

УДК 669.162.263

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДОМЕННОЙ ПЕЧИ

А. Н. Дмитриев¹

Рассмотрено решение задачи математического описания теплообменных, газодинамических и физико-химических явлений, происходящих при доменной плавке в их взаимосвязи, и его применение для изучения процессов, определяющих восстановление металлов из многокомпонентных руд.

Ключевые слова: математическая модель, газодинамика, теплообмен, восстановление, доменный процесс

1. Введение. Доменный процесс характеризуется многообразием и сложностью явлений газодинамики, движения шихты, теплообмена, восстановления, размягчения и др. Исследование этих явлений в доменной печи с целью выявления резервов эффективности ее работы — снижения расхода кокса и повышения производительности — сопряжено с большими финансовыми, технологическими и техническими трудностями. Поэтому использование математических моделей в изучении доменной плавки при разработке систем контроля и управления доменным процессом имеет большое значение. Роль математических моделей возрастает при недостатке информации о явлениях, происходящих в печи, такой как температуры шихты и газа, давление и состав газа, степени восстановления железа в объеме печи.

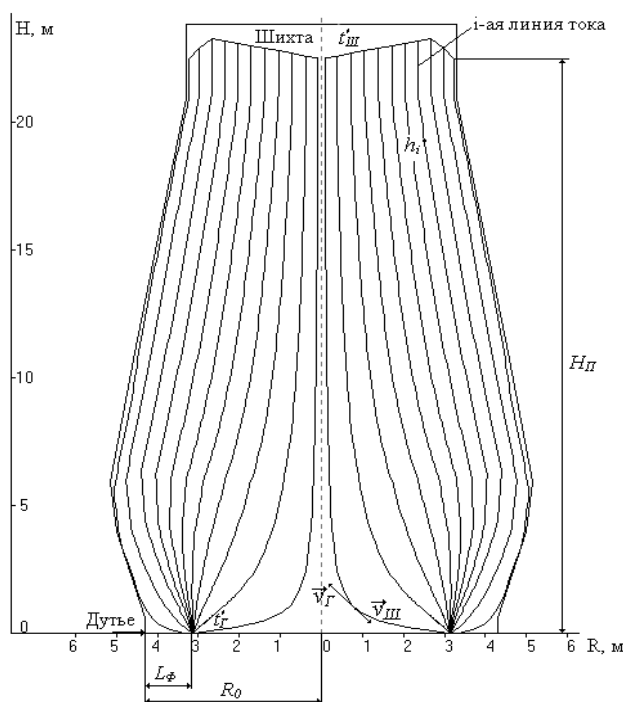


Рис. 1. К постановке задачи построения математической модели доменного процесса: H_{Π} и R_0 — высота слоя шихты и радиус печи; L_{Φ} — расстояние от стенки печи до центра фурменного очага; V_{Π} и V_{Γ} — векторы скоростей шихты и газа; t'_{Π} и t'_{Γ} — температуры шихты и газа на входе в слой; h_i — расстояние от уровня засыпи до расчетной точки вдоль i -й линии тока

¹ Государственное учреждение Институт металлургии УрО РАН, ул. Амундсена 101, 620016, г. Екатеринбург; e-mail: dmi_imet@r66.ru, redforest@r66.ru

2. Постановка задачи. Физическая формулировка задачи заключается в следующем (рис. 1). В шахтной печи радиусом R_0 и высотой H_{Π} непрерывным потоком вдоль линий тока навстречу друг другу движутся газ и шихта с начальными температурами $t'_Г$ и t'_{Π} , соответственно. Предполагается, что фурменный очаг, находящийся на расстоянии L_{Φ} от стенки печи, служит точечным источником газа и стоком материала. Теплоемкость потока газа W_{Γ} и суммарный коэффициент теплоотдачи a_{sv} являются функциями длины линий тока h , т.е. скорости газа; температуры начала размягчения и плавления, кроме химического и минералогического состава, являются функцией степени восстановления.

При такой постановке задачи можно ограничиться следующими математическими моделями: газодинамики, теплообмена, восстановления, зоны когезии, а также балансовой (равновесной) моделью.

