

Разработка экономичного алгоритма расчета напряженности магнитного поля в плазменной ловушке

Л. В. Вшивкова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0009-0006-0764-1291, e-mail: lyudmila.vshivkova@sscc.ru

В. А. Вшивков

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-8598-6926, e-mail: vsh@ssd.sccc.ru

Аннотация: При моделировании поведения плазмы в открытой магнитной ловушке, имеющей вид цилиндра, необходимо найти напряженность начального магнитного поля. В статье предложен алгоритм расчета двухмерной (r, z) конфигурации магнитного поля, которое имеет необходимое значение напряженности в центре камеры и заданное пробочное отношение. Задача сводится к решению эллиптического уравнения. В начале расчета задается расположение токовых катушек и произвольное значение токов в них. Равенство нулю радиальной компоненты магнитного поля на торцах цилиндра приводит к нулевым граничным условиям для нормальных производных векторного потенциала. Это позволяет заменить искомую функцию на другую, для которой на торцах камеры заданы нулевые граничные условия. Разработанный алгоритм для нахождения векторного потенциала комбинирует два метода: преобразование Фурье и метод прогонки, что позволяет уменьшить количество операций для решения поставленной задачи. Для того чтобы получить необходимые значения напряженности магнитного поля в центре камеры и пробочного отношения производится коррекция решения.

Ключевые слова: магнитное поле, эллиптическое уравнение, преобразование Фурье, метод прогонки, численное моделирование, открытая магнитная ловушка, физика плазмы.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ (грант № 24–21–00137).

Для цитирования: Вшивкова Л.В., Вшивков В.А. Разработка экономичного алгоритма расчета напряженности магнитного поля в плазменной ловушке // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 3. 326–335. doi 10.26089/NumMet.v25r325.



Development of an efficient algorithm for computing the magnetic field intensity in a plasma trap

Lyudmila V. Vshivkova

The Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
 Novosibirsk, Russia

ORCID: 0009-0006-0764-1291, e-mail: lyudmila.vshivkova@sscc.ru

Vitaly A. Vshivkov

The Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
 Novosibirsk, Russia

ORCID: 0000-0002-8598-6926, e-mail: vsh@ssd.sccc.ru

Abstract: When modeling the behavior of plasma in an open magnetic trap in the form of a cylinder, it is necessary to find the initial magnetic field strength. The paper deals with an algorithm to compute a two-dimensional (r, z) configuration of a magnetic field, which has the required intensity value in the center of the chamber and a given mirror ratio. The problem reduces to solving an elliptic equation. At the beginning of the computation, the location of the current coils and an arbitrary current value in them are specified. The equality to zero of the radial component of the magnetic field at the ends of the cylinder leads to zero boundary conditions for the normal derivatives of the vector potential. It allows one to replace the desired function with another, for which zero boundary conditions are specified at the ends of the chamber. The developed algorithm to find the vector potential combines two methods: the Fourier transform and the double-sweep method allowing to reduce the number of operations to solve the problem. In order to obtain the required values of the magnetic field strength in the center of the chamber and the mirror ratio, the solution is corrected.

Keywords: magnetic field, elliptic equation, Fourier transform, double-sweep method, numerical modeling, open magnetic trap, plasma physics.

Acknowledgements: The work was carried out with financial support of the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00137).

For citation: L. V. Vshivkova, V. A. Vshivkov, “Development of an efficient algorithm for computing the magnetic field intensity in a plasma trap,” *Numerical Methods and Programming*. 25 (3), 326–335 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r325.

1. Введение. Проблема удержания плазмы в термоядерных реакторах является одной из важнейших проблем при разработке концепций компактной энергетической термоядерной установки-реактора. Открытые ловушки [1–4] являются важным направлением исследований в физике магнитного удержания высокотемпературной плазмы. К настоящему времени основные физические проблемы, выявленные при исследованиях линейных магнитных систем (МГД-устойчивость, аномальные потери из-за развития микронеустойчивостей), успешно решены [5]. Тем не менее совершенствование созданных установок требует проведения численных экспериментов. Обширные исследования, в основном посвященные моделированию ионно-циклотронного резонансного нагрева плазмы в газодинамической ловушке, проводятся, например, в университете Висконсина [6]. Кинетические неустойчивости, развивающиеся вблизи сепаратрисы конфигурации с обращенным полем, численно моделируются группой из Tri Alpha Energy с использованием трехмерного кода GTC-X [7]. В [8] рассмотрена задача численного моделирования процессов, происходящих в осесимметричной открытой магнитной ловушке в режиме с предельно высоким давлением удерживаемой плазмы (режим диамагнитного удержания [9, 10]).

