$\bar{\Phi}_1^\pm = \frac{\eta_0}{\varepsilon_r} \frac{1}{A_1^\pm} \int_{S_1^\pm} \int_S G \bar{\rho} dS dS'. \tag{17}$$

Импеданс системы в этом случае равен $Z = (\bar{\Phi}_1^+ - \bar{\Phi}_1^-) / I_0$.

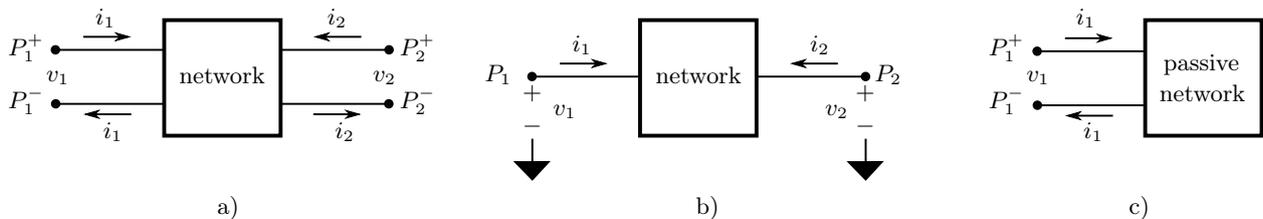


Рис. 1. К вопросу о расчете импеданса: а) классический четырехполюсник; б) абсолютный двухполюсник; в) схема для расчета импеданса

Fig. 1. On the issue of calculating the impedance: a) classic two-port network; б) absolute two-port network; в) scheme for impedance measurement

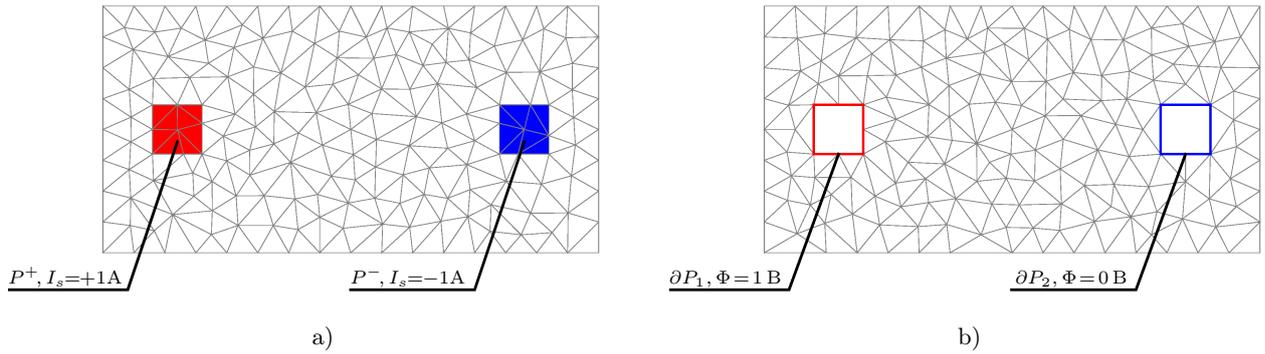


Рис. 2. Иллюстрация граничных условий: а) порт, возбуждаемый током (граничное условие 3);
 б) порт, возбуждаемый напряжением (граничное условие 2)

Fig. 2. Illustration of boundary conditions: a) current-driven port (boundary condition 3);
 b) voltage-driven port (boundary condition 2)

В случае, если мы возбуждаем систему источником напряжения и фиксируем потенциал на границе, мы переходим от классического двухполюсника к абсолютному двухполюснику. Пусть Φ_1 и Φ_2 — потенциалы на границе пинов P_1 и P_2 соответственно. В соответствии с граничным условием 2 зафиксируем вначале $\Phi_1 = 1$, $\Phi_2 = 0$ (рис. 2 б), затем $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 1$, и для каждого случая найдем ток, протекающий через границу каждого пина. Таким образом, мы можем найти матрицу Y -параметров для двух портов, так как по определению

$$Y_{pq} = \frac{i_p}{v_q} \text{ при заданном } v_q \neq 0 \text{ и } v_r = 0 \text{ для всех } r \neq q, \quad (18)$$

где p, q, r — индексы портов многополюсника.