3. Математическая модель газодинамики. В основу математической модели газодинамики доменной плавки положена задача о фильтрации к одиночной дрене [1]. Сделаны следующие допущения: движение газа стационарно и соответствует законам потенциального изотермического течения, порозность шихты постоянна во всем объеме, распределение потерь напора по высоте линейно, конвективные ускорения отсутствуют, газ несжимаем.

В случае двумерного движения газа вектор его скорости в каждой точке направлен по нормали к линиям равного напора φ и по касательной к линиям равного расхода ψ . Поэтому распределение скоростей в плоскости, проходящей через ось фурмы и ось печи, будет описываться системой дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= 0\end{aligned}$$

с граничными условиями, отражающими фактическое давление газа на колошнике и фурмах доменной печи:

$$\begin{aligned}r = R_0, \quad \psi_0 &= \frac{\psi}{k_P(P_{\Phi} - P_K)} = 0, \\ h = H_{\Pi}, \quad \varphi_0 &= \frac{\psi}{k_P(P_{\Phi} - P_K)} = 0, \\ r = 0, \quad \psi_0 &= \frac{\psi}{k_P(P_{\Phi} - P_K)} = V_{\Phi},\end{aligned}$$

где r и R_0 — текущий радиус и радиус печи в метрах, h и H_{Π} — текущая высота и высота печи (расстояние от уровня засыпи до уровня фурм) в метрах, P_{Φ} и P_K — давление газа на фурмах и колошнике (атм), V_{Φ} — расход газа через фурму в м³/мин, k_P — коэффициент газопроницаемости шихты (доли ед.).

Решение задачи для шахты прямоугольного сечения осуществлено методом конформных отображений с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца [2], являющегося обобщением эллиптического интеграла первого рода.

Ниже приведены формулы, полученные нами впервые, позволяющие проводить расчеты в комплексной области.

Скорость газа в каждой точке в общем случае является функцией координаты Z ($Z = Y + iX$, где Y и X , соответственно, ордината и абсцисса) этой точки, которая определяется по следующей зависимости

$$Z = \frac{H_{\Pi}}{K_1} F(\tau, k_1),$$

где K_1 — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k_1 ; F — эллиптический интеграл первого рода с аргументом τ и модулем k_1 .

Для расчета эллиптического интеграла первого рода $F(\tau, k_1)$ в комплексной области использован метод Ю. С. Сикорского [3].

Для расчета величины τ в зависимости от комплексного потенциала ω получено следующее выражение:

$$\tau = \sqrt{\frac{1 - \sin^2\left(\frac{\pi\omega}{2i}\right) k_2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{K_2}{R_0} L_{\Phi}, k_2\right)}{k_1^2 + \sin^2\left(\frac{\pi\omega}{2i}\right) k_2^2 \left[1 - \operatorname{sn}^2\left(\frac{K_2}{R_0} L_{\Phi}, k_2\right)\right]}}.$$

Здесь K_2 — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k_2 , sn — эллиптический синус, ω — комплексный потенциал, который представляется в виде $\omega = \varphi + i\psi$, где ψ — функция тока (определяет линии равных расходов) и φ — потенциал поля скоростей (определяет линии равных напоров).

Для расчета координат линий тока Z и значений скоростей газа V в точке с данной координатой (поля скоростей) необходимо последовательно изменять значения φ и ψ с шагом, обеспечивающим получение газодинамической сетки необходимой частоты. Скорость газа в данной точке определяется по зависимости

$$V_{\Gamma} = \frac{2k_P V_{\text{Гср}} K_2 \sqrt{1 - \delta^2 k_2^2} \text{sn}\left(\frac{K_1}{H_{\Pi}} Z, k_1\right)}{\pi [\delta^2 + (1 - \delta^2)] \text{sn}^2\left(\frac{K_1}{H_{\Pi}} Z, k_1\right)}, \quad \delta = \text{sn}\left(\frac{K_2}{R_0} L_{\Phi}, k_2\right), \quad (1)$$

где $V_{\text{Гср}}$ — средняя по горизонтальному сечению шахты скорость движения газа в метрах; k_P — коэффициент, учитывающий нелинейное изменение перепада давления по высоте доменной печи.

Рассмотрим теперь допущения, принятые в постановке задачи.

