doi 10.26089/NumMet.v25r215 УДК 519.63

Ускорение параллельного решения 2D краевых задач с двухсеточным предобуславливанием

А. Н. Козырев
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0009-0003-2046-9412, e-mail: kozyrev_a@inbox.ru

В. Д. Корнеев
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0009-0007-7209-6813, e-mail: korneev@ssd.sscc.ru

В. М. Свешников
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-0555-8583, e-mail: victor@lapasrv.sscc.ru

Аннотация: Предлагается и экспериментально исследуется алгоритм ускорения решения краевых задач на квазиструктурированных сетках. Основу алгоритма составляет двухсеточное предобуславливание, которое строится на макросетке, составляющей элемент квазиструктурированной сетки. При таком подходе не требуется введения дополнительных инструментов. Проведены серии численных экспериментов, результаты которых показывают ускорение расчетов в 2.5 раза только за счет предобуславливания без распараллеливания и демонстрируют сверхускорение при распараллеливании.

Ключевые слова: краевые задачи, квазиструктурированные сетки, двухсеточное предобуславливание, распараллеливание, ускорение решения.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23–21–00385, https://rscf.ru/project/23-21-00385/.

Для цитирования: Козырев А.Н., Корнеев В.Д., Свешников В.М. Ускорение параллельного решения 2D краевых задач с двухсеточным предобуславливанием // Вычислительные методы и программирование. 2024. **25**, № 2. 187–196. doi 10.26089/NumMet.v25r215.

2024, **25** (2), 187–196. doi 10.26089/NumMet.v25r215

Acceleration of parallel solution of 2D boundary value problems with two-grid preconditioning

Alexander N. Kozyrev
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0009-0003-2046-9412, e-mail: kozyrev_a@inbox.ru
Vladimir D. Korneev
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0009-0007-7209-6813, e-mail: korneev@ssd.sscc.ru
Victor M. Sveshnikov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0003-0555-8583, e-mail: victor@lapasrv.sscc.ru

Abstract: An algorithm for accelerating the solution of boundary value problems on quasi-structured grids is proposed and experimentally studied. The basis of the algorithm is two-grid preconditioning, which is built on a macro-grid, which is an element of a quasi-structured grid. This approach does not require the introduction of additional tools. A series of numerical experiments were carried out, the results of which show acceleration of calculations by 2.5 times without parallelization only due to preconditioning without parallelization and demonstrate super-acceleration during parallelization.

Keywords: boundary value problems, quasi-structured grids, two-grid preconditioning, parallelization, solution acceleration.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23–21–00385, https://rscf.ru/project/23-21-00385/.

For citation: A. N. Kozyrev, V. D. Korneev, V. M. Sveshnikov, “Acceleration of parallel solution of 2D boundary value problems with two-grid preconditioning,” Numerical Methods and Programming. **25** (2), 187–196 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r215.

1. Введение. Квазиструктурированные сетки [1], рассматриваемые в настоящей работе, выгодно отличаются от неструктурированных сеток [2, 3] тем, что при решении краевых задач не требуют хранения большого объема вспомогательных данных, и от структурированных сеток [4] тем, что адаптированы к границам расчетной области и к неоднородностям задачи. В работе [5] и цитируемой в ней литературе излагается построение адаптивных структурированных сеток, основанное на вариационных принципах. Используемые нами квазиструктурированные сетки адаптивны к границе за счет модификации приграничных узлов и к физическим неоднородностям за счет регулировки плотности узлов в подсетках. Они строятся за два этапа. На первом из них проводится декомпозиция расчетной области на подобласти, сопрягаемые без наложения, при помощи структурированной макросетки, шаг которой значительно больше шага результирующей сетки. На втором этапе в каждой подобласти строится своя структурированная подсетка, на которой аппроксимируется и решается краевая подзадача. Подсетки могут быть несогласованными, то есть смежные подсетки могут иметь различное число узлов. На границе сопряжения подобластей (интерфейсе) строится подсетка, состоящая из узлов смежных подсеток (предполагается, что число узлов подсеток в одном направлении есть 2 в целой степени). На ней аппроксимируется и решается уравнение Пуанкаре–Стеклова, определяя итерационный процесс по подобластям. На каждом шаге данного итерационного процесса решаются краевые подзадачи, занимающие существенную часть времени, поэтому актуальным является сокращение числа итераций. Наличие макросетки наводит на мысль использовать ее в качестве средства получения начального приближения. Предлагается предварительно на

2024, **25** (2), 187–196. doi 10.26089/NumMet.v25r215

макросетке провести аппроксимацию и решение исходной краевой задачи. Это даст грубое решение, которое интерполируется в узлы интерфейсной подсетки и используется в качестве начального приближения. Таким образом, реализуется двухсеточное предобуславливание, которое экспериментально исследовано в данной работе.