При моделировании процессов, происходящих в осесимметричной открытой магнитной ловушке, возникает задача нахождения начального магнитного поля. Магнитная ловушка представляет собой цилиндрическую камеру, которая заполнена фоновой плазмой. Начальное магнитное поле в открытой магнитной ловушке определяется внешними азимутальными токами. Использование цилиндрических координат позволяет свести задачу к двумерной постановке, исключив угловую координату. В этом приближении

для определения магнитных полей достаточно решить эллиптическое уравнение для азимутальной компоненты векторного потенциала. Аппроксимация уравнения на сетке приводит задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на две группы: прямые и итерационные. Достоинства и недостатки методов каждой группы хорошо известны [11, 12]. Тем не менее для решения конкретных задач необходимо приспособливать известные методы для эффективного решения задачи. Основным критерием качества метода является время его работы, поскольку решение уравнения Пуассона для скалярного потенциала электромагнитного поля часто требует решения на каждом временном шаге [13, 14]. В приближении Дарвина на каждом шаге по времени необходимо решать до 8 эллиптических уравнений [15]. В данной работе представлен прямой метод с использованием преобразования Фурье решения эллиптического уравнения для векторного потенциала в осесимметричной ловушке. Алгоритм сочетает методы преобразования Фурье и метод прогонки, а также учитывает граничные условия второго рода на торцах цилиндра. Главной особенностью предложенного метода является преобразование граничных условий на торцах цилиндра к граничным условиям первого рода. Это позволяет использовать преобразование Фурье по синусам. Вторая особенность метода заключается в том, что при вычислении компонент магнитного поля значение тока в катушках берется произвольным, задается только расположение катушек. Однако после решения эллиптического уравнения производится коррекция решения для получения необходимого значения магнитного поля в центре камеры $B_0 = B_z(0, z_{\max}/2)$ и пробочного отношения P .

2. Постановка задачи. Модель основана на кинетическом приближении для ионной и электронной компонент плазмы. В процессе создания методов моделирования процессов в плазме в режиме диамагнитного удержания в осесимметричной открытой ловушке необходимо рассмотреть отдельные уравнения модели и методы их решения.

Выпишем необходимые уравнения. Решаемая нами система состоит из кинетических уравнений Власова

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1)$$

где f_α — функция распределения частиц плазмы по скоростям, $f_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, q_α и m_α — электрический заряд и масса частиц, \mathbf{E} и \mathbf{H} — напряженности электрического и магнитного полей. Индексом α обозначен сорт частиц (ионы или электроны).

Движение частиц происходит по характеристикам уравнения (1):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right), \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}. \quad (2)$$

Значения электромагнитных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} находятся из уравнений Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ — вектор потока электрического смещения. Коэффициенты $\mu_0, \mu, \varepsilon_0, \varepsilon$ описывают магнитные и электрические свойства среды. В вакууме можно считать, что $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{E}$. Плотность заряда ρ и плотность тока \mathbf{j} вычисляются по формулам

$$\rho = q_i n_i - e n_e,$$

$$\mathbf{j} = q_i n_i \mathbf{V}_i - e n_e \mathbf{V}_e,$$

где q_i, e — электрические заряды ионов и электронов, n_i, n_e — плотности ионной и электронной компонент плазмы, $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_e$ — среднемассовые скорости ионов и электронов.

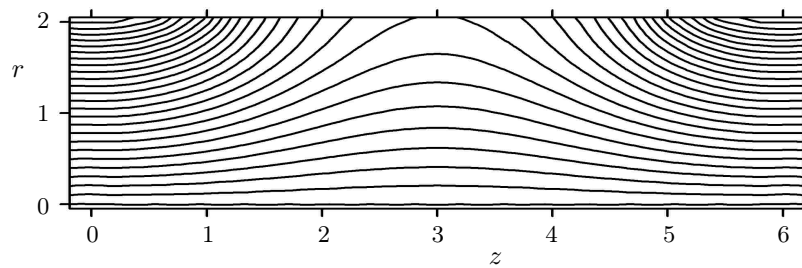


Рис. 1. Силовые линии магнитного поля в начальный момент времени
 Fig. 1. Magnetic field lines at the initial moment of time

Область решения является цилиндром, и задача решается в цилиндрической геометрии (r, z) . В начальный момент времени в области решения находится фоновая плазма с плотностью n_0 и задано магнитное поле, имеющее значение магнитного поля в центре камеры $B_0 = B_z(0, z_{\max}/2)$ и пробочное отношение P . На рис. 1 приведена конфигурация магнитного поля в начальный момент времени.