Рассмотрим теперь подключение многополюсников. Для их описания широко используются матричные методы, где наряду с Y -матрицей применяются Z - и S -матрицы [17]. Будем считать, что для каждого сосредоточенного электрического компонента существует и известна матрица Y -параметров. Причина, по которой дальнейшее изложение будет строиться на основе именно Y -матрицы, состоит в том, что в печатных платах подавляющее большинство подключений электрических элементов в цепях питания легко описывается Y -матрицей, в то время как Z -матрица может не существовать [17]. В качестве универсальной характеристики также используют матрицу S -параметров, которая всегда существует, но не дает такой удобной связи напряжений с токами, как Y -матрица.

Выражение (18) удобно переписать в матричном виде

$$YV = I,$$

где V — столбец значений напряжений в портах, I — столбец значений токов, протекающих через каждый порт. С учетом этого для каждого n -полюсника мы можем добавить в систему (14) n неизвестных, отвечающих за ток через каждый пин. Напряжение в каждом порту будем вычислять как средний потенциал на пине по формуле (17), и тогда в (14) добавим строки, соответствующие уравнениям

$$YV - I = 0. \quad (19)$$

Неизвестные токи в пинах также выполняют роль источников, поэтому они внесут свой вклад в уравнение непрерывности, которое можно переписать в виде

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}} + k_0^2 \tilde{\rho} + \sum_{j=1}^n ik_0 I_j / A_j = ik_0 i_s, \quad (20)$$

где I_j — ток через j -й пин, противоположный по знаку i_s , так как ранее ввели, что токи в многополюснике текут от портов в сторону компонента.



Рассмотрим пример. В простейшем случае для моделирования подключенной нагрузки цепь включает в себя модель резистора сопротивлением R . Для этого случая Y -матрица имеет вид

$$Y = \begin{bmatrix} 1/R & -1/R \\ -1/R & 1/R \end{bmatrix}.$$

Уравнения (19) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\eta_0}{\varepsilon_r} \left(\frac{Y_{11}}{A_{P^+}} \int_{S_{P^+}} \int_S G \tilde{\rho} dS dS' + \frac{Y_{12}}{A_{P^-}} \int_{S_{P^-}} \int_S G \tilde{\rho} dS dS' \right) - I_{P^+} &= 0, \\ \frac{\eta_0}{\varepsilon_r} \left(\frac{Y_{21}}{A_{P^+}} \int_{S_{P^+}} \int_S G \tilde{\rho} dS dS' + \frac{Y_{22}}{A_{P^-}} \int_{S_{P^-}} \int_S G \tilde{\rho} dS dS' \right) - I_{P^-} &= 0, \end{aligned}$$

а уравнение (20) — в виде

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}} + k_0^2 \tilde{\rho} + ik_0 I_{P^+} / A_{P^+} + ik_0 I_{P^-} / A_{P^-} = ik_0 i_s.$$

Таким образом, система (14) примет вид

$$\begin{bmatrix} V & D^T P & \underline{0} \\ D & k_0^2 \mathbb{I} & I_c \\ \underline{0} & Y \Phi & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\tilde{J}} \\ \mathbf{c}^{\tilde{\rho}} \\ \mathbf{c}^{I_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Для данной системы также можно учесть условие нейтральности заряда и, применив редукцию, получить систему

$$\begin{bmatrix} V & D^T P F & \underline{0} \\ B D & k_0^2 \mathbb{I} & B I_c \\ \underline{0} & Y \Phi F & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\tilde{J}} \\ B \mathbf{c}^{\tilde{\rho}} \\ \mathbf{c}^{I_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ B \mathbf{j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В итоге для учета каждого добавленного в цепь n -полюсника нам необходимо добавить в систему n строк и n столбцов.

5. Численное решение. Систему (21) будем решать итерационно методом BiCGStab [18]. В качестве предобуславливателя возьмем матрицу системы вида

$$M = \begin{bmatrix} V_{\text{diag}} & D^T P_{\text{diag}} F & \underline{0} \\ B D & k_0^2 \mathbb{I} & B I_c \\ \underline{0} & Y \Phi F & -\mathbb{I} \end{bmatrix}.$$

Данная матрица разреженная, а ее плотные блоки соответствуют компонентам, поэтому нахождение ее LU-разложения не требует больших вычислительных затрат.