Другой способ ускорения, который естественным образом реализуется на квазиструктурированных сетках, — это распараллеливание решения по подобластям. В зависимости от числа доступных процессоров (ядер компьютера) предварительно проводится группировка подобластей (подсеток) в объединения, реализуя отображение "одно объединение — один процессор".

Многосеточные методы, к которым можно отнести тему настоящей статьи, были предложены отечественными исследователями [6, 7]. Позже зарубежными авторами были опубликованы работы [8, 9], которые послужили толчком к бурному росту числа публикаций на данную тему. Среди них можно отметить, например, отечественные и зарубежные работы [10–13].

Методы декомпозиции области, которые также затронуты в настоящей работе, берут свое начало с альтернирующего метода Шварца [14]. Свое развитие они получили в связи с появлением многопроцессорных ЭВМ, как основной инструмент распараллеливания решения краевых задач. Пионерской работой здесь является статья отечественных авторов [15], в которой предложен и теоретически исследован параллельный аддитивный метод Шварца. Современное состояние вопроса излагается преимущественно в зарубежных работах [16–18].

Новизна предлагаемых в настоящей работе подходов заключаются в том, что они применяются и экспериментально исследуются для конкретного вида сеток, а именно квазиструктурированных сеток. Замечательным свойством данных сеток, в том числе, является то, что они внутри себя содержат инструменты по ускорению решения. Это — макросетка и подсетки в подобластях. Первая — основа для двухсеточного предобуславливания, вторые — модульная основа для распараллеливания.

Проведены экспериментальные исследования ускорения расчетов за счет следующих предложенных подходов: 1) использование двухсеточного предобуславливания; 2) распараллеливание; 3) использование двухсеточного предобуславливания и распараллеливания. Важным следствием численных экспериментов является то, что, как показано в данной работе, совместное применение двухсеточного предобуславливания и распараллеливания приводит к появлению сверхускорения, при котором коэффициент эффективности больше единицы.

2. Постановка задачи и алгоритмы ее решения. В замкнутой области $\bar{G} = G \cup \Gamma$ требуется решить 2D краевую задачу

$$\begin{cases} L\varphi = \rho, & \text{в области } G, \\ l\varphi = g, & \text{на границе } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

где L — эллиптический оператор, l — оператор граничных условий Дирихле или Неймана, φ — искомая функция, ρ, g — заданные функции координат x, y. Рассматриваются декартовы и цилиндрические координаты r, z, причем в последнем случае $x = r$, $y = z$. Для простоты экспериментальные исследования в настоящей статье проводятся на модельной задаче, в которой G — прямоугольная область. Однако рассматриваемый подход применим и для сложных областей, которые обеспечивают существование и единственность достаточно гладкого решения краевой задачи.

Решение задачи (1) ищется на квазиструктурированной сетке, построение которой включает в себя два этапа.

На первом из них строится прямоугольная структурированная макросетка $\bar{\Omega}_H$ вида

$$\bar{\Omega}_H = \left\{X_I = IH_x,\ Y_J = JH_y,\ I = \overline{0, N_x},\ J = \overline{0, N_y}\right\},$$

где H_x, H_y — шаги макросетки, N_x, N_y — число интервалов макросетки по координатным направлениям, которая определяет декомпозицию области на подобласти. Введем межобластной интерфейс $F = D \cup E$, где D — макроузлы и E — макроребра.