Горизонтальное направление — ось z ($0 < z < z_{\max}$), вертикальная ось — r ($0 < r < r_{\max}$). Такая конфигурация магнитного поля определяется заданными токами, текущими в азимутальном направлении. Задача состоит в нахождении напряженности магнитного поля в начальный момент времени. Для нахождения начального магнитного поля $\mathbf{B} = \{B_r, B_\varphi, B_z\}$ решается уравнение $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}$. В область решения в точке $(0, z_{\max}/2)$ в направлении r инжектируется пучок плазмы. Втекающая плазма вытесняет магнитное поле, так что в окрестности точки ввода образуется каверна магнитного поля, т.е. область, в которой напряженность магнитного поля близка к нулю.

3. Вычисление напряженности начального магнитного поля. Для получения необходимой конфигурации магнитного поля необходимо задать расположение токов и их значения. Ток создается токовыми катушками, расположенными за пределами области решения при $r > r_{\max}$. Значение тока в катушках, расположенных на краях цилиндра, должно быть таким, чтобы образовалась магнитная пробка, препятствующая выходу плазмы из области решения. Необходимо, чтобы в центре камеры было заданное значение магнитного поля $B_z(0, z_{\max}/2)$ и выполнялось заданное пробочное отношение на оси цилиндрической камеры P

$$P = \frac{B_z(0, 0)}{B_z(0, z_{\max}/2)}.$$

Поскольку все функции зависят только от r и z , производные по φ равны нулю ($\partial/\partial\varphi = 0$), и

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left\{ -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} \right\}.$$

В начальный момент времени $j_r = j_z = 0$, $j_\varphi \neq 0$. Поэтому $B_\varphi = 0$, и для определения начального магнитного поля получаем систему двух уравнений

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = j_\varphi, \tag{4a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{4b}$$

Если ввести векторный потенциал $A = A_\varphi$ и выразить через него компоненты магнитного поля

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r}, \tag{5}$$

то уравнение (4b) будет выполнено тождественно. Подставив формулы (5) в уравнение (4a), получим уравнение для потенциала A

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -j_\varphi. \tag{6}$$

Это эллиптическое уравнение второго порядка. Для его решения необходимо задать граничные условия.

На оси цилиндра ($r = 0$) $B_r = 0$. Из этого следует, что $\partial A / \partial z = 0$ и $A = \text{const} = 0$ при $r = 0$.

На торцах цилиндра ($z = 0, z = z_{\max}$) задаем условия симметрии, т.е. $B_r = 0$. Это дает граничное условие $\partial A / \partial z = 0$. При $r = r_{\max}$ граничные условия для B_r и B_z неизвестны. Поэтому в два раза увеличим размер области решения по r и на границе $r = 2r_{\max}$ ставим простое условие $A = 0$.

Для решения уравнения (6) в области решения введем равномерную прямоугольную сетку с шагами h_r, h_z :

$$h_r = \frac{r_{\max}}{i_m}, \quad h_z = \frac{z_{\max}}{k_m},$$

где i_m, k_m — количество ячеек по осям r и z .

Будем считать, что значения потенциала A и плотности тока j_φ определяются в центре ячейки. Запишем конечно-разностную схему для уравнения (6):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r^2} \left[\frac{1}{r_i} (r_{i+0.5} A_{i+0.5, k-0.5} - r_{i-0.5} A_{i-0.5, k-0.5}) - \frac{1}{r_{i-1}} (r_{i-0.5} A_{i-0.5, k-0.5} - r_{i-1.5} A_{i-1.5, k-0.5}) \right] + \\ & + \frac{1}{h_z^2} (A_{i-0.5, k+0.5} - 2A_{i-0.5, k-0.5} + A_{i-0.5, k-1.5}) + \\ & + j_{\varphi, i-0.5, k-0.5} = 0, \quad i = 2, \dots, 2i_m; \quad k = 1, \dots, k_m. \end{aligned} \quad (7)$$

При $i = 1$ ($r = h_r/2$) схема (7) неприменима, поскольку в знаменателе появляется $r_0 = 0$.

Рассмотрим аппроксимацию члена $\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right]$ в уравнении (6) при $r = h_r/2$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right]_{r=h_r/2} \approx \frac{1}{h_r} \left[\frac{1}{h_r} \left(\frac{\partial(rA)}{\partial r} \right)_{i=1} - \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial(rA)}{\partial r} \right)_{i=0} \right].$$

Аппроксимация первого члена в квадратных скобках не вызывает трудностей

$$\frac{1}{h_r} \left(\frac{\partial(rA)}{\partial r} \right)_{i=1} \approx \frac{1}{h_r} \left(\frac{3}{2} A_{1.5} - \frac{1}{2} A_{0.5} \right).$$