Самая затратная операция в итерационном методе — умножение матрицы на вектор, при этом больше всего времени занимает умножение плотных блоков V и P на вектор неизвестных. Для ускорения умножения мы применим быстрый метод мультиполей [19], при этом будем использовать вариант, основанный на “вращениях” (поворот–трансляция–поворот), который имеет сложность $O(p^3)$, где p — число мультиполей [20]. Преимущество данного варианта в том, что он является устойчивым в низких частотах, в то время как методы, основанные на спектральных разложениях и имеющие асимптотически более низкую сложность, либо неустойчивы в низких частотах, либо требуют модификации [19].

6. Результаты расчетов. Начнем с проверки корректности предложенной реализации. Для этого рассмотрим классическую задачу дифракции на идеально проводящей сфере радиусом 1 м. Задана падающая волна

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{E}_0 = [1, 0, 0], \quad \mathbf{k} = [0, 0, k].$$

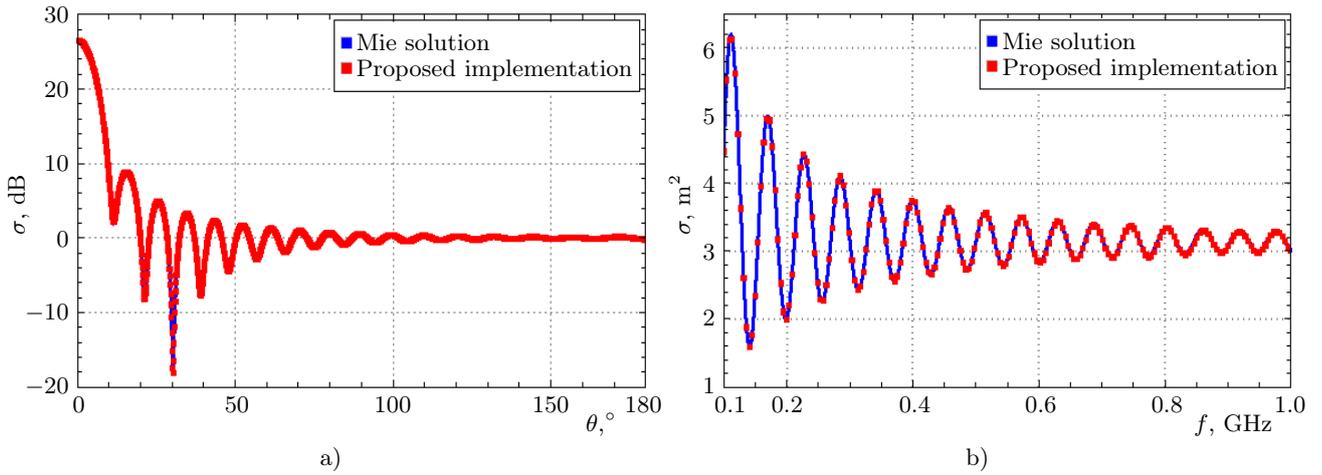


Рис. 3. Тестовая задача по рассеянию Ми: а) ЭПР при частоте $f = 1$ ГГц; б) ЭПР для диапазона частот от $f = 0.1$ ГГц до $f = 1$ ГГц

Fig. 3. Test problem on Mie scattering: а) RCS at $f = 1$ GHz; б) RCS at frequencies from $f = 0.1$ GHz to $f = 1$ GHz

Будем вычислять эффективную площадь рассеяния (ЭПР) [21]:

$$\sigma(\theta, \phi) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{\|\mathbf{E}^{sc}\|^2}{\|\mathbf{E}^{inc}\|^2}.$$

Также нередко используют нормированную величину, выраженную в дБ:

$$\tilde{\sigma} = 10 \lg \frac{\sigma}{\sigma_0}.$$

В качестве σ_0 используется либо характерная площадь излучателя, либо единичная площадь; мы будем использовать второе.

На рис. 3 а представлено сравнение ЭПР, выраженной в дБ, с аналитическим решением [22] при частоте 1 ГГц для угла $\phi = 0$. Численная и теоретическая кривые хорошо согласуются (различаясь в среднем на 0.03 дБ), при этом сетка для расчета использовалась довольно грубая (приблизительно 4.27 ячеек на длину волны). Для этой же сетки был произведен расчет на диапазоне частот от 100 МГц до 1 ГГц, где была рассчитана $\sigma(\pi, 0)$ и также проведено сравнение с аналитическим решением, которое показало корректность расчета (рис. 3 б).