На втором этапе строятся подсетки ω_h в подобластях вида

$$\omega_h = \left\{x_i = ih_x,\ y_j = jh_y,\ i = \overline{0, n_x},\ j = \overline{0, n_y}\right\},$$

где h_x, h_y — шаги макросетки, n_x, n_y — число интервалов подсетки по координатным направлениям. Будем предполагать, что $n_x = 2^{k_x}$, $n_y = 2^{k_y}$, где k_x, k_y — целые положительные числа.

2024, **25** (2), 187–196. doi 10.26089/NumMet.v25r215

На интерфейсе вводится подсетка ω_E, состоящая из совпадающих узлов $(x_k,\ y_k)$ смежных подсеток, вида

$$\omega_E = \{x_k,\ y_k,\ k = \overline{0, n_E}\},$$

где n_E — известно. Подчеркнем, что подсетки могут быть несогласованными.

Для единообразия обозначим макроузлы как $\omega_D = D$.

Подсетки ω_h, ω_E, ω_D образуют квазиструктурированную сетку Ω, на которой ищется решение исходной краевой задачи (1). Более подробно построение квазиструктурированных сеток, их адаптация к границам сложной расчетной области излагается в работе [1].

На макроребрах E вводится уравнение Пуанкаре–Стеклова

$$\left(\frac{\delta\varphi(\nu)}{\delta \boldsymbol{n}}\right)^+_E + \left(\frac{\delta\varphi(\nu)}{\delta \boldsymbol{n}}\right)^-_E = 0, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{n}$ — внутренняя нормаль к E, знаки $+$, $-$ означают принадлежность объекта различным подобластям, ν — след φ на E. Производные, входящие в уравнение (2), на подсетке ω_E аппроксимируются конечно-разностными соотношениями, что приводит к приближенному уравнению

$$\big(d_h u(\nu_h)\big)^+ + \big(d_h u(\nu_h)\big)^- = 0 \tag{3}$$

относительно функции ν_h. Здесь u, ν_h — приближенные значения функций φ, ν соответственно, d_h — конечно-разностный оператор. Поскольку уравнения (3) являются линейными, их можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$B\nu_h + \boldsymbol{b} = 0, \tag{4}$$

где B — квадратная матрица, $\boldsymbol{b}$ — вектор. Систему (4) будем решать каким-либо итерационным методом из подпространства Крылова, который можно записать в виде

$$\nu_h^{(k+1)} = \Lambda\left(\nu_h^{(k)}, B\boldsymbol{q}^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

где k — номер итерации, $\boldsymbol{q}$ — вспомогательный вектор, Λ определяет конкретный алгоритм (мы используем метод GMRES [19]).

Отсюда видно, что реализация (5) не требует знания матрицы B, а требует знания действия B на вспомогательный вектор. Данное действие вычисляется как сумма производных, входящих в (3).

На каждом шаге итерационного процесса по подобластям (5) методом конечных разностей или методом конечных объемов [20] решаются следующие краевые подзадачи: в подобластях — на подсетках ω_h, на макроребрах — на подсетках ω_E и в макроузлах — на подсетках ω_D (более подробно см. описание алгоритма итераций по подобластям в работах [21, 22]). Отметим, что на подсетках ω_h, ω_D решаются приближенные краевые подзадачи по схемам L_h, l_h, аппроксимирующим соответственно L, l, а на подсетках ω_E — СЛАУ (4).

Начальное приближение для итерационного процесса по подобластям строится следующим образом. На макросетке Ω_H, число узлов которой значительно меньше числа узлов итоговой квазиструктурированной сетки, решим вспомогательную задачу, аппроксимирующую (1) в макроузлах D

$$\begin{cases} L_H \nu_D = \rho, & \text{в области } G, \\ l_H \nu_D = g, & \text{на границе } \Gamma, \end{cases} \tag{6}$$

где L_H, l_H — аппроксимация дифференциальных операторов L, l соответственно. Полученное решение интерполируется в узлы подсетки ω_E

$$\nu_E = S\nu_D, \tag{7}$$

где S — оператор интерполирования. В качестве начального приближения полагаем

$$\nu_h^{(0)} = \nu_E. \tag{8}$$

В целом данный итерационный процесс состоит из следующих этапов, которые выполняются параллельно.

1. Решается краевая задача (6) на макросетке Ω_H, что позволяет получить начальное приближение в макроузлах.