А во втором члене в знаменателе стоит нуль. Запишем $\frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r}$ при малых значениях r и затем найдем предел при $r \rightarrow 0$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right] = 2 \frac{\partial A}{\partial r}.$$

Как результат, избавляемся от нуля в знаменателе, и, следовательно, это выражение легко аппроксимируется

$$\frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial(rA)}{\partial r} \right)_{i=0} \approx \frac{4}{h_r} A_{0.5}.$$

Таким образом, схема при $i = 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r^2} \left(\frac{3}{2} A_{1.5, k-0.5} - \frac{9}{2} A_{0.5, k-0.5} \right) + \\ & + \frac{1}{h_z^2} (A_{0.5, k+0.5} - 2A_{0.5, k-0.5} + A_{0.5, k-1.5}) + j_{\varphi, 0.5, k-0.5} = 0, \quad k = 1, \dots, k_m. \end{aligned} \quad (8)$$

Схема (7), (8) аппроксимирует уравнение (6) со вторым порядком точности.

Выпишем граничные условия для схемы (7). Для реализации граничных условий введем фиктивные ячейки:

$$r = 0: \quad A_{0.5, k-0.5} + A_{-0.5, k-0.5} = 0, \quad k = 1, \dots, k_m; \quad (9a)$$

$$z = 0: \quad A_{i-0.5, 0.5} = A_{i-0.5, -0.5}, \quad i = 1, \dots, 2i_m; \quad (9b)$$

$$z = z_{\max}: \quad A_{i-0.5, k_m+0.5} = A_{i-0.5, k_m-0.5}, \quad i = 1, \dots, 2i_m; \quad (9c)$$

$$r = 2r_{\max} + h_r/2: \quad A_{2i_m+0.5, k-0.5} = 0, \quad k = 1, \dots, k_m. \quad (9d)$$

Схема (7), (8) с граничными условиями (9) образуют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).



Как известно, методы решения СЛАУ делятся на прямые и итерационные. В работе [16] для системы уравнений (7), (8) с граничными условиями (9) предложен итерационный метод, учитывающий граничные условия при $z = 0$ и $z = z_{\max}$. В настоящей работе для той же задачи предлагается прямой метод, сочетающий преобразование Фурье и метод прогонки. Опишем метод решения.

Преобразуем уравнения (7), (8), заменив сеточные функции $A_{i-0.5,k-0.5}$ и $j_{\varphi,i-0.5,k-0.5}$ на новые $\varphi_{i-0.5,k}$ и $J_{i-0.5,k}$ по формулам

$$\varphi_{i-0.5,k} = A_{i-0.5,k+0.5} - A_{i-0.5,k-0.5}, \quad (10)$$

$$J_{i-0.5,k} = j_{\varphi,i-0.5,k+0.5} - j_{\varphi,i-0.5,k-0.5}. \quad (11)$$

Система уравнений (7) перейдет в следующую систему

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r^2} \left[\frac{1}{r_i} (r_{i+0.5}\varphi_{i+0.5,k} - r_{i-0.5}\varphi_{i-0.5,k}) - \frac{1}{r_{i-1}} (r_{i-0.5}\varphi_{i-0.5,k} - r_{i-1.5}\varphi_{i-1.5,k}) \right] + \\ & + \frac{1}{h_z^2} (\varphi_{i-0.5,k+1} - 2\varphi_{i-0.5,k} + \varphi_{i-0.5,k-1}) + J_{i-0.5,k} = 0, \quad i = 2, \dots, 2i_m; \quad k = 1, \dots, k_m - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

А система уравнений (8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r^2} \left(\frac{3}{2}\varphi_{1.5,k} - \frac{9}{2}\varphi_{0.5,k} \right) + \frac{1}{h_z^2} (\varphi_{0.5,k+1} - 2\varphi_{0.5,k} + \varphi_{0.5,k-1}) + \\ & + J_{0.5,k} = 0, \quad k = 1, \dots, k_m. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничные условия (8) преобразуются к виду

$$r = 0: \quad \varphi_{0.5,k} + \varphi_{-0.5,k} = 0, \quad k = 1, \dots, k_m - 1; \quad (14a)$$

$$z = 0: \quad \varphi_{i-0.5,0} = 0, \quad i = 1, \dots, 2i_m; \quad (14b)$$

$$z = z_{\max}: \quad \varphi_{i-0.5,k_m} = 0, \quad i = 1, \dots, 2i_m; \quad (14c)$$

$$r = 2r_{\max} + h_r/2: \quad \varphi_{2i_m+0.5,k} = 0, \quad k = 1, \dots, k_m - 1. \quad (14d)$$