Рассмотрим теперь печатную плату и рассчитаем импеданс шины питания. В качестве примера рассмотрим плату BeagleBone[®] Black¹. Ограничим модель интересующими нас цепями питания VDD_MPU и земли DGND с подключенными конденсаторами и резисторами, при этом система возбуждается источником тока (схема подключения изображена на рис. 4). Анализируемый порт размещен на пинах компонента C65, резистор R_2 — на C12, конденсаторы C_1 и C_2 вместе с резисторами R_1 — на пинах C62 и C63 соответственно. Диэлектрическую проницаемость среды зададим комплексной величиной, учитывающей потери:

$$\varepsilon_r = \varepsilon'(1 + i \operatorname{tg} \delta),$$

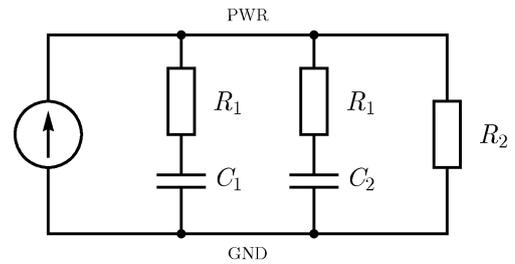


Рис. 4. Схема подключения компонентов к цепи питания (PWR) и земли (GND): $R_1 = 20$ мОм, $R_2 = 5$ мОм, $C_1 = 100$ нФ, $C_2 = 10$ нФ

Fig. 4. Power (PWR) and ground (GND) components connection scheme: $R_1 = 20$ mOhm, $R_2 = 5$ mOhm, $C_1 = 100$ nF, $C_2 = 10$ nF

¹<https://www.beagleboard.org/boards/beaglebone-black>

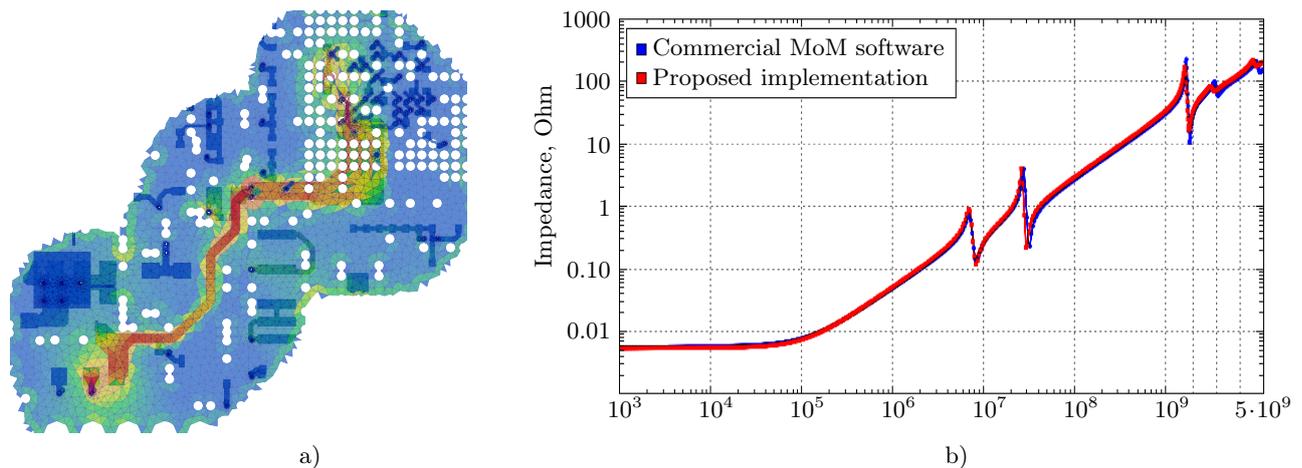


Рис. 5. К расчету импеданса цепей питания: а) визуализация $\|J\|$ в цепях питания и земли при частоте $f = 3$ ГГц; б) график импеданса

Fig. 5. To calculate the impedance of power supply circuits: a) visualization of $\|J\|$ in circuits of power and ground at frequency $f = 3$ GHz; b) impedance plot

где $\varepsilon' = 4.0$, $\text{tg } \delta = 0.02$. Чтобы ускорить расчет без существенной потери точности, мы возьмем не всю плоскость земли, а только часть, окружающую цепь питания (рис. 5 а). Задачу в аналогичной постановке мы также решим в коммерческом программном обеспечении, предназначенном для моделирования электромагнитных процессов с помощью метода моментов.