2024, **25** (2), 187–196. doi 10.26089/NumMet.v25r215

2. Рассчитывается начальное приближение $\nu_h^{(0)}$ на макроребрах по формулам (7), (8).
3. Определяются значения искомой функции $u^{(k)}$ в подобластях путем решения краевых задач.
4. Рассчитываются разностные производные, входящие в (3).
5. Делается очередной $(k+1)$-й шаг итерационного процесса по методу GMRES, т.е. находится $\nu_h^{(k+1)}$.
6. Пересчитываются значения в макроузлах.
7. Выполняется проверка на сходимость путем анализа нормы $\left\|\nu_h^{(k+1)} - \nu_h^{(k)}\right\| < \varepsilon$, где ε — заданная малая величина.
8. Если приведенное неравенство выполняется, то итерации сошлись и после окончательного вычисления искомой функции в подобластях расчеты прекращаются, а если это не так, то расчеты продолжаются, начиная с этапа 3.

Особое внимание уделяется этапу 3, так как он занимает преимущественное время и для ускорения вычислений может быть распараллелен. Задача распараллеливания ставится следующим образом: организовать параллельное решение подзадач на заданном числе P процессоров, которое может быть не равно числу подобластей. Кроме того, в подсетках может быть разное число узлов. Поэтому подсетки группируются в P объединений, содержащих приблизительно одинаковое число узлов, причем одно объединение обрабатывается одним процессором.

3. Экспериментальные исследования ускорения расчетов. Цель проводимых численных экспериментов — исследование ускорения решения 2D краевых задач за счет применения двухсеточного предобуславливания (6)–(8) и распараллеливания на P процессорах.

Исследования проводились на модельной задаче о расчете электрического поля в цилиндрическом конденсаторе, образованном двумя концентрическими окружностями с радиусами $R_1 = 0.1$, $R_2 = 1$ с заданными на них потенциалами $\varphi(R_1) = 1$, $\varphi(R_2) = 2$. Данная задача описывается при помощи системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, & \text{в области } G, \\ \varphi = g, & \text{на границе } \Gamma, \end{cases} \tag{9}$$

где Δ — оператор Лапласа в декартовых координатах.

Аналитическое решение данной задачи имеет вид

$$\varphi(r) = \ln^{-1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\ln\left(\frac{rR_2}{R_1^2}\right). \tag{10}$$

В качестве G выбирается квадратная область $\{[0.4, 0.7] \times [0, 0.3]\}$ с соответствующей границей Γ. Граничная функция g определяется согласно (10).

На подсетках ω_h при помощи обычных пятиточечных схем на равномерных сетках [20] аппроксимируется исходная задача (9) с заданными краевыми условиями в приграничных подобластях и условиями Дирихле на макроребрах E.

Расчеты проводились на квазиструктурированных сетках, в которых макросетки Ω_H имели параметры: 8×8, 16×16, а подсетки ω_h — 16×16, 32×32, 64×64. Таким образом, результирующие квазиструктурированные сетки содержали от нескольких десятков до более миллиона узлов.

При вычислении начального приближения система сеточных уравнений в макроузлах решалась методом циклической редукции Бунемана, а на подсетках в процессе итераций по подобластям — методом Писмана–Рэчфорда [23].

Точность проведения внешних итераций по подобластям выбиралась равной $\varepsilon = 10^{-6}$.

Распараллеливание проводилось на $P = 2$, 4, 8, 16, 32 процессорах.

Было исследовано три вида ускорения: 1) за счет двухсеточного предобуславливания; 2) за счет распараллеливания; 3) суммарно за счет двухсеточного предобуславливания и распараллеливания.

Расчеты проводились на кластерах московского ВЦ.

3.1. Ускорение: двухсеточное предобуславливание. Критерием ускорения вычислений в данном случае служило значение коэффициента ускорения A_r, равного

$$A_r = T_0/T_r, \tag{11}$$

где T_0 — время расчетов без предобуславливания, T_r — время расчетов при наличии предобуславливания.

2024, **25** (2), 187–196. doi 10.26089/NumMet.v25r215

Предварительно было рассмотрено два вида оператора S в формуле (7): 1) линейная интерполяция, 2) интерполяция кубическим сплайном [24]. Анализировался коэффициент A_r (11). Эксперименты показали преимущество сплайновой интерполяции, которая стала применяться в дальнейших исследованиях.