Теперь искомые функции находятся в целых узлах по z . В целых узлах по z заданы и граничные условия. Можно заметить, что для соответствующего эллиптического уравнения граничные условия второго рода перешли в граничные условия первого рода. Кроме того, они стали нулевыми, что позволяет использовать в направлении z преобразование Фурье по синусам. Разложение в ряд Фурье по синусам для сеточных функций $\varphi_{i-0.5,k}$ и $J_{i-0.5,k}$ имеет вид

$$\varphi_{i-0.5,k} = \frac{2}{k_m} \sum_{j=1}^{k_m} \Phi_{i-0.5,j} \sin \frac{\pi j k}{k_m}, \quad (15)$$

$$J_{i-0.5,k} = \frac{2}{k_m} \sum_{j=1}^{k_m} G_{i-0.5,j} \sin \frac{\pi j k}{k_m}. \quad (16)$$

Коэффициенты ряда Фурье для сеточной функции $J_{i-0.5,k}$ находятся по формулам

$$G_{i-0.5,k} = \sum_{j=1}^{k_m} J_{i-0.5,j} \sin \frac{\pi j k}{k_m}, \quad i = 1, \dots, 2i_m.$$

Подставив разложения (15) и (16) в уравнения (12), (13), получим для каждого j ($j = 1, \dots, k_m - 1$) СЛАУ с трехдиагональной матрицей

$$\begin{aligned} & \frac{r_{i-1.5}}{h_r^2 r_{i-1}} \Phi_{i-1.5,j} - \left(\frac{2r_{i-0.5}^2}{h_r^2 r_{i-1} r_i} + \frac{4}{h_z^2} \sin^2 \frac{\pi j}{2k_m} \right) \Phi_{i-0.5,j} + \\ & + \frac{r_{i+0.5}}{h_r^2 r_i} \Phi_{i+0.5,j} + G_{i-0.5,j} = 0, \quad i = 1, \dots, 2i_m. \end{aligned} \quad (17)$$

При $i = 1$:

$$\frac{3}{2h_r^2}\Phi_{1.5,j} - \left(\frac{9}{2h_r^2} + \frac{4}{h_z^2}\sin^2\frac{\pi j}{2k_m}\right)\Phi_{0.5,j} + G_{0.5,j} = 0. \quad (18)$$

Для решения системы уравнений (17) используется метод прогонки. Уравнение (18) играет роль граничного условия для схемы (17). Второе граничное условие для схемы (17) получается из условия (14d)

$$\Phi_{2i_m+0.5,j} = 0. \quad (19)$$

На первом этапе решения из граничного условия (18) задаются начальные значения прогоночных коэффициентов

$$\alpha_1 = \frac{3}{2h_r^2} \left/ \left(\frac{9}{2h_r^2} + \frac{4}{h_z^2}\sin^2\frac{\pi j}{2k_m}\right)\right., \quad \beta_1 = G_{0.5,j} \left/ \left(\frac{9}{2h_r^2} + \frac{4}{h_z^2}\sin^2\frac{\pi j}{2k_m}\right)\right..$$

На втором этапе в цикле находятся остальные прогоночные коэффициенты

$$\alpha_i = \frac{r_{i+0.5}}{h_r^2 r_i} \left/ \left(\frac{2r_{i-0.5}^2}{h_r^2 r_{i-1} r_i} + \frac{4}{h_z^2}\sin^2\frac{\pi j}{2k_m} - \frac{r_{i-1.5}}{h_r^2 r_{i-1}}\alpha_{i-1}\right)\right.,$$

$$\beta_i = \left(\frac{r_{i-1.5}}{h_r^2 r_{i-1}}\beta_{i-1} + G_{i-0.5,j}\right) \left/ \left(\frac{2r_{i-0.5}^2}{h_r^2 r_{i-1} r_i} + \frac{4}{h_z^2}\sin^2\frac{\pi j}{2k_m} - \frac{r_{i-1.5}}{h_r^2 r_{i-1}}\alpha_{i-1}\right)\right.,$$

$$i = 2, \dots, 2i_m.$$

На третьем этапе выполняется обратная прогонка с начальным условием (19)

$$\Phi_{i-0.5,j} = \alpha_i \Phi_{i+0.5,j} + \beta_i, \quad i = 2i_m, 2i_m - 1, \dots, 2, 1.$$

После нахождения коэффициентов ряда Фурье для сеточной функции $\varphi_{i-0.5,k}$ по формулам преобразования Фурье (15) можно найти саму функцию $\varphi_{i-0.5,k}$. Далее для каждого i , используя формулу (10), можно найти значения $A_{i-0.5,k-0.5}$

$$A_{i-0.5,k+0.5} = A_{i-0.5,k-0.5} + \varphi_{i-0.5,k}, \quad k = 1, \dots, k_m. \quad (20)$$