В разрабатываемой математической модели предполагается точечный источник дутья. Оценим фактические размеры фурменных очагов в доменной печи. По данным [8] протяженность фурменного очага составляет 0,7–1,3 метра. Расчет по формуле [9]

$$d_{\text{фо}} = 9,6 \times 10^3 V_{\text{д}},$$

где $V_{\text{д}}$ — скорость дутья при нормальных условиях в м/с, приведен при сферической форме фурменного очага к следующим результатам (табл. 1).

Таблица 1

Соотношение объемов фурменных очагов и доменной печи

Доменная печь	Объем печи V_{Π} , м ³	Диаметр фурменного очага $d_{\text{фо}}$, м	Количество фурм n , шт	Объем фурменных очагов $V_{\text{фо}}$, м ³	$\frac{V_{\text{фо}}}{V_{\Pi}}$
№ 1 ЧусМЗ	218	0,786	8	4,07	0,019
№ 5 Серовский МЗ	212	0,54	10	2,10	0,010
№ 3 НТМК	1513	1,354	16	52,96	0,035
№ 4 НТМК	1513	1,194	16	36,31	0,024
№ 5 НТМК	1719	1,56	16	80,99	0,047
№ 6 НТМК	2700	1,50	28	126,00	0,047
№ 3 НЛМК	2000	1,30	20	58,59	0,029
№ 3 КарМК	2700	1,42	25	95,44	0,035
№ 4 КарМК	3200	1,36	27	90,56	0,028

Таким образом, объем фурменных очагов составляет до 5 % от объема доменной печи, что позволяет считать фурменный очаг точечным источником. Подтверждением такого выбора также является то, что расчетные эквипотенциали вблизи источника дутья напоминают своими очертаниями форму фурменного очага.

В работе [10] сделан вывод о том, что характеристика потока, проходящего через слой шихты, остается аналогичной характеристике потенциального потока. Там же показано, что даже при $\text{Re} = 10000$ сжимаемостью потока можно пренебречь.

Режим работы доменной печи при отсутствии резких изменений шихтовых и дутьевых условий можно считать стационарным, точнее, квазистационарным.

При одномерном потоке силы инерции не проявляются, и, следовательно, допущение об отсутствии конвективных ускорений справедливо для верхней зоны. В нижней зоне силы инерции препятствуют быстрому выравниванию скоростей по сечению печи, увеличивая протяженность двумерной зоны движения газа.

Результаты исследований, проведенных на доменных печах, например [11–13], подтверждают допущение о линейном распределении потерь напора по высоте верхней и нижней зон. Однако в целом по высоте печи оно носит нелинейный характер.

Влияние неизотермичности на поле скоростей газа сказывается в зонах печи с большим градиентом температур. Таких зон в доменной печи (в соответствии с S -образным характером температурного поля) две. В верхних горизонтах доменной печи вследствие низкого уровня температур неизотермичностью можно пренебречь [14].

Для учета влияния порозности движущейся шихты, распределенной по радиусу печи неравномерно, предполагается использовать информацию о распределении скорости газа по радиусу колошника в случае ее наличия (при ее отсутствии учет изменения порозности производится с помощью параметра настройки k_m в математической модели теплообмена). Для этого значение скорости в каждой точке линии тока умножается на соответствующую относительную скорость на верхнем горизонте. Правомерность такого предположения подтверждается идентичностью эпюр скоростей газа на трех горизонтах доменных печей Магнитогорского и Белорецкого металлургических комбинатов, полученных сотрудниками Уральского государственного технического университета — УПИ и ВНИМТ (Всероссийский научно-исследовательский институт металлургической теплотехники).

Приближенная оценка погрешности расчета по формуле (1) может быть осуществлена, если воспользоваться возможностью допущения о потенциальности движения при расчете поля скоростей газа [10].