Таблица 1. Коэффициент ускорения A_r

Table 1. Acceleration coefficient A_r

Ω_H	$\omega_h = 16 \times 16$	$\omega_h = 32 \times 32$	$\omega_h = 64 \times 64$
8×8	1.540	2.329	2.379
16×16	2.626	2.806	2.721

Из результатов, приведенных в табл. 1, следует, что двухсеточное предобуславливание дает ускорение в среднем в 2.5 раза. Коэффициент ускорения A_r увеличивается с увеличением числа узлов сетки, что можно объяснить увеличением вклада арифметических операций.

3.2. Ускорение: распараллеливание. Критерием ускорения вычислений в данном случае служило значение коэффициента ускорения A_P, равного

$$A_P = \frac{T_0}{T_P}, \tag{12}$$

где T_0 — время расчетов без распараллеливания и без предобуславливания, T_P — время расчетов при наличии распараллеливания, но без предобуславливания, а также значение коэффициента эффективности распараллеливания Q_P, равного

$$Q_P = \frac{A_P}{P}.$$

Из полученных результатов (рис. 1, 2) следует, что A_P, Q_P возрастают с увеличением числа узлов сетки (объяснение см. в разделе 3.1). С увеличением числа процессоров P ускорение A_P растет, а эффективность Q_P падает, что объясняется возрастанием доли медленных операций межпроцессорных обменов.

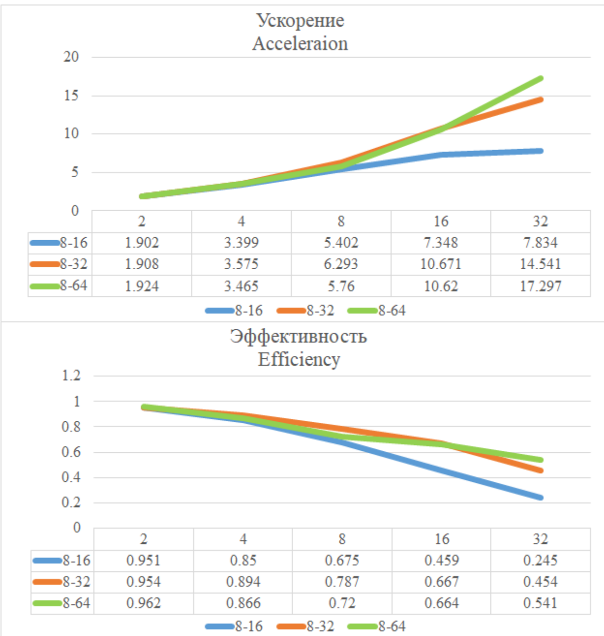

Рис. 1. Распараллеливание без предобуславливания (макросетка 8×8)

Fig. 1. Parallelization without preconditioning (macrogrid 8×8)

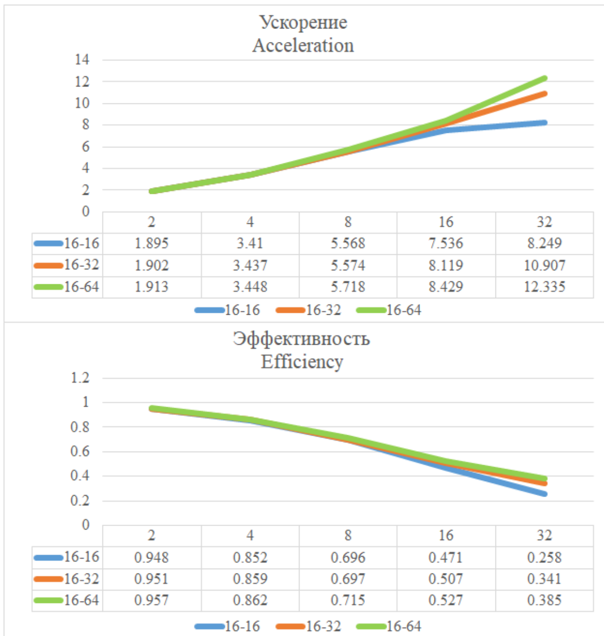

Рис. 2. Распараллеливание без предобуславливания (макросетка 16×16)

