

УДК 523.1

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ТОЧЕК НА ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СО СЛУЧАЙНОЙ КРИВИЗНОЙ

М. Е. Артюшкова¹, Д. Д. Соколов¹

Уравнение Якоби на геодезической со случайной кривизной описывает распространение света во Вселенной с неоднородностями. Сопряженные точки на геодезической соответствуют изображениям гравитационных линз. Проведено численное моделирование соответствующего уравнения Якоби. Получены статистические распределения расстояний между сопряженными точками вдоль геодезических и выполнено сравнение этих результатов с известными теоретическими оценками.

Ключевые слова: уравнение Якоби, геодезическая линия, гравитационные линзы, математическое моделирование, численное моделирование, численные методы.

1. Введение. Еще в 1964 г. Я. Б. Зельдович [1] показал, что влияние флуктуаций плотности в пространстве распространения света во Вселенной не сводится к случайному шуму, вносимому в космологические тесты, а носит систематический характер. Как следствие эффекта Зельдовича, в пространстве могут также возникать гравитационные линзы, связанные не с каким-то индивидуальным возмущением кривизны, а с совместным действием многих возмущений. Гравитационные линзы фокусируют изображение источника света в некоторых точках пространства, которые называются сопряженными точками. Гравитационная линза отличается от оптической тем, что искривление траектории луча происходит не за счет изменения показателя преломления в веществе, а вследствие того, что на пути его распространения встречаются массивные тела.

С геометрической точки зрения гравитационные линзы, так же как и другие понятия, связанные с космологическими тестами, удобно описывать в терминах полей Якоби на геодезических пространственного сечения, вдоль которых и распространяются лучи света. Пусть $\gamma(\theta, x)$ — семейство геодезических, проходящих через некоторую точку на пространственном сечении, где x — расстояние от точки их пересечения, а θ — угол, отсчитываемый от некоторой базовой геодезической, для которой $\theta = 0$. Тогда расстояние между точками, находящимися на расстоянии x на близких геодезических семейства, с точностью до малых высшего порядка равно $y(x)\theta$, где y и есть поле Якоби вдоль базовой геодезической, а сопряженные точки — это точки, в которых y обращается в нуль. Поле Якоби можно найти из уравнения Якоби, или уравнения геодезических отклонений:

$$y''(x) + K(x)y = 0, \quad (1)$$

где K — кривизна двумерной площадки, а производные берутся по расстоянию от начальной точки. Флуктуации плотности приводят к флуктуациям кривизны, так что эффект Зельдовича связан с поведением решений уравнения (1) со случайным коэффициентом K .

Естественными начальными условиями для уравнения Якоби являются условия

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

из которых первое означает, что рассматриваемый пучок лучей испускается из одной точки, а второе является условием нормировки.

В настоящей работе мы провели численное исследование распределения этих сопряженных точек вдоль геодезической. К настоящему времени В. Г. Ламбург и др. [2] получили некоторые оценки для расстояний между сопряженными точками. Наше численное исследование подтверждает и дополняет эти оценки.

Нам представляется, что полученные результаты интересны не только в контексте конкретной астрономической задачи, но и с точки зрения сравнения аналитических результатов о свойствах решений

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: vox906@yandex.ru, sokoloff@dds.srcc.msu.ru

уравнений со случайными коэффициентами с результатами численного моделирования, поскольку сложившаяся ситуация в этой области не кажется ясной в достаточной мере.

2. Численный эксперимент. Для того чтобы построить численное решение нашей задачи, необходимо конструктивно описать свойства случайного процесса $K(x)$. Мы ориентируемся на модели, удобные для аналитических исследований, и выбираем модель с обновлением, которая была использована в [2]. Эта модель строится следующим образом. Мы разбиваем базовую геодезическую на отрезки длины δ (корреляционная длина, которую мы используем в качестве единицы длины, сам же отрезок принято называть интервалом обновления) и на каждом отрезке с помощью генератора случайных чисел задаем независимые постоянные значения кривизны, равномерно распределенные на отрезке $[-K^*, K^*]$. Поскольку существующие аналитические результаты о распределении сопряженных точек получены для малых K^* , мы выбираем несколько значений $K^* = 10^{-p}$, $p = 0, 1, 2, 3$.