Математическим условием потенциальности движения является соотношение $\text{rot } V_\Gamma = 0$, т.е. [15]

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Скорость газа является функцией температуры t_Γ и давления газа p_Γ . Уравнение, тождественное (2), но в которое входит скорость газа при нормальных условиях, имеет вид

$$\beta \left(\frac{\partial V_{y0}}{\partial y} - \frac{\partial V_{x0}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} - V_{x0} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = 0, \quad (3)$$

где

$$\beta = \frac{9.8}{p_\Gamma} \frac{t_\Gamma + 273}{273}. \quad (4)$$

Уравнения (2), (3) представляют собой уравнения в частных производных. Первое слагаемое уравнения (3) характеризует изменение скорости газа под действием непосредственно температуры и давления. Это влияние может быть учтено при расчете температурного поля в математической модели теплообмена. Второе слагаемое также отражает влияние температуры и давления на скорость газа, которое при расчете по уравнению (1) не учитывается. Доля этого слагаемого в изменении фактической скорости газа, средней по сечению, на единице высоты h представляет собой погрешность уравнения (1):

$$\sigma_v = \frac{\left(V_{y0} \frac{\Delta \beta}{\Delta y} \right)^2 + \left(V_{x0} \frac{\Delta \beta}{\Delta x} \right)^2}{\frac{\Delta V_{\Gamma, \text{ср.}}}{\Delta h}} 100 \%. \quad (5)$$

Среднее значение скорости по сечению $\Delta V_{\Gamma, \text{ср.}}$ взято потому, что нет опытных данных об изменении скорости газа по радиусу нижней части доменной печи. Подставив в уравнение (5) значения величин, характерных для работы современных доменных печей (в частности, доменной печи № 9 Магнитогорского металлургического комбината), получим, что для области распара (наибольший диаметр доменной печи) погрешность расчета равна

$$\sigma_v = \frac{\left(1.74 \frac{0.04}{2.37} \right)^2 + \left(1.37 \frac{0.03}{0.98} \right)^2}{\frac{1.01}{1.7}} 100 \% = 8.62 \%,$$

что для теплотехнических расчетов вполне удовлетворительно.

Для области шахты, где горизонтальная составляющая вектора скорости V_x меньше, чем в распаре, σ_v имеет меньшее значение.

Для качественной оценки точности расчета по уравнению (1) нами было рассчитано время движения газа в секундах по различным линиям тока $\tau = \sum_{j=1}^h \frac{h_j}{V_j}$, где h_j — длина j -ого участка линии тока в метрах; V_j — скорость газа на j -ом участке в м/с.

Величина скорости рассчитывалась по формуле (1). Для сравнения использованы экспериментальные данные, полученные авторами работы [16], по определению времени пребывания газов в печи с помощью индикации дутья гелием для доменных печей объемом 1007 и 1719 м³ и пересчитанные с учетом различия высот для печей объемом 1370 и 2014 м³. Возможность такого пересчета вытекает из подобия полей скоростей газа в печах с подобной геометрией шахты [17].

Результаты вычислений приведены в табл. 2. При расчетах порозность слоя была принята постоянной по сечению и равной 0.39. Из таблицы видно, что время пребывания газа на оси и периферии различается в два раза. Такое расхождение не может возникнуть только из-за различия в длинах линий тока, составляющего 6–8 %. Таким образом, совпадение данных табл. 2 качественно подтверждает достоверность формулы (1).

Таблица 2

Время пребывания газа в печи

Объем печи, м ³	Способ определения	Время, с	
		на периферии	на оси
2014	Принято по опытным данным	4,9÷5,4	9,2÷12,1
	Расчет по формуле (4)	5,1	10,2
1370	Принято по опытным данным	4,9÷5,1	8,6÷11,2
	Расчет по формуле (4)	4,9	8,2

С целью приближения математической модели газодинамики к реальным условиям сделано следующее.

1. Введен коэффициент адаптации — константа $K_{дв}$, входящий в коэффициент $K_{и}$, который характеризует реальную протяженность двумерной зоны движения газа и показывает, во сколько раз фактическая протяженность больше расчетной. Этот коэффициент учитывает влияние на высоту двумерной зоны дискретности расположения фурм, профиля печи, зоны когезии, конвективных ускорений и неизо-термичности процесса. Значение этого коэффициента целесообразно подбирать по совпадению расчетного распределения скоростей по радиусу колошника с экспериментальными данными, сглаживанием которых устраняется неравномерность, создаваемая распределением шихты на колошнике (выделяется неравномерность, создаваемая фурменным подводом дутья). Величина этого коэффициента, по опытным данным, изменяется в пределах от 1.0 до 0.16. Начальное значение этого параметра определяется по формуле [18]

$$K_{и} = K_{дв} \left(\frac{l_{\Phi}}{R_0} \right)^{5,1} + 0,01 \left(\frac{H_{п}}{R_0} \right)^{0,714}.$$

В модель коэффициент вводится следующим образом: при расчете сетки движения газа высота печи берется уменьшенной в $1/K_{и}$ раз, затем полученная вертикальная координата умножается на эту же величину. Таким образом достигается реальная протяженность двумерной зоны движения газа.