Fig. 2. Parallelization without preconditioning (macrogrid 16×16)

2024, **25** (2), 187–196. doi 10.26089/NumMet.v25r215

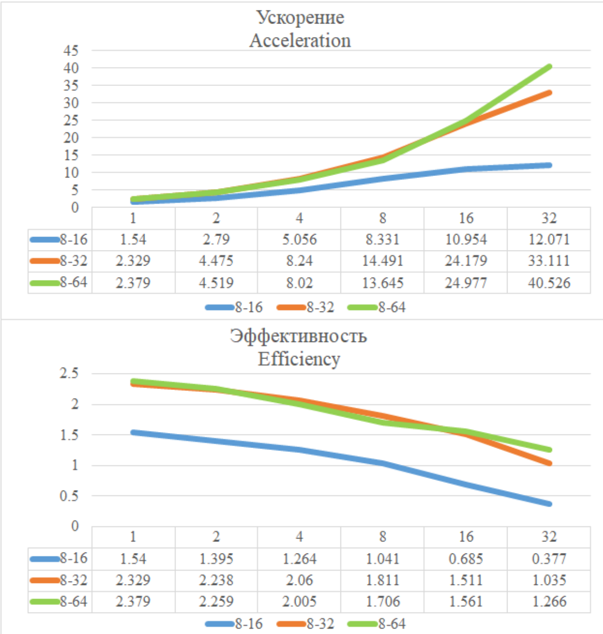

Рис. 3. Распараллеливание при наличии предобуславливания (макросетка 8×8)

Fig. 3. Parallelization with preconditioning (macrogrid 8×8)

Рис. 4. Распараллеливание при наличии предобуславливания (макросетка 16×16)

Fig. 4. Parallelization with preconditioning (macrogrid 16×16)

3.3. Ускорение: суммарно двухсеточное предобуславливание и распараллеливание. Критерием ускорения вычислений в данном случае служило значение коэффициента ускорения $A_{r,P}$, равного

$$A_{r,P} = \frac{T_0}{T_{r,P}},$$

где T_0 — определяется в (12), $T_{r,P}$ — время расчетов при наличии распараллеливания и предобуславливания, а также значение коэффициента эффективности распараллеливания $Q_{r,P}$, равного

$$Q_{r,P} = \frac{A_{r,P}}{P}.$$

Важным выводом из результатов, представленных на рис. 3, 4, является появление сверхускорения ($Q_{r,P} > 1$), что объясняется наличием двухсеточного предобуславливания.

4. Заключение. Предложен и экспериментально исследован метод ускорения параллельного решения краевых задач с двухсеточным предобуславливанием на квазиструктурированных прямоугольных сетках, не требующий введения дополнительных инструментов, кроме тех, которые используются при построении сеток. На серии численных экспериментов показано, что двухсеточное предобуславливание дает ускорение вычислений в среднем в 2.5 раза, а суммарно распараллеливание с предобуславливанием дает сверхускорение, при котором эффективность больше 1.