В качестве генератора случайных чисел мы использовали генераторы, встроенные в язык Visual C++ (версия 6.0) и в пакет Maple 5, которые дают цепочку псевдослучайных чисел с периодом повторения 2^{32} , достаточным для проводимого моделирования. Для того чтобы оценить устойчивость результатов, мы сравнивали распределения расстояний между сопряженными точками, которые мы получили в нашем расчете с использованием двух генераторов.

3. Произведение независимых случайных матриц. Для решения уравнения Якоби мы использовали не стандартные разностные схемы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а, следуя В.Г. Ламбурту и др. [2], воспользовались тем, что на каждом интервале обновления решение легко выражается через значение решения и его производной на левом конце и некоторую стандартную матрицу преобразования, зависящую лишь от значения кривизны на данном интервале обновления. Решение через несколько интервалов обновления выражается как произведение соответствующих случайных матриц. Подсчитать это произведение, используя явные формулы для матриц преобразования, можно гораздо быстрее и точнее, чем, скажем, по методу Рунге–Кутты.

Для получения такой формулы перепишем уравнение (1) в виде системы линейных уравнений для двухкомпонентного вектора-строки $\mathbf{z}$ с компонентами $z_1 = y$, $z_2 = \delta y'$:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = \mathbf{z} \begin{pmatrix} 0 & -\delta K(x) \\ 1/\delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь y' умножено на δ для того, чтобы компоненты вектора $\mathbf{z}$ имели одинаковую размерность. Начальные условия имеют вид $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = \delta$. Тогда

$$\mathbf{z}(x_{n+1}) = \mathbf{z}(x_n) B_n = \dots = \mathbf{z}_0 B_n B_{n-1} \dots B_1, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad (2)$$

где

$$B_n = \begin{pmatrix} \cos(\delta\sqrt{K_n}) & -\frac{K_n}{w_0} \sin(\delta\sqrt{K_n}) \\ \frac{w_0}{K_n} \sin(\delta\sqrt{K_n}) & \cos(\delta\sqrt{K_n}) \end{pmatrix} \quad \text{при } K_n > 0,$$

$$B_n = \begin{pmatrix} \text{ch}(\delta\sqrt{-K_n}) & \frac{\sqrt{-K_n}}{w_0} \text{sh}(\delta\sqrt{-K_n}) \\ \frac{w_0}{\sqrt{-K_n}} \text{sh}(\delta\sqrt{-K_n}) & \text{ch}(\delta\sqrt{-K_n}) \end{pmatrix} \quad \text{при } K_n < 0,$$

K_n — значение кривизны на n -ом интервале обновления и $w_0 = 1/\delta$.

4. Результаты численного исследования. Расстояние между сопряженными точками является случайной величиной, поэтому интересно построить статистические функции распределения этой величины. С помощью (2) мы построили 10^4 реализаций решения задачи (1), которые соответствуют различным реализациям случайного процесса, и у каждой реализации определили местоположение сопряженных точек и вычислили расстояние между ними. Мы находили k -ую ($k = 1, 2, \dots$) сопряженную точку конкретной реализации, которая строится следующим образом. На оси x вводится равномерная сетка с шагом $h = 1$. На этой сетке, начиная с $i = 1$, по формуле (2) пошагово вычисляются значения решения в узлах x_i , $i = 1, 2, \dots$. На каждом шаге проверяется, не поменялся ли знак значения решения в новом узле относительно значения в предыдущем узле. Если знак не поменялся — значит, первая сопряженная точка лежит правее, а если поменялся — значит, она лежит между этими двумя узлами. В этом случае можно приближенно считать первой сопряженной точкой тот узел, в котором впервые поменялся знак решения.

Продолжая вычисление решения по формуле (2) и проводя аналогичное сравнение знака решения в новом узле со знаком решения в предыдущем узле, мы последовательно определяем расстояние до второй, третьей и т. д. сопряженных точек. При этом положение сопряженной точки определяется с точностью до δ , что достаточно для наших целей, поскольку расстояния между соседними сопряженными точками намного превосходят δ .

