

УДК 519.6

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

И. В. Колос¹, М. В. Колос²

Получены априорные неравенства с негативной нормой для дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов с граничными условиями третьего рода в случае, когда правая часть принадлежит пространству обобщенных функций. Доказаны существование и единственность обобщенного решения задач и сходимость приближенного метода решения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04-01-00026).

Ключевые слова: краевые задачи, параболические уравнения, гиперболические уравнения, математическое моделирование, обобщенные функции, негативная норма.

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве E_n задана замкнутая ограниченная область P с границей $\partial P = \Gamma$, в каждой точке которой существует единственная нормаль $\bar{n}_0$; $C^2(P)$ — множество дважды дифференцируемых в классическом смысле функций $u(x)$ на P ; $\bar{\nu}$ — конормаль с координатами $\nu_i = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^n a_{ij} n_j$, где n_j — координаты нормали $\bar{n}_0$, $n_j = \cos(\bar{n}_0, x_j)$, функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(P)$,

где $i, j = 1, \dots, n$, а величина $a(x) = \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} n_j \right)^2 \right]^{1/2}$; $\frac{du}{d\bar{\nu}}$ — производная по конормали $\bar{\nu}$, причем

справедливы соотношения $\sum_{i,j=1}^n \cos(\bar{n}_0, x_j) a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} = a(x) \sum_{j=1}^n \cos(\bar{n}_0, x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \equiv a(x) \frac{d}{d\bar{\nu}}$; $C_1^2(P)$ — множество функций $u(x) \in C^2(P)$, для которых выполняется условие

$$\alpha(x) \frac{du}{d\bar{\nu}} + \beta(x) u(x) = 0 \quad \text{для} \quad \forall x \in \Gamma, \quad (1)$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — заданные на Γ функции, удовлетворяющие соотношению $|\alpha(x)| + |\beta(x)| \neq 0$, $x \in \Gamma$.

Введем обозначения: $L_2(P)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций в смысле Лебега на P ; $(\cdot, \cdot)_{0P}$, $\|\cdot\|_{0P}$ — скалярное произведение и норма в $L_2(P)$; $W_2^1(P)$ — положительное соболевское пространство;

$$(u, v)_{1P} = \int_P \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + u(x) v(x) \right) dP$$

есть скалярное произведение в $W_2^1(P)$; $\|u\|_{1P} = \sqrt{(u, u)_{1P}}$ — норма в $W_2^1(P)$.

Справедливо неравенство $\|u\|_{0P} \leq k \|u\|_{1P}$ для $\forall u \in W_2^1(P)$, $k = \text{const} > 0$.

Рассмотрим на P линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$\mathcal{N}u \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + a_0(x) u(x), \quad (2)$$

где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(P)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_0(x) \in C(P)$, $C(P)$ — пространство непрерывных функций на P , $a_0(x) \geq c_0$ для $\forall x \in P$, $c_0 = \inf_x \{a_0(x) \mid x \in P\} > 0$.

Предполагаем, что справедливо также неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (3)$$

¹ Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, 58, 109180, Москва; e-mail: rektorat@urao.edu

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

где λ — положительная константа, ξ_i — произвольные вещественные числа ($i = 1, \dots, n$).

Покажем, что соотношения (1)–(3) задают в пространстве $L_2(P)$ замкнутый линейный оператор $\mathcal{B}$, такой, что $\mathcal{B}u = Nu$ для $\forall u \in C_1^2(P)$. Оператор $\mathcal{B}$ имеет плотную в $L_2(P)$ область определения $D(\mathcal{B})$, является симметрическим и, при некоторых условиях на функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, положительно определенным, то есть справедливы соотношения

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}u, v)_{0P} &= (u, \mathcal{B}v)_{0P} \quad \text{для } \forall u, v \in D(\mathcal{B}); \\ (\mathcal{B}u, u)_{0P} &\geq c \|u\|_{0P}^2 \quad \text{для } \forall u \in D(\mathcal{B}), \quad c = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Скалярное произведение $(\mathcal{B}u, v)_{0P}$ для функций $u, v \in C^2(P)$, удовлетворяющих условию (1), имеет вид

$$(\mathcal{B}u, v)_{0P} = - \int_P \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) v(x) dP + \int_P a_0(x) u(x) v(x) dP.$$

Второй интеграл в этом выражении симметричен относительно функций $u(x)$ и $v(x)$. Применим к первому интегралу формулу интегрирования по частям и, согласно формуле Остроградского–Гаусса, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_P \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) v(x) dP &= \int_P \sum_{i,j=1}^n u(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) dP + \\ &+ \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} v(x) \cos(\bar{n}_0, x_i) d\Gamma - \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} u(x) \cos(\bar{n}_0, x_j) d\Gamma. \end{aligned}$$

Оценим интегралы по множеству Γ . Представим множество Γ в виде объединения двух подмножеств $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \{x | \alpha(x) = 0, x \in \Gamma\}$, а $\Gamma_2 = \{x | \alpha(x) \neq 0, x \in \Gamma\}$. Отметим, что на множестве Γ_1 , согласно (1), функции $u(x)$ и $v(x)$ равны нулю и $\sum_{i,j=1}^n \cos(\bar{n}_0, x_j) a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} = a(x) \frac{d}{d\bar{\nu}}$. Таким образом,

$$\int_{\Gamma} a(x) \frac{dv}{d\bar{\nu}} u(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} a(x) \frac{du}{d\bar{\nu}} v(x) d\Gamma = \int_{\Gamma_2} a(x) \frac{dv}{d\bar{\nu}} u(x) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} a(x) \frac{du}{d\bar{\nu}} v(x) d\Gamma.$$

Так как $\alpha(x)$ на множестве Γ_2 отлично от нуля, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} a(x) \frac{dv}{d\bar{\nu}} u(x) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} a(x) \frac{du}{d\bar{\nu}} v(x) d\Gamma &= \\ &= \int_{\Gamma_2} \frac{a(x)}{\alpha(x)} \left[\alpha(x) \frac{dv}{d\bar{\nu}} + \beta(x)v(x) \right] u(x) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \frac{a(x)}{\alpha(x)} \left[\alpha(x) \frac{du}{d\bar{\nu}} + \beta(x)u(x) \right] v(x) d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю следует из того, что функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют условию (1). Следовательно,

$$(\mathcal{B}u, v)_{0P} = (u, \mathcal{B}v)_{0P} \quad \text{для } \forall u, v \in C_1^2(P).$$

Оценим скалярное произведение $(\mathcal{B}u, u)_{0P}$ для $\forall u \in C_1^2(P)$. Из доказательства симметричности оператора $\mathcal{B}$ имеем

$$\begin{aligned} - \int_P \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) u(x) dP &= \\ &= - \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} u(x) \cos(\bar{n}_0, x_i) d\Gamma + \int_P \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dP = \\ &= \int_{\Gamma_2} \frac{a(x)}{\alpha(x)} \beta(x) u^2(x) d\Gamma + \int_P \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dP. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(\mathcal{B}u, u)_{0P} = \int_{\Gamma_2} \frac{a(x)}{\alpha(x)} \beta(x) u^2(x) d\Gamma + \int_P \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dP + \int_P a_0(x) u^2(x) dP.$$