2024, **25** (2), 187–196. doi 10.26089/NumMet.v25r215

Список литературы

1. *Козырев А.Н., Свешников В.М.* О построении двумерных локально-модифицированных квазиструктурированных сеток и решении на них краевых задач в областях с криволинейной границей // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2017. **6**, № 2. 5–21. doi 10.14529/cmse170201.
2. *Liseikin V.D.* Grid generation methods. Berlin: Springer, 1999.
3. *Шокин Ю.И., Данаев Н.Т., Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю.* Лекции по разностным схемам на подвижных сетках. Часть 2. Алматы: Изд-во КазНУ, 2008.
4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
5. *Ушакова О.В.* О развитии вариационного подхода построения оптимальных сеток (обзор) // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2023. **29**, № 2. 217–247. doi 10.21538/0134-4889-2023-29-2-217-247.
6. *Федоренко Р.П.* О скорости сходимости одного итерационного процесса // Журн. вычисл. матем. матем. физики. 1964. **4**, № 3. 559–564.
7. *Бахвалов Н.С.* О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // Журн. вычисл. матем. матем. физики. 1966. **6**, № 5. 861–885.
8. *Brandt A.* Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems // Math. Comp. 1977. **31**, N 138. 333–390.
9. *Hackbusch W.* Multi-grid methods and applications. Berlin: Springer, 1985.
10. *Василевский Ю.В., Ольшанский М.А.* Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007.
11. *Саад Ю.* Итерационные методы для разреженных линейных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
12. *Bank R., Falgout R., Jones T., Manteuffel T., McCormick S., Ruge J.* Algebraic multigrid domain and range decomposition (AMG-DD/AMG-RD) // SIAM J. Sci. Comput. 2015. **37**, N 5. S113–S136. doi 10.1137/140974717.
13. *Napov A., Notay Y.* An efficient multigrid method for graph Laplacian systems II: robust aggregation // SIAM J. Sci. Comput. 2017. **39**, N 5. S379–S403. doi 10.1137/16M1071420.
14. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
15. *Мацокин А.М., Непомнящих С.В.* Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Изв. высш. учебных заведений. Математика. 1985. № 10. 61–66.
16. *Dolean V., Jolivet P., Nataf F.* An introduction to domain decomposition methods: algorithms, theory, and parallel implementation. Philadelphia: SIAM Press, 2015. doi 10.1137/1.9781611974065.fm.
17. *Quarteroni A., Valli A.* Domain decomposition methods for partial differential equations. Oxford: Oxford Univ. Press, 1999.
18. *Xiang H., Notaf F.* Two-level algebraic domain decomposition preconditioners using Jacobi–Schwarz smoother and adaptive coarse grid corrections // J. Comput. Appl. Math. 2014. **261**, N 1. 1–13. doi 10.1016/j.cam.2013.10.027.
19. *Saad Y., Schultz M.H.* GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1986. **7**, N 3. 856–869. doi 10.1137/0907058.
20. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2000.
21. *Свешников В.М.* Построение прямых и итерационных методов декомпозиции // Сиб. журн. инд. матем. 2009. **12**, № 3. 99–109.
22. *Сыровой В.А., Свешников В.М., Козырев А.Н.* Аналитическое и численное моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2023.
23. *Козырев А.Н., Свешников В.М.* Экспериментальное исследование эффективности решения 2D краевых задач на подсетках квазиструктурированных прямоугольных сеток // Сиб. журн. выч. матем. 2021. **24**, № 3. 277–288. doi 10.15372/SJNM20210304.
24. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
22 марта 2024 г.

Принята к публикации
18 апреля 2024 г.

Информация об авторах

Александр Николаевич Козырев — науч. сотр.; Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр-кт акад. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