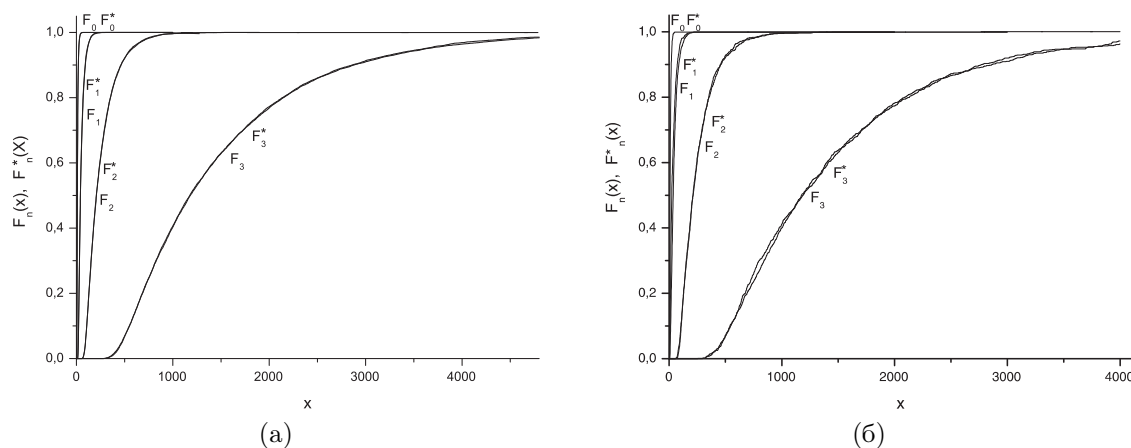


Рис. 1. Эмпирические функции распределения $F_n(x)$ и $F_n^*(x)$ ($n = 0, 1, 2, 3$) для ξ_n , построенные по независимым выборкам: а) объем выборки — 10^4 реализаций, б) объем выборки — 10^3 реализаций

Для полученной выборки мы построили так называемую эмпирическую функцию распределения $F(x)$ [3]. Процедура построения состоит в следующем. Значения $F(x)$ пошагово вычисляются в точках $x_j = jh$, $j = 1, 2, \dots$. При $j = 0$ полагаем $F_0 = 0$. Начиная с $j = 1$ на каждом следующем шаге с номером $j + 1$ просматривается массив случайных величин и ищутся элементы $\xi = j + 1$. Количество найденных элементов делится на общее число элементов выборки 10^4 и прибавляется к значению функции на предыдущем шаге с номером j . Итак, $F(x)$ показывает, какая доля геодезических выборки имеет первую сопряженную точку, расположенную к началу координат ближе, чем x .

На рис. 1, а построены эмпирические функции распределения для четырех значений $|K_n| = 10^{-n}$, $n = 0, 1, 2, 3$. Для того чтобы убедиться в устойчивости наших результатов, мы построили для каждого n на одном графике эмпирические функции распределения для двух независимых выборок F_n и F_n^* . Для $n = 0, 1, 2$ различия между реализациями не заметны на глаз, кривые для $n = 3$ очень близки. Из рисунка видно, что все кривые ведут себя гладко, выходят из минимального ненулевого значения $\xi_{n(\min)}$ и при $x \rightarrow \infty$ стремятся к единице как к верхнему пределу. Значение $\xi_{n(\min)}$ растет с увеличением n , а стремление к единице при этом происходит все медленнее.

Мы вычислили также средние значения $M\xi_n$ расстояний до первой сопряженной точки для различных n . Они также растут с увеличением n . Численные значения $\xi_{n(\min)}$ и $M\xi_n$ для $n = 0, 1, 2, 3$ представлены в табл. 1.

При меньшем объеме выборки 10^3 (рис. 1, б) уже заметны негладкость эмпирических функций распределения и различия между результатами, полученными для независимых выборок.