Обозначим $\tilde{a}(x) = \begin{cases} \frac{a(x)\beta(x)}{\alpha(x)}, & x \in \Gamma_2; \\ 0, & x \notin \Gamma_2. \end{cases}$ Тогда

$$(\mathcal{B}u, u)_{0P} = \int_P \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dP + \int_P (\tilde{a}(x) + a_0(x)) u^2(x) dP.$$

Из свойств функций $a_{ij}(x)$ при условии, что $\inf_{x \in P} (\tilde{a}(x) + a_0(x)) \geq 0$, получаем неравенство

$$(\mathcal{B}u, u)_{0P} \geq c \|u\|_{1P}^2 \geq c_1 \|u\|_{0P}^2, \quad \text{где } c, c_1 = \text{const} > 0;$$

здесь учтено, что $W_2^1(P) \subset L_2(P)$ и $\|u\|_{1P} \geq k \|u\|_{0P}$.

Введем обозначение $(u, v)_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}u, v)_{0P}$ для $\forall u, v \in D(\mathcal{B})$. Пополним $D(\mathcal{B})$ по этому скалярному произведению. Полученное пространство обозначим через $H_{\mathcal{B}}$. Примем это пространство за положительное $H_{\mathcal{B}} = H_{\mathcal{B}}^+$ и построим по $H_{\mathcal{B}}^+$ и $L_2(P)$ негативное пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Пусть $f(x) \in L_2(P)$. Тогда выражение $(f, u)_{0P}$, $u \in H_{\mathcal{B}}^+$, определяет непрерывный функционал на $H_{\mathcal{B}}^+$, причем непрерывность следует из (4) и неравенств

$$|(f, u)_{0P}| = |l_f(u)| \leq \|f\|_{0P} \|u\|_{0P} \leq c \|f\|_{0P} \|u\|_+, \quad f \in L_2(P), \quad u \in H_{\mathcal{B}}^+ \quad (H_{\mathcal{B}}^+ \subset L_2(P)),$$

где $\|\cdot\|_+$ — норма в $H_{\mathcal{B}}^+$. Пополним $L_2(P)$ по норме

$$\|f\|_- = \sup_u \left(\frac{|(f, u)_{0P}|}{\|u\|_+}, f \in L_2(P), u \in H_{\mathcal{B}}^+, \|u\|_+ \neq 0 \right).$$

Полученное пополнение задает пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Оператор $\mathcal{B}$ непрерывно действует из $H_{\mathcal{B}}^+$ в $H_{\mathcal{B}}^-$.

Пусть $[0, t]$ — некоторый отрезок и переменная $\tau \in [0, t]$. Пусть $\|\cdot\|_{0Q}$ — норма в $L_2(Q)$. Определим область $Q = P \times [0, t]$; $L_2(Q)$ — пространство функций $u(\tau, x)$ на Q , отображающих сегмент $[0, t]$ в пространство E_n и таких, что $\int_0^t \|u(\tau)\|_{0P}^2 d\tau = \|u\|_{0Q}^2 < \infty$.

1. Рассмотрим на пространстве $L_2(Q)$ дифференциальный оператор параболического типа

$$\mathcal{L}_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial \tau} + \mathcal{B}u, \quad u \in D(\mathcal{L}_1),$$

где $D(\mathcal{L}_1)$ — множество функций $u(\tau, x)$, заданных в области Q и непрерывно дифференцируемых по переменной $\tau \in [0, t]$, а по $x \in P$ функции $u(\tau, x) \in H_{\mathcal{B}}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau, x)|_{\tau=0} = 0, \quad \left[\alpha(x) \frac{du(\tau, x)}{d\nu} + \beta(x) u(\tau, x) \right] \Big|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (5)$$

Пусть $W_{20}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1)$ по норме

$$\|u\|_{10Q} = \left(\int_Q \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + u \mathcal{B}u \right] dQ \right)^{1/2}; \quad (6)$$

$\|\cdot\|_{10Q}$ и $(\cdot, \cdot)_{10Q}$ — норма и скалярное произведение в положительном пространстве $W_{20}^1(Q)$; $W_{20}^{-1}(Q)$ — негативное пространство, полученное пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\|v\|_{-10Q} = \sup_u \left[\frac{|(u, v)_{0Q}|}{\|u\|_{10Q}}, v \in L_2(Q), u \in W_{20}^1(Q), \|u\|_{10Q} \neq 0 \right].$$

Пусть, далее, $D(\mathcal{L}_1^*)$ — множество функций $u(\tau, x)$, имеющих хотя бы одну производную в классическом смысле по τ , а по x функции $u(\tau, x) \in H_B^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau, x)|_{\tau=t} = 0, \quad \left[\alpha(x), \frac{du(\tau, x)}{d\nu} + \beta(x)u(\tau, x) \right] \Big|_{x \in \Gamma} = 0; \quad (7)$$

$W_{2t}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1^*)$ по норме (6); $W_{2t}^{-1}(Q)$ — негативное пространство для $W_{2t}^1(Q)$; $\mathcal{L}_1^*$ — сопряженный оператор к $\mathcal{L}_1$: $\mathcal{L}_1^* u \equiv -\frac{\partial u}{\partial \tau} + \mathcal{B}u$, $u \in D(\mathcal{L}_1^*)$.

Расширим по непрерывности операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_1^*$ на все пространство $W_{20}^1(Q)$ и $W_{2t}^1(Q)$ соответственно. Расширенные операторы будем обозначать $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$.

Определение 1. Обобщенным решением задачи

$$\mathcal{L}u = f, \quad f \in L_2(Q), \quad (8)$$

где f — заданная функция, называют функцию $u(\tau, x) \in W_{20}^1(Q)$, для которой существует последовательность $\{u_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$ функций из $D(\mathcal{L}_1)$, удовлетворяющая соотношениям $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0$, $\|u_i - u\|_{10Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$.

Определение 2. Обобщенным решением задачи

$$\mathcal{L}^*v = g, \quad g \in L_2(Q), \quad (9)$$

где g — заданная функция, называют функцию $v(\tau, x) \in W_{2t}^1(Q)$, для которой существует последовательность $\{v_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$ функций из $D(\mathcal{L}_1^*)$, удовлетворяющая соотношениям $\|\mathcal{L}^*v_i - g\|_{-10Q} \rightarrow 0$, $\|v_i - v\|_{10Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$.