2024, **25** (2), 187–196. doi 10.26089/NumMet.v25r215

Владимир Дмитриевич Корнеев — к.т.н., старший науч. сотр.; Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр-кт акад. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Виктор Митрофанович Свешников — д.ф.-м.н., гл. науч. сотр.; Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр-кт акад. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. A. N. Kozyrev and V. M. Sveshnikov, "On the Construction of Two-Dimensional Local-Modified Quasistructured Grids and Solving on Them Two-Dimensional Boundary Value Problem in the Domains with Curvilinear Boundary," Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Vychisl. Mat. Inf. **6** (2), 5–21 (2017).
2. V. D. Liseikin, *Grid Generation Methods* (Springer, Berlin, 1999).
3. Yu. I. Shokin, N. T. Danaev, G. S. Khakimzyanov, and N. Yu. Shokina, *Lectures on Difference Schemes on Moving Grids* (KazNU, Almaty, 2008), Part 2 [in Russian].
4. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1989; CRC Press, Boca Raton, 2001). doi 10.1201/9780203908518.
5. O. V. Ushakova, "On the Development of the Variational Approach to the Generation of Optimal Grids (A Review)," Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN **29** (2), 217–247 (2023). doi 10.21538/0134-4889-2023-29-2-217-247.
6. R. P. Fedorenko, "The Speed of Convergence of One Iterative Process," Zh. Vichisl. Mat. Mat. Fiz. **4** (3), 559–564 (1964). [USSR Comput. Math. Math. Phys. **4** (3), 227–235 (1964)]. doi 10.1016/0041-5553(64)90253-8.
7. N. S. Bakhvalov, "On the Convergence of a Relaxation Method with Natural Constraints on the Elliptic Operator," Zh. Vichisl. Mat. Mat. Fiz. **6** (5), 861–885 (1966). [USSR Comput. Math. Math. Phys. **6** (5), 101–135 (1966)]. doi 10.1016/0041-5553(66)90118-2.
8. A. Brandt, "Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems," Math. Comp. **31** (138), 333–390 (1977).
9. W. Hackbusch, *Multi-Grid Methods and Applications* (Springer, Berlin, 1985).
10. Yu. V. Vasilevsky and M. A. Olshansky, *A Short Course on Multigrid and Domain Decomposition Methods* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2007) [in Russian].
11. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (SIAM Press, Philadelphia, 2003; Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013).
12. R. Bank, R. Falgout, T. Jones, et al., "Algebraic Multigrid Domain and Range Decomposition (AMG-DD/AMG-RD)," SIAM J. Sci. Comput. **37** (5), S113–S136 (2015). doi 10.1137/140974717.
13. A. Napov and Y. Notay, "An Efficient Multigrid Method for Graph Laplacian Systems II: Robust Aggregation," SIAM J. Sci. Comput. **39** (5), S379–S403 (2017). doi 10.1137/16M1071420.
14. S. K. Godunov, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
15. A. M. Matsokin and S. V. Nepomnyashchikh, "The Schwarz Alternation Method in a Subspace," Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. No. 10, 61–66 (1985). [Soviet Math. (Iz. VUZ). **29** (10), 78–84 (1985)].
16. V. Dolean, P. Jolivet, and F. Nataf, *An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory, and Parallel Implementation* (SIAM Press, Philadelphia, 2015). doi 10.1137/1.9781611974065.fm.
17. A. Quarteroni and A. Valli, *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1999).
18. H. Xiang and F. Notaf, "Two-Level Algebraic Domain Decomposition Preconditioners Using Jacobi–Schwarz Smoother and Adaptive Coarse Grid Corrections," J. Comput. Appl. Math. **261** (1), 1–13 (2014). doi 10.1016/j.cam.2013.10.027.
19. Y. Saad and M. H. Schultz, "GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems," SIAM J. Sci. Stat. Comput. **7** (3), 856–869 (1986). doi 10.1137/0907058.
20. V. P. Ilyin, *Finite Difference and Finite Volume Methods for Elliptic Equations* (Inst. Comput. Math. Math. Geophys., Novosibirsk, 2000) [in Russian].
21. V. M. Sveshnikov, "Construction of Direct and Iterative Decomposition Methods," Sib. Zh. Ind. Mat. **12** (3), 99–109 (2009). [J. Appl. Ind. Math. **4** (3), 431–440 (2010)]. doi 10.1134/S1990478910030166.
22. V. A. Syrovoy, V. M. Sveshnikov, and A. N. Kozyrev, *Analytical and Numerical Modeling of Intense Beams of Charged Particles* (Inst. Comput. Math. Math. Geophys., Novosibirsk, 2023) [in Russian].

23. A. N. Kozyrev and V. M. Sveshnikov, "An Experimental Study of the Efficiency of Solving 2D Boundary Value Problems on Subgrids of Quasi-Structured Rectangular Grids," Sib. Zh. Vych. Mat. **24** (3), 277–288 (2021). [Numer. Anal. Appl. **14** (3), 238–248 (2021). doi 10.1134/S1995423921030046].

24. G. I. Marchuk, *Methods of Computational Mathematics* (Nauka, Moscow, 1980; Springer, New York, 1982).

Received
March 22, 2024

Accepted for publication
April 18, 2024

Information about the authors

Alexander N. Kozyrev — Researcher; Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Ac. Lavrentieva prospekt, 6, 630090, Novosibirsk, Russia.

Vladimir D. Korneev — Ph.D., Senior Researcher; Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Ac. Lavrentieva prospekt, 6, 630090, Novosibirsk, Russia.

Victor M. Sveshnikov — Dr. Sci., Chief Researcher; Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Ac. Lavrentieva prospekt, 6, 630090, Novosibirsk, Russia.