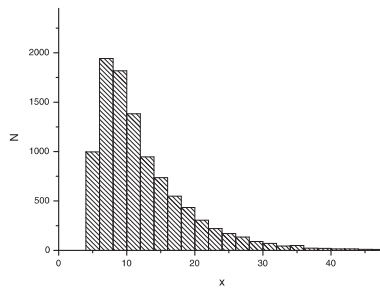
По полученным данным с объемом выборки 10^4 реализаций мы построили и плотность вероятности расстояния до первой сопряженной точки. Для построения плотности вероятности $p_n(x)$ для конкретного n мы сначала построили гистограмму, в которой высота каждого столбика N соответствует количеству случайных величин из общей выборки, попадающему в интервал ширины столбика d гистограммы (рис. 2, а). Выбор d неоднозначен, причем этот выбор влияет на форму гистограммы. Чтобы продемонстрировать это, мы построили еще две гистограммы с разным значением d на рис. 2, б и 2, в. На рис. 2, б ширина столбиков d мала, так что форма гистограммы при этом очень негладкая. На рис. 2, в ширина столбиков большая, гистограмма гладкая, но гистограмма очень грубо передает результаты моделирования. На рис. 2, а мы выбрали d как можно меньшей, но такой, что гистограмма еще выглядит гладкой. Число столбиков при этом получается приблизительно равным $\sqrt{N} \approx 300$, где N — объем выборки. Площадь получившейся таким способом гистограммы мы пронормировали на единицу. На рис. 3, а представлены плотности вероятности $p_n(x)$ для трех значений $|K_n| = 10^{-n}$, $n = 0, 1, 2$. Все кривые выходят из ненулевого значения. Это значение увеличивается с ростом n , а наиболее вероятные значения уменьшаются. Однако кривые $p_n(x)$ не выглядят такими гладкими, как эмпирические функции распределения

Таблица 1

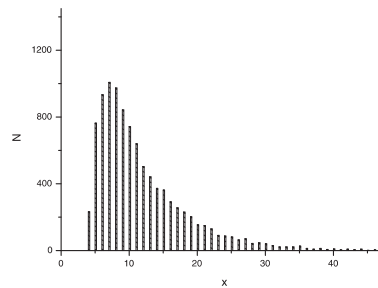
n	0	1	2	3
$M\xi_n$	11,93	51,34	255,1	1497
	11,93	51,01	255,0	1485
	11,89	52,02	256,0	1492
	11,90	51,5	253,7	1494
	11,96	51,27	254,3	1494
$\xi_{n(\min)}$	4	13	55	269
	4	12	56	265
	4	13	50	269
	4	13	55	269
	4	13	60	269

Таблица 2

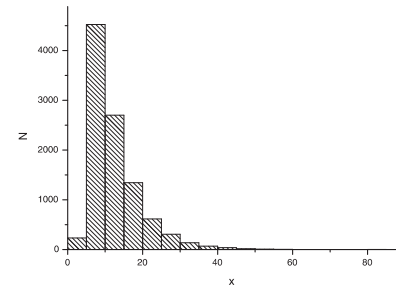
n	i	$M\xi_n^i$	$\xi_{n(\min)}^i$
0	1	11,89	4
	2	11,23	3
	3	11,19	3
1	1	51,03	12
	2	50,77	12
	3	50,18	12
2	1	255,0	55
	2	251,9	57
	3	255,2	56
3	1	1497	269
	2	1486	268
	3	1505	283



(а)



(б)



(в)

Рис. 2. Гистограммы, построенные по элементам ξ_0 выборки объема 10^4 реализаций:
а) $d = 2$, б) $d = 0, 2$, в) $d = 5$

$F_n(x)$ и $F_n^*(x)$ (рис. 1, а). Это естественно, поскольку $p(x)$ является производной $F(x)$.

На рис. 3, б мы сравнили плотность вероятности $p_0(x)$ и распределение Пуассона с параметром λ , равным среднему значению $M\xi_0$ распределения $p_0(x)$. Видно, что распределение вероятностей для расстояния до первой сопряженной точки имеет выраженный непуассоновский хвост. Подобные явления типичны для решений уравнений со случайными коэффициентами. В физике их рассматривают как проявление общего свойства случайных сред, называемого перемежаемостью [4].

Обратимся теперь к сравнению результатов, полученных с помощью последовательностей случайных чисел от двух разных генераторов: C^{++} и Maple. На рис. 4, а представлены эмпирические функции распределения $F_n(x)$ ($n = 0, 1, 2$) для обоих генераторов, построенные по выборкам объема 10^4 реализаций. Видно, что полученные эмпирические функции распределения различаются существенно больше, чем для разных независимых выборок, полученных с помощью одного генератора случайных чисел (рис. 1, а). Тем не менее, качественно поведение эмпирических функций распределения одинаково для обоих генераторов случайных чисел. Разумеется, эта неопределенность в вычислении эмпирической функции распределения вызвана тем, что примененные генераторы (как и все остальные возможные генераторы), строго говоря, дают не независимые случайные, а псевдослучайные числа [5]. В принципе, можно попытаться выяснить, применение какого генератора лучше воспроизводит в контексте интересующей нас проблемы концепцию независимых случайных чисел, принятую в теории вероятностей. Однако на практике нет оснований надеяться, что природные генераторы случайности воспроизводят представления этой концепции лучше, чем современные генераторы случайных чисел, поэтому неопределенности между эмпирическими функциями распределения, зафиксированные на рис. 3, б, представляют собой естественные ограничения на точность наших результатов.