Лемма 1. Для задач (8) и (9) справедливы неравенства

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \leq c_1 \|u\|_{10Q}, \quad u \in W_{20}^1(Q), \quad c_1 = \text{const}; \quad (10)$$

$$\|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q} \leq c_2 \|v\|_{1tQ}, \quad v \in W_{2t}^1(Q), \quad c_2 = \text{const}. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $u(\tau, x)$ — гладкая функция из положительного пространства $W_{20}^1(Q)$, а функция $v(\tau, x) \in W_{2t}^1(Q)$. Тогда справедливо равенство $(v, \mathcal{L}u)_{0Q} = (\mathcal{L}^*v, u)_{0Q}$. Также имеет место соотношение $|(u, \mathcal{B}v)_{0P}| \leq \sqrt{(u, \mathcal{B}u)_{0P}(v, \mathcal{B}v)_{0P}}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |(v, \mathcal{L}u)_{0Q}| &= |(\mathcal{L}^*v, u)_{0Q}| \leq \\ &\leq \left(\int_Q \left[\left(\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \right)^2 + v(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) \right] dQ \right)^{1/2} \left(\int_Q [u^2(\tau, x) + u(\tau, x) \mathcal{B}u(\tau, x)] dQ \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c \|u\|_{10Q} \|v\|_{1tQ}, \end{aligned}$$

где $c = \text{const}$ и использовано неравенство $\|u\|_{0Q} \leq c \|u\|_{10Q}$ для $\forall u \in W_{20}^1(Q)$. По определению нормы в негативном пространстве имеем

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} = \sup_v \left\{ \frac{|(v, \mathcal{L}u)_{0Q}|}{\|v\|_{1tQ}}, \quad \|v\|_{1tQ} \neq 0 \right\} \leq c_1 \|u\|_{10Q} \leq c \|u\|_{10Q}, \quad u \in W_{20}^1(Q), \quad v \in W_{2t}^1(Q).$$

Для произвольной функции $u(\tau, x) \in W_{20}^1(Q)$ неравенство получаем предельным переходом.

Доказательство неравенства (11) аналогично.

Лемма 2. Для задач (8) и (9) справедливы неравенства

$$c_1 \|u\|_{0Q} \leq \|\mathcal{L}u\|_{-1tQ}, \quad c_1 = \text{const}; \quad (12)$$

$$c_2 \|v\|_{0Q} \leq \|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q}, \quad c_2 = \text{const}. \quad (13)$$

Доказательство. Введем оператор $\mathcal{J}_t$ в $L_2(Q)$, который на функциях $v(\tau, x) \in W_{20}^1(Q)$ определяется выражением

$$\mathcal{J}_t v(\tau, x) \equiv \int_t^\tau b^{-1}(s) v(s, x) ds = u(\tau, x).$$

Функция $u(\tau, x) = \mathcal{J}_t v$ при $\tau = t$ равна 0 и, следовательно, $u \in W_{2t}^1(Q)$. Таким образом, оператор $\mathcal{J}_t$ определен на $W_{20}^1(Q)$ и действует в $W_{2t}^1(Q)$; $b(\tau) = -(1 + \tau)$.

Рассмотрим выражение

$$(\mathcal{J}_t v, \mathcal{L}v)_{0Q} = (u, \mathcal{L}v)_{0Q} = \int_Q u \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + \mathcal{B}v \right) dQ = \int_Q u \frac{\partial}{\partial \tau} \left[b(\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} \right] dQ + \int_Q u \mathcal{B} \left(b(\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) dQ. \quad (14)$$

Здесь использовано то, что $v(\tau, x) = b(\tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau}$. Оценим интегралы в правой части. Первый интеграл можно записать в виде

$$\int_Q u(\tau, x) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[b(\tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \right] dQ = \int_Q \frac{\partial}{\partial \tau} \left[u(\tau, x) b(\tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \right] dQ - \int_Q b(\tau) \left(\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \right)^2 dQ.$$

Согласно формуле Остроградского,

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial \tau} \left[u(\tau, x) b(\tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \right] dQ = \int_S u(\tau, x) b(\tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \cos(\bar{n}, \tau) dS = \int_S u(\tau, x) v(\tau, x) \cos(\bar{n}, \tau) dS = 0,$$

где $S = \partial Q$ — граница области Q , $\bar{n}$ — нормаль к S . Равенство нулю следует из того, что $\cos(\bar{n}, \tau)$ отличен от нуля лишь на поверхности $\tau = 0$ и $\tau = t$, но $v(0, x) = 0$ и $u(t, x) = 0$. Таким образом,

$$\int_Q u(\tau, x) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[b(\tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \right] dQ = - \int_Q b(\tau) \left(\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \right)^2 dQ. \quad (15)$$

Для второго интеграла в правой части (14) находим, что

$$\int_Q u(\tau, x) \mathcal{B} \left[b(\tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \right] dQ = \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial}{\partial \tau} \left[u(\tau, x) b(\tau) \mathcal{B}u(\tau, x) \right] dQ - \frac{1}{2} \int_Q u(\tau, x) \frac{db(\tau)}{d\tau} \mathcal{B}u(\tau, x) dQ. \quad (16)$$

Используя формулу Остроградского, получаем

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial \tau} \left[u(\tau, x) b(\tau) \mathcal{B}u(\tau, x) \right] dQ = \int_S u(\tau, x) b(\tau) \mathcal{B}u(\tau, x) \cos(\bar{n}, \tau) dS = -b(0) \int_P u(0, x) \mathcal{B}u(0, x) dP \quad (17)$$

($u(t, x) = 0$; $\cos(\bar{n}, \tau) \neq 0$ лишь при $\tau = 0$ и $\tau = t$). Подставим (15)–(17) в (14) и, используя явный вид оператора $\mathcal{J}_t$, находим

$$(\mathcal{J}_t v, \mathcal{L}v)_{0Q} = \frac{1}{2} \int_Q \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + u \mathcal{B}u \right] dQ + \int_Q \tau \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 dQ + \frac{1}{2} \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 dQ + \frac{1}{2} \int_P u(0, x) \mathcal{B}u(0, x) dP;$$

так как выражение $\int_Q \left(\tau + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 dQ + \frac{1}{2} \int_P u(0, x) \mathcal{B}u(0, x) dP \geq 0$, то справедливо неравенство

$$(\mathcal{J}_t v, \mathcal{L}v)_{0Q} \geq \frac{1}{2} \|u\|_{1tQ}^2. \quad (18)$$

Применим обобщенное неравенство Коши–Буняковского и, используя явный вид оператора $\mathcal{J}_t$, получаем соотношения

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}v\|_{-1tQ} &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{1tQ}, \\ \|u\|_{1tQ}^2 &= \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \int_t^\tau \{-(1+s)\} v(s, x) \right]^2 dQ + \int_Q u(\tau, x) \mathcal{B}u(\tau, x) dQ \geq \int_Q [-(1+\tau)v(\tau, x)]^2 dQ \geq \|v\|_{0Q}^2. \end{aligned}$$

Отсюда $\|\mathcal{L}v\|_{-1tQ} \geq c_1 \|v\|_{0Q}$.