Для получения начального значения $A_{i-0.5,0.5}$ необходимо решить систему уравнений, которая получается из системы (7)

$$\frac{1}{h_r^2} \left[\frac{1}{r_i} (r_{i+0.5} A_{i+0.5,0.5} - r_{i-0.5} A_{i-0.5,0.5}) - \frac{1}{r_{i-1}} (r_{i-0.5} A_{i-0.5,0.5} - r_{i-1.5} A_{i-1.5,0.5}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{h_z^2} \varphi_{i-0.5,1} + j_{\varphi,i-0.5,0.5} = 0, \quad i = 2, \dots, 2i_m \quad (21)$$

с граничными условиями

$$\frac{1}{h_r^2} \left(\frac{3}{2} A_{1.5,0.5} - \frac{9}{2} A_{0.5,0.5} \right) + \frac{1}{h_z^2} \varphi_{0.5,1} + j_{\varphi,0.5,0.5} = 0,$$

$$A_{2i_m+0.5,0.5} = 0.$$

Система уравнений (21) решается методом прогонки аналогично решению системы (17).

По найденным значениям векторного потенциала вычисляются компоненты напряженности электрического поля

$$B_{r,i-0.5,k} = -\frac{1}{h_z} (A_{i-0.5,k+0.5} - A_{i-0.5,k-0.5}), \quad i = 0, \dots, i_m + 1; \quad k = 0, \dots, k_m. \quad (22)$$

$$B_{z,i,k-0.5} = \frac{1}{r_i h_r} (r_{i+0.5} A_{i+0.5,k-0.5} - r_{i-0.5} A_{i-0.5,k-0.5}), \quad i = 0, \dots, i_m; \quad k = 0, \dots, k_m + 1. \quad (23)$$

При вычислении компонент напряженности магнитного поля нигде не учитывались значение магнитного поля в центре камеры $B_0 = B_z(0, z_{\max}/2)$ и пробочное отношение P . Поэтому вычисленные значения нуждаются в коррекции.



Новое значение z -компоненты магнитного поля найдем по формуле

$$B_{z,i,k-0.5}^* = \alpha B_{z,i,k-0.5} + \delta. \quad (24)$$

Обозначим $B_{\min} = B_{z,0,k_m/2-0.5}$, $B_{\max} = B_{z,0,0.5}$. Необходимые условия для напряженности магнитного поля дадут

$$\begin{aligned} B_0 &= \alpha B_{\min} + \delta, \\ P &= \frac{\alpha B_{\max} + \delta}{B_0}. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, найдем α и δ .

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{B_0(P-1)}{B_{\max} - B_{\min}}, \\ \delta &= \frac{B_0(B_{\max} - PB_{\min})}{B_{\max} - B_{\min}}. \end{aligned}$$

Теперь по формуле (24) найдем значения $B_{z,i,k-0.5}^*$.

Зависимость $B_{r,i-0.5,k}^*$ от нового потенциала $A_{i-0.5,k-0.5}^*$ должна иметь вид формулы (24). Поэтому новые значения потенциала $A_{i-0.5,k-0.5}^*$ будем искать в виде

$$A_{i-0.5,k-0.5}^* = \alpha A_{i-0.5,k-0.5} + \delta_1 r_{i-0.5}.$$

Выразив из этой формулы $A_{i-0.5,k-0.5}$ и подставив в уравнение (7), найдем значение δ_1 : $\delta_1 = \delta/2$. Новые значения $B_{r,i-0.5,k}^*$ будут вычисляться по формуле (22) с заменой $A_{i-0.5,k-0.5}$ на $A_{i-0.5,k-0.5}^*$.

На этом вычисление напряженности начального магнитного поля завершается.

4. Результаты расчетов. Для проверки скорости работы алгоритмов были проведены вычислительные эксперименты. Коды были написаны на языке Фортран 77. Преобразование Фурье выполнялось по формулам (15), (16). Для сравнения было использовано быстрое преобразование Фурье (БПФ) [17]. Проводилось сравнение времени расчетов для разных сеток, а также при использовании преобразования Фурье по формулам (15), (16) и быстрого преобразования Фурье только по синусам и общего БПФ (по синусам и косинусам). В табл. 1 приведены времена в миллисекундах для решения задачи (7), (8) с граничными условиями (9).

Таблица 1. Время выполнения в миллисекундах вариантов решения задачи (7), (8) с граничными условиями (9)

Table 1. Execution time in milliseconds for solutions to problem (7), (8) with boundary conditions (9)

Сетка Mesh	Формулы (15), (16) Formulas (15), (16)	БПФ по синусам FFT by sines	Общее БПФ Total FFT
20 × 32	0.214	0.115	0.311
40 × 64	1.265	0.457	1.289
80 × 128	9.557	1.879	5.353

Из табл. 1 видно, что метод с обычным преобразованием Фурье проигрывает по времени методам с БПФ. Далее, метод с БПФ по синусам примерно в три раза эффективнее метода с общим БПФ.