Согласно работе [2], статистическое распределение расстояний между соседними сопряженными точками не зависит от номера интервала между соседними точками. Мы вычислили эмпирические функции распределения расстояния между первой и второй сопряженными точками по N_1 реализациям для значений $n = 0, 1, 2, 3$ и сравнили их на рис. 4, б с соответствующими кривыми распределения расстояния до

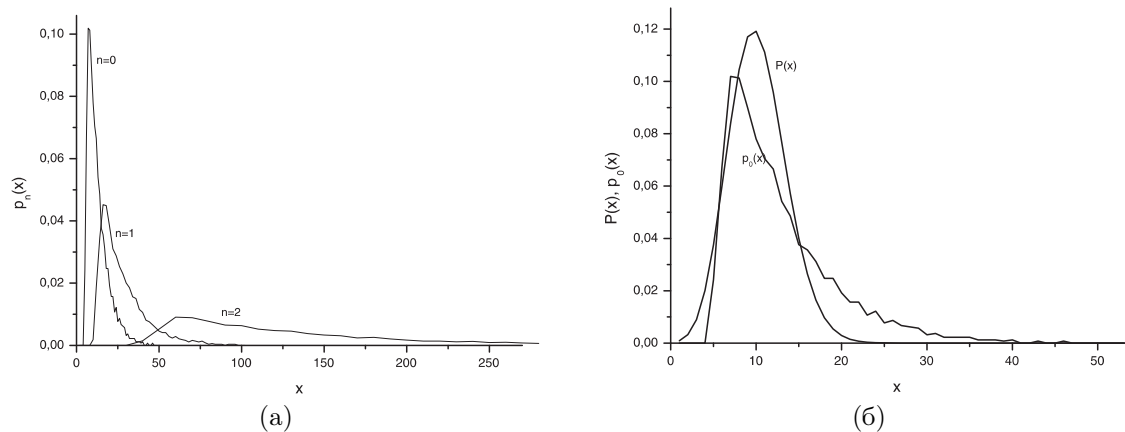


Рис. 3. а) Плотности вероятности $p_n(x)$ ($n = 0, 1, 2$) для ξ_n , б) плотность вероятности $p_0(x)$ для ξ_0 и распределение Пуассона $P(x)$ с параметром $\lambda = M\xi_0$

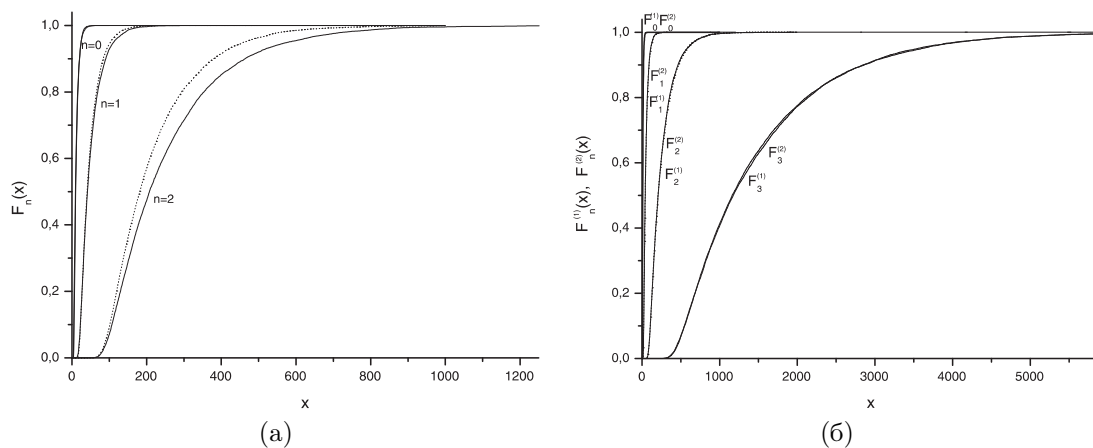


Рис. 4. Эмпирические функции распределения: а) результаты $F_n(x)$ для ξ_n при $n = 0, 1, 2$, полученные на генераторах C++ (сплошная линия) и Maple (пунктирная линия); б) результат $F_n^{(1)}(x)$ и $F_n^{(2)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, 3$) соответственно для ξ_n^1 и ξ_n^2 ; ξ_n^1 — расстояние до первой сопряженной точки, ξ_n^2 — расстояние между первой и второй сопряженными точками