Результаты расчета представлены на рис. 5 б. Из графика видно, что значения импеданса, полученные в предложенной реализации и в стороннем программном обеспечении, хорошо согласуются. Кроме этого, в области низких частот значение импеданса составляет около 5 мОм — это соответствует импедансу схемы на рис. 4 при постоянном токе, так как в нашей модели материал идеально проводящий и он не добавляет сопротивления. В области высоких частот наблюдаются резонансные пики, обусловленные трехмерной геометрией цепи питания. Подчеркнем, что приведенная на рис. 4 схема подключения компонент соответствует модели цепи питания на низких частотах, на высоких же частотах все линии подключения имеют собственные распределенные индуктивности и емкости, а также испытывают взаимное влияние.

В коммерческом программном обеспечении сетка содержала 36861 треугольник, среднее время расчета одной частоты — 21 с. В нашей реализации сетка содержала 40489 треугольников, среднее время расчета одной частоты — 25 с, при этом требовалось в среднем 67 итераций для сходимости с относительной ошибкой 10^{-5} в норме L_2 .

7. Заключение. Рассмотрено интегральное уравнение для электрического поля, дополненное уравнением непрерывности. Предложена новая модель, позволяющая учесть сосредоточенные электрические компоненты при расчете параметров микроэлектронных устройств методом моментов; также приведена соответствующая численная схема. Для решения полученной системы линейных уравнений применяется итерационный метод, ускоренный за счет использования быстрого метода мультиполей. Предложенная схема была реализована и протестирована на двух задачах. В первом варианте рассмотрена задача дифракции на идеально проводящей сфере. Результаты расчетов хорошо согласуются с аналитическим решением, в том числе на грубой сетке (4 ячейки на длину волны). Во втором варианте рассмотрено моделирование импеданса системы питания в печатной плате, к которой подключены резисторы и конденсаторы. Сравнение с коммерческим программным обеспечением показало согласующиеся результаты и сопоставимое время расчета, что подтверждает эффективность предложенной реализации.

Список литературы

1. Jin J.-M. The finite element method in electromagnetics. New York: Wiley, 2014.
2. Gibson W.C. The method of moments in electromagnetics. New York: CRC Press, 2021. doi 10.1201/9780429355509.
3. Harrington R.F. Field computation by moment methods. New York: Wiley-IEEE Press, 1993.