Кроме того, этот прием позволяет значительно повысить точность расчетов в областях, близких к границам шахты и ее оси.

2. В зависимость (1) вводится коэффициент адаптации, учитывающий нелинейное изменение перепада давления по высоте доменной печи: $k_p = f(h)$.

Поскольку в решение задачи заложен прямоугольный профиль печи, фактический профиль формируется при определении координат узлов сетки умножением заданного радиуса R_0 на отношение фактического радиуса R к R_0 .

Результатами расчета являются выводимые на экран дисплея изображения газодинамической сетки движения, которая является неравномерной, и поле скоростей газа, т.е. значения скоростей в узлах сетки, на основании которой строятся линии равных скоростей, если точки соединить линиями (рис. 2 и 3).

Построение газодинамической сетки движения представляет собой одну из основных задач газомеханики слоя, так как она является основой для расчета поля скоростей газа, а ее анализ позволяет получить общее представление о характере движения газового потока. Плотность расположения линий на этой сетке характеризует скорость движения газа: чем больше плотность, тем больше скорость в данной зоне, и наоборот. Пространство печи вдоль линии, идущей от фурменного очага до колошника (функции тока ψ), называется трубкой тока.

4. Математическая модель теплообмена. В основу математической модели теплообмена доменной плавки положено предложенное нами аналитическое решение задачи о нагреве слоя при переменных, зависящих от координаты (скорости газа), теплоемкостей потоков шихты $W_{\text{ш}}$ и газа $W_{\text{г}}$, коэффициента теплоотдачи a_{sv} .

Для линий тока, находящихся в вертикальной плоскости, проходящей через оси фурмы и печи, справедливы дифференциальные уравнения теплообмена в противотоке [19]

$$\begin{aligned} W_{\text{ш}} dt_{\text{ш}} &= a_{sv}(h)S(h)[t_{\text{г}}(h) - t_{\text{ш}}(h)] dh, \\ W_{\text{г}} dt_{\text{г}} &= a_{sv}(h)S(h)[t_{\text{г}}(h) - t_{\text{ш}}(h)] dh, \end{aligned} \quad (6)$$

где $S(h)$ — сечение трубки тока.

В связи с тем, что в настоящее время практически невозможно разработать математическую модель движения шихты даже с большими допущениями, на основании сопоставления сетки движения газа и линий равных скоростей газа с траекториями опускания частиц шихты и линиями равных скоростей движения шихты в работе [20] нами сделано предположение о подобии полей скоростей шихты и газа.