первой сопряженной точки. Из рисунка видно, что как средние, так и минимальные значения плотности вероятности совпадают с высокой точностью для всех n с соответствующими значениями, полученными для кривых, относящихся к расстоянию до первой сопряженной точки. Мы вычислили и расстояние между второй и третьей сопряженными точками и также убедились в том, что их распределение не отличается от распределения расстояния до первой сопряженной точки. Насколько близко совпадение результатов трех независимых вычислений, можно судить по данным из табл. 2, в которой для $n = 0, 1, 2, 3$ представлены средние $M\xi_n^i$ и минимальные $\xi_{n(\min)}^i$ значения расстояния между соседними сопряженными точками для каждого исследованного интервала с порядковым номером i (интервал с номером $i = 1$ соответствует расстоянию до первой сопряженной точки).

Используя данные из табл. 1, мы сравнили поведение среднего $M\xi$ при стремлении к нулю модуля кривизны n с теоретическими оценками [2]. Согласно последним результатам В.Г. Ламбурта и В.Н. Тутубалина, теоретические оценки снизу и сверху при $|K| \rightarrow 0$ составляют соответственно $M\xi > C_1|K|^{-2/3}$ и $M\xi < C_2|K|^{-2/3}$, где C_1 и C_2 — постоянные, которые не удается пока вычислить аналитически. На рис. 5 в логарифмическом масштабе точками отмечены значения $M\xi^n$, полученные в численном эксперименте, а прямыми обозначены теоретические оценки снизу и сверху с коэффициентами C_1 и C_2 , подобранными так, чтобы теоретические зависимости наилучшим образом приближали экспериментальные результаты. Мы получили $C_1 = 0,86$ и $C_2 = 1,05$.

В целом, мы видим, что данные численного моделирования подтверждают имеющиеся аналитические

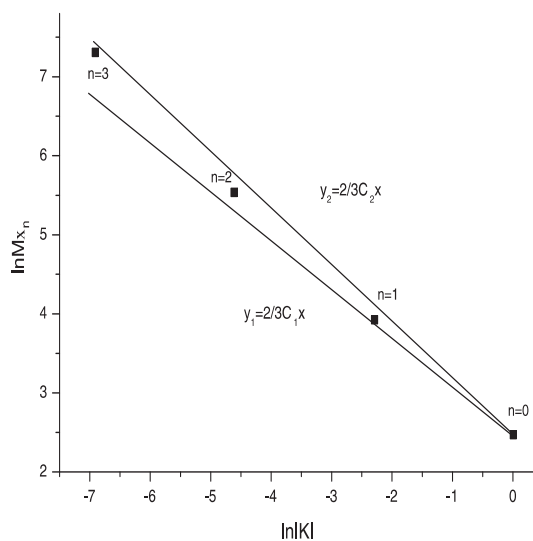


Рис. 5. Экспериментальные значения $\ln M\xi_n$ ($n = 0, 1, 2, 3$) и оценки снизу и сверху среднего значения $\ln M\xi$ в зависимости от $|K|$. Оценка снизу — прямая $y_1 = 2/3C_1(x)$, оценка сверху — прямая $y_2 = 2/3C_2(x)$, где $C_1 = 0,86$ и $C_2 = 1,05$

результаты [2].

Работа поддержана грантами РФФИ № 04-02-16094 и 02-01-00297. Мы благодарны В. Г. Ламбурту и В. Н. Тутубалину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б. Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // Астрон. ж. 1964. **41**. 19–24.
2. Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н. Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной // Математические заметки. 2003. **74**, № 3. 416–424.
3. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1992.
4. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Перемежаемость в случайной среде // УФН. 1987. **152**. 3–32.
5. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. М.: Мир, 1997.

Поступила в редакцию
01.11.2004