Для произвольных $v \in L_2(Q)$ неравенство получаем предельным переходом.

Неравенство (13) можно доказать аналогично.

Теорема 1. Для любых функций $f \in L_2(Q)$ и $g \in L_2(Q)$ существуют единственные обобщенные решения задач (8) и (9) соответственно в пространствах $W_{20}^1(Q)$ и $W_{2t}^1(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим функционал $l_f(v) = (v, f)_{0Q}$, $v \in D(\mathcal{L}^*) \subset W_{2t}^1(Q)$. Используя неравенство из леммы 2, находим, что $|l_f(v)| = |(v, f)_{0Q}| \leq \|v\|_{0Q} \|f\|_{0Q} \leq c \|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q}$, т.е. $l_f(v)$ — непрерывный линейный функционал от $\mathcal{L}^*v$, $v \in D(\mathcal{L}^*)$.

Расширим по теореме Хана–Банаха этот функционал на все $W_{20}^{-1}(Q)$. По обобщенной теореме Рисса [5, 7] для линейного непрерывного функционала, определенного на пространстве $W_{20}^{-1}(Q)$, существует функция $u \in W_{20}^1(Q)$, такая, что $l(\rho) = \langle u, \rho \rangle_{0Q}$ для $\forall \rho \in W_{20}^{-1}(Q)$, где $\langle u, \rho \rangle_{0Q}$ — билинейная форма в пространствах $W_{20}^1(Q)$ и $W_{20}^{-1}(Q)$. Пусть $\rho = \mathcal{L}^*v$, где v и u — гладкие функции, удовлетворяющие условиям (7) и (5) соответственно. Тогда

$$l(\rho) \equiv \langle u, \rho \rangle_{0Q} = \langle u, \mathcal{L}^*v \rangle = (u, \mathcal{L}^*v)_{0Q} = (\mathcal{L}u, v)_{0Q} = (f, v)_{0Q}.$$

Функции $u(\tau, x)$, удовлетворяющие условиям (5), плотны в $W_{20}^1(Q)$. Таким образом, существует последовательность $\{u_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$ гладких функций, удовлетворяющих (5), такая, что $\|u_i - u\|_{10Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Далее, используя лемму 1, находим, что $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Существование решения доказано. Единственность следует из неравенства (12).

Существование и единственность решения задачи (9) доказываются аналогично.

Определение 3. Обобщенным решением задачи (8) при $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ будем называть такую функцию $u(\tau, x) \in L_2(Q)$, для которой существует последовательность гладких функций $\{u_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$, $u_i \in W_{20}^1(Q)$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0$, $\|u_i - u\|_{0Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$.

Определение 4. Обобщенным решением задачи (9) с правой частью из $W_{20}^{-1}(Q)$ будем называть такую функцию $v(\tau, x) \in L_2(Q)$, для которой существует последовательность функций $\{v_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$, $v_i \in W_{2t}^1(Q)$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{L}^*v_i - g\|_{-10Q} \rightarrow 0$, $\|v_i - v\|_{0Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Для любой функции $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ существует единственное обобщенное решение в смысле определения 3 задачи (8); для любой $g \in W_{20}^{-1}(Q)$ существует единственное обобщенное решение в смысле определения 4 задачи (9).

Доказательство. Пространство $L_2(Q)$ плотно в $W_{2t}^{-1}(Q)$, поэтому для любой $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ в $L_2(Q)$ существует последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$, удовлетворяющая соотношению $\|f_i - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. По теореме 1 для любой $f_i \in L_2(Q)$ существует единственное решение $u_i(\tau, x)$ задачи (8) в смысле определения 1.

Используя неравенство (12), находим $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} = \|f_i - f\|_{-1tQ} \geq c \|u_i - u\|_{0Q}$. Переходя в этом неравенстве к пределу по $i \rightarrow \infty$, устанавливаем существование обобщенного решения задачи (8) с правой частью из $W_{2t}^{-1}(Q)$ в смысле определения 3. Единственность следует из неравенства (12).

Доказательство второй части теоремы аналогично.

Обратимся теперь к приближенному решению краевой задачи. Рассмотрим вначале задачу (8), когда правая часть $f \in L_2(Q)$. Ее приближенное решение будем искать в виде

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^k y_i(\tau) \rho_i(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(Q)$, удовлетворяющая условию (1), а выражение для $y_i(\tau)$ находится из соотношений

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial \tau}, \rho_j \right)_{0P} + (\mathcal{B}u_k, \rho_j)_{0P} = (f, \rho_j)_{0P}, \quad (u_k(0, x), \rho_j)_{0P} = y_j(0), \quad j = 1, \dots, k. \quad (20)$$

Используя (19), получаем

$$\frac{dy_i(\tau)}{d\tau} + \sum_{s=1}^k y_s(\tau) (\mathcal{B}\rho_s, \rho_j)_{0P} = (f, \rho_j)_{0P}, \quad y_i(0) = 0, \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (21)$$

Эти уравнения можно записать в матричной форме:

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = F_k y(\tau) + G_k(\tau), \quad y(0) = 0, \quad (22)$$

где $y(\tau)$ и $G_k(\tau)$ — векторы-столбцы, $y(\tau) = \{y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_k(\tau)\}$,

$$G_k(\tau) = \{(f, \rho_1)_{0P}, (f, \rho_2)_{0P}, \dots, (f, \rho_k)_{0P}\}, \quad F_k = - \begin{bmatrix} (\mathcal{B}\rho_1, \rho_1)_{0P} \cdots (\mathcal{B}\rho_1, \rho_k)_{0P} \\ \cdots \cdots \cdots \\ (\mathcal{B}\rho_k, \rho_1)_{0P} \cdots (\mathcal{B}\rho_k, \rho_k)_{0P} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что решение (21) понимается в обобщенном смысле [5, 7].

Лемма 3. Для любой функции $f \in L_2(Q)$ справедливо неравенство $\|f\|_{0Q} \geq c \|u_k\|_{10Q}$.