4. Jiang L.J., Chew W.C. A mixed-form fast multipole algorithm // IEEE Trans. Antennas Propag. 2005. **53**, N 12. 4145–4156. doi [10.1109/TAP.2005.859915](https://doi.org/10.1109/TAP.2005.859915).
5. Ergül Ö (Ed.) New trends in computational electromagnetics. London: SciTech Publ., 2019. doi [10.1049/SBEW533E](https://doi.org/10.1049/SBEW533E).
6. Сетуха А.В., Фетисов С.Н. Особенности применения метода граничных интегральных уравнений в задаче дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах малой толщины // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**, № 4. 460–473. doi [10.26089/NumMet.v17r443](https://doi.org/10.26089/NumMet.v17r443).
7. Клюкин Д.В., Мочалов Д.М., Куксенко С.П. О способах вычисления поверхностных сингулярных интегралов при решении антенных задач методом моментов // Доклады ТУСУР. 2024. **27**, № 1. 23–34. doi [10.21293/1818-0442-2024-27-1-23-34](https://doi.org/10.21293/1818-0442-2024-27-1-23-34).
8. Сивак С.А. Разработка алгоритмов численного решения задач электромагнетизма с использованием скалярных и векторных граничных элементов. Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18. Новосибирск: Новосибирский гос. техн. унив., 2017.
9. Qian Z.G., Chew W.C. An augmented electric field integral equation for high-speed interconnect analysis // Microwave and Optical Technology Letters. 2008. **50**, N 10. 2658–2662. doi [10.1002/mop.23736](https://doi.org/10.1002/mop.23736).
10. Xia T., Gan H., Wei M., et al. An integral equation modeling of lossy conductors with the enhanced augmented electric field integral equation // IEEE Trans. Antennas Propag. 2017. **65**, N 8. 4181–4190. doi [10.1109/TAP.2017.2718587](https://doi.org/10.1109/TAP.2017.2718587).
11. Wang Y., Gope D., Jandhyala V., Shi C.-J.R. Generalized Kirchoff's current and voltage law formulation for coupled circuit-electromagnetic simulation with surface integral equations // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. 2004. **52**, N 7. 1673–1682. doi [10.1109/TMTT.2004.830482](https://doi.org/10.1109/TMTT.2004.830482).
12. Jin J.-M. Theory and computation of electromagnetic fields. Hoboken: Wiley, 2010. doi [10.1002/9780470874257](https://doi.org/10.1002/9780470874257).
13. Griffiths D.J. Introduction to electrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2023. doi [10.1017/9781009397735](https://doi.org/10.1017/9781009397735).
14. Taskinen M., Yla-Oijala P. Current and charge integral equation formulation // IEEE Trans. Antennas Propag. 2006. **54**, N 1. 58–67. doi [10.1109/TAP.2005.861580](https://doi.org/10.1109/TAP.2005.861580).
15. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // IEEE Trans. Antennas Propag. 1982. **30**, N 3. 409–418. doi [10.1109/TAP.1982.1142818](https://doi.org/10.1109/TAP.1982.1142818).
16. Hussein K.F.A. Accurate representation of excitation and loading for arbitrarily shaped antennas composed of conducting surfaces in the method of moments // Prog. Electromagn. Res. B. 2012. **36**. 151–171. doi [10.2528/PIERB11100709](https://doi.org/10.2528/PIERB11100709).
17. Pupalaikis P.J. S-parameters for signal integrity. Cambridge: Cambridge University Press, 2020. doi [10.1017/9781108784863](https://doi.org/10.1017/9781108784863).
18. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
19. Ergül Ö., Gürel L. The multilevel fast multipole algorithm (MLFMA) for solving large-scale computational electromagnetics problems. Chichester: Wiley-IEEE, 2014. doi [10.1002/9781118844977](https://doi.org/10.1002/9781118844977).
20. Gumerov N.A., Duraiswami R. Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions. Oxford: Elsevier, 2004. doi [10.1016/B978-0-08-044371-3.X5000-5](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044371-3.X5000-5).
21. Balanis C.A. Modern antenna handbook. New York: Wiley, 2007. doi [10.1002/9780470294154](https://doi.org/10.1002/9780470294154).
22. Mie G. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen // Annalen der Physik. 1908. **330**, N 3. 377–445. doi [10.1002/andp.19083300302](https://doi.org/10.1002/andp.19083300302).

Поступила в редакцию
21 ноября 2024 г.

Принята к публикации
26 февраля 2025 г.

Информация об авторах

Аушев Виктор Михайлович — аспирант, ведущий разработчик; 1) Т1 Интеграция, ул. Юности, д. 13А, 111395, Москва, Российская Федерация; 2) МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2-я Бауманская, 5, стр. 1, 105005, Москва, Российская Федерация.

Миллицин Владимир Олегович — к.ф.-м.н., ведущий разработчик; Т1 Интеграция, ул. Юности, д. 13А, 111395, Москва, Российская Федерация.

References

1. J.-M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics* (Wiley, New York, 2014).
2. W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics* (CRC Press, New York, 2021). doi [10.1201/9780429355509](https://doi.org/10.1201/9780429355509).