5. Заключение. Предложен метод преобразования граничных условий второго рода к граничным условиям первого рода. Это позволило использовать преобразование Фурье по синусам и примерно в три раза уменьшить время работы алгоритма.

Предложен метод вычисления компонент напряженности магнитного поля без задания значений тока в кольцевых катушках. Необходимые значения магнитного поля в центре камеры $B_0 = B_z(0, z_{\max}/2)$ и пробочного отношения P вычисляются путем коррекции первоначально найденного векторного потенциала.

Список литературы

1. Буджер Г.И. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. 3–32.
2. Post R.F. Summary of UCRL pyrotron (mirror machine) program // Proc. 2nd United Nations Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, September 1–13, Vol. 32, 1958. Geneva: United Nations, 1958.
3. Рютов Д.Д. Открытые ловушки // Успехи физических наук. 1988. **154**, № 4. 565–614. doi [10.3367/UFNr.0154.198804b.0565](https://doi.org/10.3367/UFNr.0154.198804b.0565).
4. Post R.F. The magnetic mirror approach to fusion // Nucl. Fusion. 1987. **27**, N 10. 1579–1739. doi [10.1088/0029-5515/27/10/001](https://doi.org/10.1088/0029-5515/27/10/001).
5. Сквородин Д.И., Черноштанов И.С., Амиров В.Х. и др. Газодинамическая многопробочная ловушка ГД-МЛ // Физика плазмы. 2023. **49**, № 9. 831–884. doi [10.31857/S0367292123600322](https://doi.org/10.31857/S0367292123600322).
6. Harvey R.W., Petrov Yu.V., Forest C.B. 3D distributions resulting from neutral beam, ICRF and EC heating in an axisymmetric mirror // AIP Conf. Proc. 2016. **1771**, N 1. Article Number 040002. doi [10.1063/1.4964187](https://doi.org/10.1063/1.4964187).
7. Wang W.H., Bao J., Wei X.S., et al. Effects of equilibrium radial electric field on ion temperature gradient instability in the scrape-off layer of a field-reversed configuration // Plasma Phys. Control. Fusion. 2021. **63**, N 6. Article Number 065001. doi [10.1088/1361-6587/abf403](https://doi.org/10.1088/1361-6587/abf403).
8. Boronina M.A., Chernykh I.G., Dudnikova G.I., et al. Mathematical modelling of beam dynamics in diamagnetic confinement regime of open trap // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. **2028**, N 1. Article Number 012020. doi [10.1088/1742-6596/2028/1/012020](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2028/1/012020).
9. Beklemishev A.D. Diamagnetic “bubble” equilibria in linear traps // Physics of Plasmas. 2016. **23**, N 8. Article Number 082506. doi [10.1063/1.4960129](https://doi.org/10.1063/1.4960129).
10. Черноштанов И.С. Бесстолкновительная динамика частиц в диамагнитной ловушке // Физика плазмы. 2022. **48**, № 2. 99–110. doi [10.31857/S0367292122020056](https://doi.org/10.31857/S0367292122020056)
11. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002.
12. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Институт математики, 2000.
13. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
14. Березин Ю.А., Дудникова Г.И., Лисейкина Т.В., Федорук М.П. Моделирование нестационарных плазменных процессов. Новосибирск: НГУ, 2018.
15. Schmitz H., Grauer R. Darwin–Vlasov simulations of magnetised plasmas // J. Comput. Phys. 2006. **214**, N 2. 738–756. doi [10.1016/j.jcp.2005.10.013](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.10.013).
16. Liseykina T.V., Vshivkov V.A., Kholiyarov U.A. An efficient algorithm for calculating the magnetic field in a cylindrical plasma trap // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. **45**, N 1. 75–84. doi [10.1134/S1995080224010359](https://doi.org/10.1134/S1995080224010359).
17. Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. Numerical recipes in Fortran 77: The art of scientific computing. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

Поступила в редакцию
5 августа 2024 г.

Принята к публикации
23 августа 2024 г.

Информация об авторах

Людмила Витальевна Вшивкова — к.ф.-м.н., ученый секретарь; Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр-кт Академика Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Виталий Андреевич Вшивков — д.ф.-м.н., глав. науч. сотр.; Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр-кт Академика Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.