Доказательство. Умножим обе части соотношения (20) на $(2t - \tau) \frac{dy_j(\tau)}{d\tau}$. Суммируя по j от 1 до k и интегрируя по $\tau \in [0, t]$, находим

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u_k}{\partial \tau}, \sum_{j=1}^k (2t - \tau) \frac{dy_j(\tau)}{d\tau} \rho_j \right)_{0P} d\tau + \int_0^t \left(\mathcal{B}u_k, \sum_{j=1}^k (2t - \tau) \frac{dy_j(\tau)}{d\tau} \rho_j \right)_{0P} d\tau = \int_0^t \left(f, \sum_{j=1}^k (2t - \tau) \frac{dy_j(\tau)}{d\tau} \rho_j \right)_{0P} d\tau.$$

Отсюда, применяя соотношение (19), получаем

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial \tau}, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} + \left(\mathcal{B}u_k, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} \equiv \left(\mathcal{L}u_k, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} = \left(f, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q}.$$

Рассмотрим выражение $\left(\mathcal{B}u_k, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q}$. Справедливо равенство

$$\left(\mathcal{B}u_k, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \{ [2t - \tau] \mathcal{B}u_k, u_k \} \right)_{0Q} + \frac{1}{2} (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q}.$$

Согласно формуле Остроградского и учитывая то, что $u(0, x) = 0$ и $\cos(\bar{n}, \tau) \neq 0$ только при $\tau = 0$ и $\tau = t$, имеем

$$\left(\mathcal{B}u_k, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} = \frac{1}{2} (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q} + \frac{1}{2} t (\mathcal{B}u_k(t, x), u_k(t, x))_{0P} \geq \frac{1}{2} (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q}.$$

Таким образом,

$$\left(f, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} \geq \frac{1}{2} (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q} + \left(\frac{\partial u_k}{\partial \tau}, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} \geq c \|u_k\|_{10Q}^2.$$

Здесь учтено, что $(2t - \tau) \geq t$, $0 < c \leq t$, c — константа.

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского к левой части, находим

$$c \|u_k\|_{10Q}^2 \leq \|f\|_{0Q} \left\| (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right\|_{0Q} \leq 2t \|f\|_{0Q} \left\| \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right\|_{0Q},$$

т.е. справедливо соотношение

$$\|f\|_{0Q}^2 \geq \left(\frac{c}{2t} \frac{\|u_k\|_{10Q}^2}{\left\| \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right\|_{0Q}} \right)^2 \geq \frac{c^2}{4t^2} \frac{\|u_k\|_{10Q}^4}{\left\| \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right\|_{0Q}^2 + (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q}} = c_1^2 \|u_k\|_{10Q}^2, \quad c_1 = \frac{c}{2t}.$$

Последнее неравенство верно, так как скалярное произведение $(\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q} \geq 0$. Таким образом, справедливо неравенство $\|f\|_{0Q} \geq c \|u_k\|_{10Q}$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Пусть $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, такая, что $\left[\alpha(x) \frac{d\rho_i(x)}{d\nu} + \beta(x) \rho_i(x) \right]_{x \in \Gamma} = 0$, а $y_i(\tau)$ — решение задачи (22). Тогда

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^k y_i(\tau) \rho_i(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

задает в смысле определения 1 решение задачи (8), т.е. $\|u_k - u\|_{10Q} \rightarrow 0$, $\|\mathcal{L}u_k - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Согласно лемме 3 множество функций $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ ограничено в $W_{20}^1(Q)$ и, тем самым, слабо компактно в $W_{20}^1(Q)$; следовательно, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

$\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^\infty$ в $W_{20}^1(Q)$. Тогда в силу плотности $W_{20}^1(Q)$ подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^\infty$ слабо сходится к некоторому пределу $\bar{u} \in W_{20}^1(Q)$. Покажем, что $\bar{u}$ — решение задачи (8). Умножим (20) на произвольную функцию $\varphi(\tau) \in W_{20}^1(Q)$. После интегрирования от 0 до t получим

$$(\mathcal{L}u_{k_n}, \varphi(\tau)\rho_j(x))_{0Q} = (f, \varphi(\tau)\rho_j(x))_{0Q}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (23)$$

Так как $\|u_{k_n} - \bar{u}\|_{10Q} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, то согласно неравенству (10)

$$\|\mathcal{L}u_{k_n} - \mathcal{L}u_{k_m}\|_{-1tQ} \leq c_1 \|u_{k_n} - \bar{u}\|_{10Q} \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Последовательность $\{\mathcal{L}u_{k_n}\}_{k_n=1}^\infty$ фундаментальна в $W_{2t}^{-1}(Q)$ и имеет предел в $W_{2t}^{-1}(Q)$. Обозначим этот предел $\mathcal{L}\bar{u}$. Функция $\varphi(\tau)\rho_j(x)$ принадлежит $W_{2t}^{-1}(Q)$; (23) можно понимать в смысле билинейной формы, т.е. (23) справедливо, если $\mathcal{L}u_{k_n} \in W_{2t}^{-1}(Q)$. Перейдем к пределу по $k \rightarrow \infty$ в (23). С учетом непрерывности скалярного произведения в $L_2(Q)$ получим $\langle \mathcal{L}\bar{u}, \varphi(\tau)\rho_j(x) \rangle_{tQ} = \langle f, \varphi(\tau)\rho_j(x) \rangle_{0Q}, j = 1, \dots, k$. Это выражение можно записать в виде

$$\langle \mathcal{L}\bar{u} - f, \varphi(\tau)\rho_j(x) \rangle_{tQ} = 0. \quad (24)$$

В силу произвольности $\varphi(\tau)\rho_j(x)$ получаем, что $\mathcal{L}\bar{u} - f = 0$, т.е. $\bar{u}$ — решение уравнения (8), что и требовалось доказать. Следует отметить, что (24) справедливо и в случае, когда $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$.

Теорема 4. Пусть $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, причем $\rho_i(x) \in W_2^1(P)$ и $\left[\alpha(x) \frac{d\rho_i(x)}{d\nu} + \beta(x)\rho_i(x) \right] \Big|_{x \in \Gamma=0}$; функция $f(\tau, x)$ принадлежит пространству $W_{2t}^{-1}(Q)$; $\{f_\varepsilon(\tau, x)\}_{\varepsilon>0}$ — последовательность осреднений функции $f(\tau, x)$ [7]; функция $y_{i\varepsilon}(\tau)$ — решение задачи

$$\frac{dy_{i\varepsilon}(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^k y_{j\varepsilon}(\tau)(\mathcal{B}\rho_j, \rho_i)_{0P} = (f_\varepsilon, \rho_i)_{0P}, \quad y_{i\varepsilon}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Тогда справедливы соотношения $\|u_{k\varepsilon} - u\|_{0Q} \rightarrow 0, \|\mathcal{L}u_{k\varepsilon} - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$, где функции

$$u_{k\varepsilon}(\tau, x) = \sum_{i=1}^k y_{i\varepsilon}(\tau)\rho_i(x), \quad \|f_\varepsilon - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0 \text{ и } u(\tau, x) \text{ — решение задачи (8).}$$

Доказательство. Запишем соотношение (20) для функций f и f_ε :

$$\left(\frac{\partial u_{k\varepsilon}}{\partial \tau}, \rho_j \right)_{0P} + (\mathcal{B}u_{k\varepsilon}, \rho_j)_{0P} = (f_\varepsilon, \rho_j)_{0P}; \quad \left(\frac{\partial u_k}{\partial \tau}, \rho_j \right)_{0P} + (\mathcal{B}u_k, \rho_j)_{0P} = (f, \rho_j)_{0P}.$$