3. R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods* (Wiley-IEEE Press, New York, 1993).
4. L. J. Jiang and W. C. Chew, “A Mixed-Form Fast Multipole Algorithm,” *IEEE Trans. Antennas Propag.* **53** (12), 4145–4156 (2005). doi [10.1109/TAP.2005.859915](https://doi.org/10.1109/TAP.2005.859915).
5. Ö. Ergül (Ed.), *New Trends in Computational Electromagnetics* (SciTech Publ., London, 2019). doi [10.1049/SBEW533E](https://doi.org/10.1049/SBEW533E).
6. A. V. Setukha and S. N. Fetisov, “Peculiarities of the Boundary Integral Equation Method in the Problem of Electromagnetic Wave Scattering on Ideally Conducting Bodies of Small Thickness,” *Numerical Methods and Programming* **17** (4), 460–473 (2016). doi [10.26089/NumMet.v17r443](https://doi.org/10.26089/NumMet.v17r443).
7. D. V. Klyukin, D. M. Mochalov, and S. P. Kuxsenko, “On Techniques to Compute Surface Singular Integrals for Formulating the Matrix-Vector Equation of the Moment Method When Solving Antenna Problems,” *Proceedings of TUSUR University* **27** (1), 23–34 (2024). doi [10.21293/1818-0442-2024-27-1-23-34](https://doi.org/10.21293/1818-0442-2024-27-1-23-34).
8. S. A. Sivak, *Development of Algorithms for Numerical Solution of Electromagnetism Problems Using Scalar and Vector Boundary Elements* PhD Thesis in Physics and Mathematics (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 2017).
9. Z. G. Qian and W. C. Chew, “An Augmented Electric Field Integral Equation for High-Speed Interconnect Analysis,” *Microw. Opt. Technol. Lett.* **50** (10), 2658–2662 (2008). doi [10.1002/mop.23736](https://doi.org/10.1002/mop.23736).
10. T. Xia, H. Gan, M. Wei, et al., “An Integral Equation Modeling of Lossy Conductors with the Enhanced Augmented Electric Field Integral Equation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.* **65** (8), 4181–4190 (2017). doi [10.1109/TAP.2017.2718587](https://doi.org/10.1109/TAP.2017.2718587).
11. Y. Wang, D. Gope, V. Jandhyala, and C.-J. R. Shi, “Generalized Kirchoff’s Current and Voltage Law Formulation for Coupled Circuit-Electromagnetic Simulation with Surface Integral Equations,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **52** (7), 1673–1682 (2004). doi [10.1109/TMTT.2004.830482](https://doi.org/10.1109/TMTT.2004.830482).
12. J.-M. Jin, *Theory and Computation of Electromagnetic Fields* (Wiley, Hoboken, 2010). doi [10.1002/9780470874257](https://doi.org/10.1002/9780470874257).
13. D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2023). doi [10.1017/9781009397735](https://doi.org/10.1017/9781009397735).
14. M. Taskinen and P. Yla-Oijala, “Current and Charge Integral Equation Formulation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.* **54** (1), 58–67 (2006). doi [10.1109/TAP.2005.861580](https://doi.org/10.1109/TAP.2005.861580).
15. S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson, “Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape,” *IEEE Trans. on Antennas Propag.* **30** (3), 409–418 (1982). doi [10.1109/TAP.1982.1142818](https://doi.org/10.1109/TAP.1982.1142818).
16. K. F. A. Hussein, “Accurate Representation of Excitation and Loading for Arbitrarily Shaped Antennas Composed of Conducting Surfaces in the Method of Moments,” *Prog. Electromagn. Res. B* **36**, 151–171 (2012). doi [10.2528/PIERB11100709](https://doi.org/10.2528/PIERB11100709).
17. P. J. Pupaiaikis, *S-Parameters for Signal Integrity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2020). doi [10.1017/9781108784863](https://doi.org/10.1017/9781108784863).
18. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (SIAM, Philadelphia, 2003; Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013). doi [10.1137/1.9780898718003](https://doi.org/10.1137/1.9780898718003).
19. Ö. Ergül and L. Gürel, *The Multilevel Fast Multipole Algorithm (MLFMA) for Solving Large-Scale Computational Electromagnetics Problems* (Wiley-IEEE, Chichester, 2014). doi [10.1002/9781118844977](https://doi.org/10.1002/9781118844977).
20. N. A. Gumerov and R. Duraiswami, *Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions* (Elsevier, Oxford, 2004). doi [10.1016/B978-0-08-044371-3.X5000-5](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044371-3.X5000-5).
21. C. A. Balanis (Ed.), *Modern Antenna Handbook* (Wiley, New York, 2007). doi [10.1002/9780470294154](https://doi.org/10.1002/9780470294154).
22. G. Mie, “Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen,” *Annalen der Physik* **330** (3), 377–445 (1908). doi [10.1002/andp.19083300302](https://doi.org/10.1002/andp.19083300302).

Received
November 21, 2024

Accepted for publication
February 26, 2025

Information about the authors

Viktor M. Aushev — postgraduate student, Lead Developer; 1) T1 Integration, Yunosti ulitsa, 13A, 111395, Moscow, Russia; 2) Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya, 5, 105005, Moscow, Russia.

Vladimir O. Militsin — Ph. D., Lead Developer; T1 Integration, Yunosti ulitsa, 13A, 111395, Moscow, Russia.