References

1. G. I. Budker, “Thermonuclear Reactions in a System with Magnetic Mirrors. On the Issue of Direct Conversion of Nuclear Energy into Electrical Energy,” in *Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions* (Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1958), Vol. 3, pp. 3–32.
2. R. F. Post, “Summary of UCRL Pyrotron (Mirror Machine) Program,” in *Proc. 2nd United Nations Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, Switzerland, September 1–13, 1958* (United Nations, Geneva, 1958), Vol. 32.
3. D. D. Ryutov, “Open-Ended Traps,” *Usp. Fiz. Nauk* **154** (4), 565–614 (1988) [Sov. Phys. Usp. **31** (4), 300–327 (1988)]. doi [10.1070/PU1988v031n04ABEH005747](https://doi.org/10.1070/PU1988v031n04ABEH005747).
4. R. F. Post, “The Magnetic Mirror Approach to Fusion,” *Nucl. Fusion* **27** (10), 1579–1739 (1987). doi [10.1088/0029-5515/27/10/001](https://doi.org/10.1088/0029-5515/27/10/001).
5. D. I. Skovorodin, I. S. Chernoshtanov, V. Kh. Amirov, et al., “Gas-Dynamic Multiple-Mirror Trap GDMT,” *Fizika Plazmy* **49**, № 9, 831–884 (2023) [Plasma Phys. Rep. **49** (9), 1039–1086 (2023)]. doi [10.1134/S1063780X23600986](https://doi.org/10.1134/S1063780X23600986).
6. R. W. Harvey, Yu. V. Petrov, and C. B. Forest, “3D Distributions Resulting from Neutral Beam, ICRF and EC Heating in an Axisymmetric Mirror,” *AIP Conf. Proc.* **1771** (1), Article Number 040002 (2016). doi [10.1063/1.4964187](https://doi.org/10.1063/1.4964187).
7. W. H. Wang, J. Bao, X. S. Wei, et al., “Effects of Equilibrium Radial Electric Field on Ion Temperature Gradient Instability in the Scrape-off Layer of a Field-Reversed Configuration,” *Plasma Phys. Control. Fusion* **63** (6), Article Number 065001 (2021). doi [10.1088/1361-6587/abf403](https://doi.org/10.1088/1361-6587/abf403).
8. M. A. Boronina, I. G. Chernykh, G. I. Dudnikova, et al., “Mathematical Modelling of Beam Dynamics in Diamagnetic Confinement Regime of Open Trap,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **2028** (1), Article Number 012020 (2021). doi [10.1088/1742-6596/2028/1/012020](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2028/1/012020).
9. A. D. Beklemishev, “Diamagnetic ‘Bubble’ Equilibria in Linear Traps,” *Phys. Plasmas* **23** (8), Article Number 082506 (2016). doi [10.1063/1.4960129](https://doi.org/10.1063/1.4960129).
10. I. S. Chernoshtanov, “Collisionless Particle Dynamics in Diamagnetic Trap,” *Plasma Phys. Rep.* **48** (2), 79–90 (2022). doi [10.1134/S1063780X22020052](https://doi.org/10.1134/S1063780X22020052).
11. V. M. Verzhbitsky, *Foundations of Numerical Methods* (Vysshaya Shkola, Moscow, 2002) [in Russian].
12. V. P. Il’in, *Methods of Finite Differences and Finite Volumes for Elliptic Equations* (Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
13. C. K. Birdsall and A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation* (CRC Press, Boca Raton, 2004; Energoatomizdat, Moscow, 1989).
14. Yu. A. Berezin, G. I. Dudnikova, T. V. Liseykina, and M. P. Fedoruk, *Modeling of Non-Stationary Plasma Processes* (Novosibirsk State Univ., Novosibirsk, 2018) [in Russian].
15. H. Schmitz and R. Grauer, “Darwin–Vlasov Simulations of Magnetised Plasmas,” *J. Comput. Phys.* **214** (2), 738–756 (2006). doi [10.1016/j.jcp.2005.10.013](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.10.013).
16. T. V. Liseykina, V. A. Vshivkov, and U. A. Kholiyarov, “An Efficient Algorithm for Calculating the Magnetic Field in a Cylindrical Plasma Trap,” *Lobachevskii J. Math.* **45** (1), 75–84 (2024). doi [10.1134/S1995080224010359](https://doi.org/10.1134/S1995080224010359).
17. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992).

Received
August 5, 2024

Accepted for publication
August 23, 2024

Information about the authors

Lyudmila V. Vshivkova — Ph.D., Academic Secretary; The Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Ac. Lavrentiev prospekt, 6, 630090, Novosibirsk, Russia.

Vitaly A. Vshivkov — Professor, Chief Researcher; The Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Ac. Lavrentiev prospekt, 6, 630090, Novosibirsk, Russia.