После вычитания первого из второго получим

$$\left(\frac{\partial(u_k - u_{k\varepsilon})}{\partial \tau}, \rho_j \right)_{0P} + (\mathcal{B}(u_k - u_{k\varepsilon}), \rho_j)_{0P} = (f - f_\varepsilon, \rho_j)_{0P}. \quad (25)$$

Умножая (25) на функцию $\mathcal{J}_t(y_{j\varepsilon} - y_j) = \int_t^\tau [-(1+s)^{-1}][y_{j\varepsilon}(s) - y_j(s)] ds$ и суммируя по j ($j = 1, \dots, k$), находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(u_k - u_{k\varepsilon})}{\partial \tau}, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon}) \right)_{0Q} + (\mathcal{B}(u_k - u_{k\varepsilon}), \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon}))_{0Q} &= (f - f_\varepsilon, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon}))_{0Q} = \\ &= (f - f_\varepsilon, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon}))_{0Q}. \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{J}_t$ переводит элемент из $L_2(Q)$ в пространство $W_{2t}^1(Q)$, поэтому справедливо равенство

$$\langle \mathcal{L}(u_k - u_{k\varepsilon}), \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon}) \rangle_{tQ} = \langle f - f_\varepsilon, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon}) \rangle_{tQ}.$$

Согласно (18),

$$\langle \mathcal{L}(u_k - u_{k\varepsilon}), \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon}) \rangle_{tQ} \geq c \|\mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\|_{1tQ}^2.$$

Верно также неравенство

$$\langle f - f_\varepsilon, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon}) \rangle_{tQ} \geq c \|\mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\|_{1tQ}^2.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\|f - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \geq c \|\mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\|_{1tQ} \geq c \|u_k - u_{k\varepsilon}\|_{0Q}.$$

По теореме 3

$$\|u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{10Q} \rightarrow 0, \quad \|\mathcal{L}u_{k\varepsilon} - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Имеет место соотношение (см. лемму 2)

$$c_1 \|u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{0Q} \leq \|\mathcal{L}(u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon)\|_{-1tQ}. \quad (26)$$

Так как $\|f - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то последовательность $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ фундаментальна. Действительно, $\|f_{\varepsilon_1} - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \rightarrow 0$ при $\varepsilon_1, \varepsilon \rightarrow 0$; из (26) вытекает, что $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_1}\|_{0Q} \rightarrow 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим $\bar{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$. Покажем, что $\bar{u} = u$. Неравенство (12) справедливо для всех $u \in L_2(Q)$, т.е. $\|\mathcal{L}u_\varepsilon\|_{-1tQ} \geq c \|u_\varepsilon\|_{0Q}$; следовательно,

$$\|\mathcal{L}(u_{k\varepsilon} - u)\|_{-1tQ} = \|f_\varepsilon - f\|_{-1tQ} \geq c \|u_\varepsilon - u\|_{0Q}.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$, находим $0 \geq c \|\bar{u} - u\|_{0Q}$, но $\|\bar{u} - u\|_{0Q} \geq 0$ и поэтому $\bar{u} = u$. Теорема 4 доказана.

2. Рассмотрим на пространстве $L_2(Q)$ дифференциальный оператор гиперболического типа

$$\mathcal{M}_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u, \quad u \in D(\mathcal{M}_1),$$

где $D(\mathcal{M}_1)$ — множество функций $u(\tau, x)$, заданных в области Q , дважды непрерывно дифференцируемых по $\tau \in [0, t]$, а по переменной $x \in P$ функции $u(\tau, x) \in H_B^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau, x)|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left[\alpha(x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \bar{\nu}} + \beta(x) u(\tau, x) \right] \Big|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (27)$$

Введем обозначения: $W_{20}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{M}_1)$ по норме (6); $\|\cdot\|_{10Q}$, $(\cdot, \cdot)_{10Q}$ — норма и скалярное произведение в позитивном пространстве $W_{20}^1(Q)$; $W_{20}^{-1}(Q)$ — негативное пространство, полученное пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\|v\|_{-10Q} = \sup_u \left[\frac{|(u, v)_{0Q}|}{\|u\|_{10Q}} \right], \quad v \in L_2(Q), \quad u \in W_{20}^1(Q), \quad \|u\|_{10Q} \neq 0.$$

Обозначим через $D(\mathcal{M}_1^*)$ множество функций $u(\tau, x)$, имеющих хотя бы две производных в классическом смысле по τ , а по x функции $u(\tau, x) \in H_B^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau, x)|_{\tau=t} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} = 0 \quad \text{и} \quad \left[\alpha(x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \bar{\nu}} + \beta(x) u(\tau, x) \right] \Big|_{x \in \Gamma} = 0,$$

$W_{2t}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{M}_1^*)$ по норме (6). Пусть $W_{2t}^{-1}(Q)$ — негативное пространство, построенное по $W_{2t}^1(Q)$ и $L_2(Q)$; $\mathcal{M}_1^*$ — сопряженный оператор к $\mathcal{M}_1$:

$$\mathcal{M}_1^* u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u, \quad u \in D(\mathcal{M}_1^*).$$

Расширим по непрерывности операторы $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_1^*$ на все пространство $W_{20}^1(Q)$ и $W_{2t}^1(Q)$ соответственно. Расширенные операторы будем обозначать $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$.

Введем оператор $\mathcal{J}u \equiv \int_t^\tau b^{-1}(s)u(s, x) ds = v(\tau, x)$, где функция $b(\tau) = -2[t + \tau]$. Отметим, что

$$v(t, x) = 0, \quad \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} = b^{-1}(\tau)u(\tau, x), \quad \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad u(\tau, x) = b(\tau) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau}. \quad (28)$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q}$. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} &= (\mathcal{M}u, v)_{0Q} = \int_Q \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial \tau^2} v(\tau, x) dQ + \int_Q \mathcal{B}u(\tau, x)v(\tau, x) dQ = \\ &= \int_Q \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial \tau^2} v(\tau, x) dQ + \int_Q u(\tau, x)\mathcal{B}v(\tau, x) dQ. \end{aligned} \quad (29)$$

Последнее равенство справедливо благодаря симметричности оператора $\mathcal{B}$.

Преобразуем первое слагаемое в правой части (29) следующим образом. Перебросим операцию дифференцирования на функцию v ; применяя формулу Остроградского и используя (28) и (27), находим

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} &= (\mathcal{M}u, v)_{0Q} = \int_Q \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial \tau^2} v(\tau, x) dQ + \int_Q u(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ = \\ &= \int_Q u(\tau, x) \frac{\partial^2 v(\tau, x)}{\partial \tau^2} dQ - \int_P u(t, x) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} dP + \int_Q u(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ. \end{aligned} \quad (30)$$

Преобразуя первое слагаемое в (30) аналогично предыдущему, получим

$$\begin{aligned} 2 \int_Q u(\tau, x) \frac{\partial^2 v(\tau, x)}{\partial \tau^2} dQ &= 2 \int_Q b(\tau) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial^2 v(\tau, x)}{\partial \tau^2} dQ = \\ &= \int_P b(t) \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right]^2 dP - \int_P b(0) \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right]^2 dP - \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \right]^2 dQ. \end{aligned} \quad (31)$$

Так как $u(\tau, x) = b(\tau) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau}$, то интегрируя по частям третье слагаемое в правой части (30), находим

$$\int_Q u(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ = - \int_P b(0)v(0, x) \mathcal{B}v(0, x) dP - \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} v(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ. \quad (32)$$

Подставляя выражения (31) и (32) в (30), имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} &= (\mathcal{M}u, v)_{0Q} = -\frac{1}{2} \int_P b(t) \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right]^2 dP - \frac{1}{2} \int_P b(0) \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right]^2 dP - \\ &- \frac{1}{2} \int_P b(0)v(0, x) \mathcal{B}v(0, x) dP - \frac{1}{2} \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \right]^2 dQ - \frac{1}{2} \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} v(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ \end{aligned}$$

и, так как $b(\tau) = -2(t + \tau)$ и $b(0) = -2t$, $b(t) = -4t$, $\frac{db(\tau)}{d\tau} = -2$, $b^{-1}(\tau) = -\frac{1}{2(t + \tau)}$, то

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} &= (\mathcal{M}u, v)_{0Q} = 2t \int_P \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right]^2 dP + t \int_P \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right]^2 dP + \\ &+ t \int_P b(0)v(0, x) \mathcal{B}v(0, x) dP + \int_Q \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \right]^2 dQ + \int_Q v(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ. \end{aligned}$$

Учитывая, что $t > 0$, $\int_P \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right]^2 dP \geq 0$, $\int_P \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right]^2 dP = 0$, а также положительную определенность оператора $\mathcal{B}$: $\int_P v(0, x) \mathcal{B}v(0, x) dP \geq c \|v(0, x)\|_{0P}^2 \geq 0$, получаем

$$(\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{M}u, v)_{0Q} \geq \int_Q \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \right]^2 dQ + \int_Q v(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ \geq c \|v\|_{1tQ}^2 = c \|\mathcal{J}u\|_{1tQ}^2,$$

т.е.

$$(\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} \geq c \|\mathcal{J}u\|_{1tQ}^2. \quad (33)$$

По определению негативной нормы из (33) находим, что

$$\|\mathcal{M}u\|_{-1tQ} = \sup_{\mathcal{J}u \neq 0} \frac{|(\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q}|}{\|\mathcal{J}u\|_{1tQ}} \geq c \|\mathcal{J}u\|_{1tQ}.$$

Используя определение нормы в пространстве $W_{2t}^1(Q)$ и явный вид оператора $\mathcal{J}$, имеем

$$\|\mathcal{J}u\|_{1tQ}^2 \geq \int_Q \frac{1}{4(t+\tau)^2} u^2(\tau, x) dQ \geq c \|u\|_{0Q}^2,$$

где c — некоторая положительная константа, независимая от u . Этим доказано неравенство

$$\|\mathcal{M}u\|_{-1tQ} \geq c \|u\|_{0Q}.$$

Установим справедливость неравенства

$$\|\mathcal{M}u\|_{-1tQ} \leq c \|u\|_{10Q}. \quad (34)$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{M}u, v)_{0Q}$ на элементах $u \in D(\mathcal{M})$ и $v \in W_{2t}^1(Q)$. Интегрируя по частям и применяя неравенство Остроградского, находим

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}u, v)_{0Q} &= \int_Q \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial \tau^2} v(\tau, x) dQ + \int_Q v(\tau, x) \mathcal{B}u(\tau, x) dQ = - \int_Q \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} dQ + \\ &+ \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial x_i} dQ + \int_{\Gamma_2} \frac{a(x)}{\alpha(x)} \beta(x) u(\tau, x) v(\tau, x) d\Gamma + \int_Q a_0(x) u(\tau, x) v(\tau, x) dQ. \end{aligned}$$

Введем функцию $\hat{a}_0(x) = \tilde{a}_0(x) + a_0(x)$, где $\tilde{a}(x) = \begin{cases} \frac{a(x)\beta(x)}{\alpha(x)}, & x \in \Gamma_2; \\ 0, & x \notin \Gamma_2. \end{cases}$ Тогда

$$(\mathcal{M}u, v)_{0Q} = - \int_Q \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial x_i} dQ + \int_Q \hat{a}_0(x) u(\tau, x) v(\tau, x) dQ.$$

Далее, по определению негативной нормы и учитывая свойства функций $a_{ij}(x)$, $a_0(x)$ и $\tilde{a}_0(x)$, получаем

$$\|\mathcal{M}u\|_{-1tQ} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(\mathcal{M}u, v)_{0Q}|}{\|v\|_{1tQ}} \leq c \sup_{v \neq 0} \frac{|(u, v)_{1Q}|}{\|v\|_{1tQ}} \leq c \sup_{v \neq 0} \frac{\|u\|_{10Q} \|v\|_{1tQ}}{\|v\|_{1tQ}} \leq c \|u\|_{10Q}.$$

Аналогично доказываются неравенства для сопряженного оператора

$$\|\mathcal{M}^*v\|_{-10Q} \geq c \|v\|_{0Q}, \quad \|\mathcal{M}^*v\|_{-10Q} \leq c \|v\|_{1tQ}.$$

Далее рассмотрим вопрос о разрешимости пары задач:

$$\mathcal{M}u = f, \quad f \in L_2, \quad u \in W_{20}^1(Q), \quad (35)$$

$$\mathcal{M}^*v = g, \quad g \in L_2, \quad v \in W_{2t}^1(Q), \quad (36)$$

где u, v — искомые, а f, g — заданные функции.

Определение 5. Обобщенным решением задачи (35) называется такая функция $u \in W_{20}^1(Q)$, что интегральное тождество

$$\int_Q \left[-\frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(va_{ij})}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + v\hat{a}_0u \right] dQ = \int_Q vf dQ$$

выполняется для любой гладкой функции $v \in W_{2t}^1(Q)$ и $\hat{a}_0(x) = \tilde{a}_0(x) + a_0(x)$.

Очевидно, что если обобщенное решение из $W_{20}^1(Q)$ имеет обобщенные производные до второго порядка включительно, то оно является решением уравнения (35) почти всюду в Q .

Определение 6. Обобщенным решением задачи (35) называется такая функция $u \in W_{2t}^1(Q)$, для которой существует последовательность гладких функций $\{u_i\}$, $i \rightarrow \infty$, удовлетворяющих граничным условиям (27), и имеет место соотношение

$$\|\mathcal{M}u_i - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \quad \|u_i - u\|_{10Q} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Теорема 5. *Определения 5 и 6 для задачи (35) эквивалентны.*

Доказательство. Действительно, если существует обобщенное решение в смысле определения 6, то, полагая $\mathcal{M}u_i \equiv f_i$, имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [(v, \mathcal{M}u_i) - (v, f_i)] = (v, \mathcal{M}u)_0 - (v, f) = 0.$$

Интегрируя по частям, применяя формулу Остроградского в левой части равенства $(v, \mathcal{L}u)_0 = (v, f)$ и учитывая свойства функций $a_{ij}(x)$, $a_0(x)$ и $\tilde{a}_0(x)$, получим, что обобщенное решение в смысле определения 6 есть обобщенное решение в смысле определения 5.

Покажем теперь, что обобщенное решение в смысле определения 5 есть обобщенное решение в смысле определения 6. Действительно, из равенства в определении 5, “перебрасывая” одно дифференцирование на v , получим

$$(v, f) = (u, \mathcal{M}^*v). \quad (37)$$

Множество гладких в Q функций, удовлетворяющих условию (27), плотно в пространстве $W_{20}^1(Q)$, поэтому найдется последовательность гладких функций u_i , удовлетворяющих условию (27) в обычном смысле, такая, что $\|u_i - u\|_{10Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. В силу неравенства (34) получаем, что $\mathcal{M}u_i \equiv f_i$ сходится при $i \rightarrow \infty$ по норме $W_{2t}^{-1}(Q)$ к некоторому элементу $\hat{f} \in W_{2t}^{-1}(Q)$. Для последовательности $\{u_i\}$, такой, что $\|u_i - u\|_{10Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, справедливо равенство $(v, f_i) = (u_i, \mathcal{L}^*v)$, вычитая которое из (37) получим $(v, f - f_i) = (u - u_i, \mathcal{L}^*v)$. Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$ имеем $(v, f - \hat{f}) = 0$ для всех гладких $v \in W_{2t}^1(Q)$, а это означает, что $\|f - \hat{f}\|_{-1tQ} = 0$. Эквивалентность определений 5 и 6 доказана.

Теорема 6. *Для любых функций $f \in L_2(Q)$ и $g \in L_2(Q)$ существуют единственные обобщенные решения задач (35) и (36) соответственно в пространствах $W_{20}^1(Q)$ и $W_{2t}^1(Q)$.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

Определение 7. *Обобщенным решением задачи (35) с правой частью $f(\tau, x) \in W_{2t}^{-1}(Q)$ будем называть такую функцию $u(\tau, x) \in L_2(Q)$, для которой существует последовательность гладких функций $\{u_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$, $u_i \in W_{20}^1(Q)$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{M}u_i - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0$, $\|u_i - u\|_{0Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$.*

Определение 8. *Обобщенным решением задачи (36) с правой частью из $W_{20}^{-1}(Q)$ будем называть такую функцию $v(\tau, x) \in L_2(Q)$, для которой существует последовательность функций $\{v_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$, $v_i \in W_{2t}^1(Q)$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{M}^*v_i - g\|_{-10Q} \rightarrow 0$, $\|v_i - v\|_{0Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$.*

Теорема 7. *Для любой функции $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ существует единственное обобщенное решение в смысле определения 7 задачи (35); для любой $g \in W_{20}^{-1}(Q)$ существует единственное обобщенное решение в смысле определения 8 задачи (36).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Рассмотрим приближенный метод решения краевых задач (35) и (36). Приближенное решение задачи (35), когда правая часть $f \in L_2(Q)$, будем искать в виде

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^k y_i(\tau) \rho_i(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, удовлетворяющая условию (1), а выражение для $y_i(\tau)$ находится из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_i(\tau)}{d\tau^2} + \sum_{s=1}^k y_s(\tau) (\mathcal{B} \rho_s, \rho_j)_{0P} &= (f, \rho_j)_{0P}, \\ y_i(0) &= 0, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad \frac{dy_i(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad i, j = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (38)$$

Это уравнение можно записать в матричной форме

$$\frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} = F_k y(\tau) + G_k(\tau), \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (39)$$

где $y(\tau)$ и $G_k(\tau)$ — векторы-столбцы, $y(\tau) = \{y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_k(\tau)\}$,

$$G_k(\tau) = \{(f, \rho_1)_{0P}, (f, \rho_2)_{0P}, \dots, (f, \rho_k)_{0P}\}; \quad F_k = - \begin{bmatrix} (\mathcal{B} \rho_1, \rho_1)_{0P} & \dots & (\mathcal{B} \rho_1, \rho_k)_{0P} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathcal{B} \rho_k, \rho_1)_{0P} & \dots & (\mathcal{B} \rho_k, \rho_k)_{0P} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что решение (38) понимается в обобщенном смысле [5, 7].

Верны следующие утверждения:

Лемма 4. Для любой функции $f \in L_2(Q)$ справедливо неравенство $\|f\|_{0Q} \geq c \|u_k\|_{10Q}$.

Теорема 8. Пусть $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, для которых выполняется (1), а $y_i(\tau)$ — решение задачи (39). Тогда

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^k y_i(\tau) \rho_i(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

дает в смысле определения 7 решение задачи (35), т.е. выполняются соотношения

$$\|u_k - u\|_{10Q} \rightarrow 0, \quad \|\mathcal{M}u_k - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Теорема 9. Пусть $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, причем $\rho_i(x) \in W_2^1(P)$ и $\rho_i(x)$ удовлетворяют (1), функция $f(\tau, x)$ принадлежит пространству $W_{2t}^{-1}(Q)$, $\{f_\varepsilon(\tau, x)\}_{\varepsilon>0}$ — последовательность осреднений функции $f(\tau, x)$, функция $y_{i\varepsilon}(\tau)$ — решение задачи

$$\frac{d^2 y_{i\varepsilon}(\tau)}{d\tau^2} + \sum_{j=1}^k y_{j\varepsilon}(\tau) (\mathcal{B}\rho_j, \rho_i)_{0P} = (f_\varepsilon, \rho_i)_{0P}, \quad y_{i\varepsilon}(0) = 0, \quad \left. \frac{dy_{i\varepsilon}}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Тогда справедливы соотношения $\|u_{k\varepsilon} - u\|_{0Q} \rightarrow 0$, $\|\mathcal{M}u_{k\varepsilon} - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где $u_{k\varepsilon}(\tau, x) = \sum_{i=1}^k y_{i\varepsilon}(\tau) \rho_i(x)$, $\|f_\varepsilon - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство утверждений леммы 4, теорем 8 и 9 аналогично лемме 3, теорем 3 и 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
2. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Изд. Иностранной литературы, 1961.
3. Диденко В.П. О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением. ДАН СССР. 1972. **205**, № 4. 352–355.
4. Диденко В.П. О некоторых краевых задачах для многомерного уравнения смешанного типа. Дифференц. уравн. 1973. **9**, № 1. 43–51.
5. Колос М.В., Колос И.В. Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. Колос М.В., Колос И.В. О разрешимости обобщенной задачи Дирихле для гиперболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 68–78.
7. Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е. Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
8. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
21.09.2004