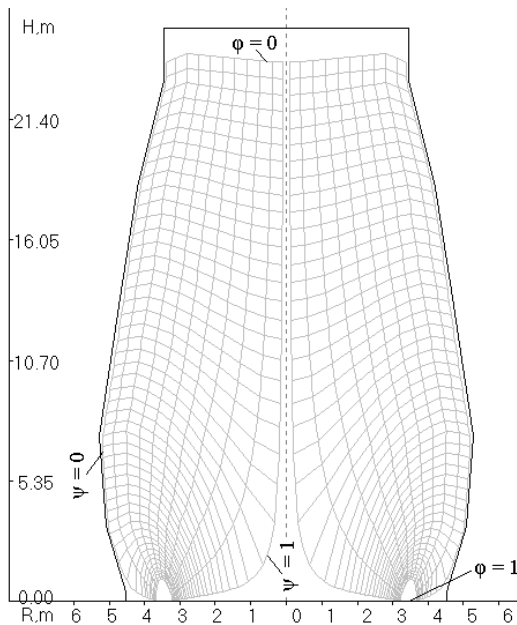


Рис. 2. Газодинамическая сетка движения

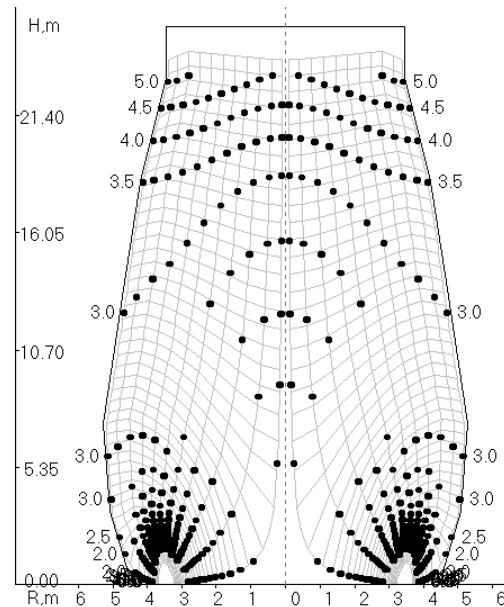


Рис. 3. Линии равных скоростей газа (м/с)

На этом основании в первом уравнении системы (6) $W_{\text{ш}}(h)$ заменено на $W_{\text{г}}(h)m(h)$:

$$\begin{aligned} W_{\text{г}}m(h) dt_{\text{ш}} &= a_{sv}(h)S(h)[t_{\text{г}}(h) - t_{\text{ш}}(h)] dh, \\ W_{\text{г}} dt_{\text{г}} &= a_{sv}(h)S(h)[t_{\text{г}}(h) - t_{\text{ш}}(h)] dh, \end{aligned} \quad (7)$$

где $W_{\text{г}}$ — теплоемкость потока газа (Вт/°С); m — отношение теплоемкостей потоков шихты и газа (доли ед.); a_{sv} — суммарный коэффициент теплоотдачи (Вт/(м³·град); S — сечение трубки тока в м²; $t_{\text{г}}$ и $t_{\text{ш}}$ — температуры газа и шихты в градусах по Цельсию, h — расстояние от уровня засыпи до точки, в которой рассчитывается температура, вдоль линии тока в метрах.

Граничные условия, отражающие завершенность теплообмена и деление рабочего пространства печи на две зоны, имеют следующий вид:

$$h = H, \quad t_{\text{г}} = t'_{\text{г}}, \quad m(h) = 1, \quad \frac{dt_{\text{ш}}}{dh} = dt_{\text{г}}dh. \quad (8)$$

Здесь H — длина линии тока в метрах; $t'_{\text{г}}$ — температура газа в градусах по Цельсию на входе в слой (температура фурменного очага).

Выполненный нами анализ известных решений задачи о расчете распределения температур шихты и газа в слое, некоторые из которых приведены в работе [15], показал, что теплоемкости потоков шихты $W_{\text{ш}}$

и газа W_Γ , коэффициент теплоотдачи a_{sv} являлись как функциями высоты (длины), так и температуры. Очевидно, что более правильно считать их функциями температуры, поскольку это соответствует физической природе решаемой задачи. Однако мы не пойдем против истины, если будем считать указанные величины функциями высоты, но подставим в конечные уравнения для расчета температур их значения при искомой температуре. Это можно сделать, если применить методы последовательных приближений. В нашем случае такая условность еще более оправдана, так как в связи с особенностями решения задачи величины W_Π , W_Γ и a_{sv} являются, кроме температуры, еще и функциями высоты (координаты).

Рассмотрим предложенное нами аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (7) при граничных условиях (8).

Из второго уравнения системы (7) выразим t_Π , продифференцируем ее по h и подставим t_Π в первое уравнение системы (7). После преобразования получим

$$\frac{d^2 t_\Gamma}{dh^2} + \frac{dt_\Gamma}{dh} f_1(h) = 0. \quad (9)$$

Для удобства преобразований члены

$$\frac{a_{sv}(h)}{W(h)} \quad \text{и} \quad \frac{a_{sv}(h)S(h)}{W(h)m(h)}$$

в выводах участвуют как единые функции h .

Выражение (9) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами [21]. В справочнике [22] находим аналогичное уравнение. Воспользовавшись его решением, запишем

$$t(h) = C_1 + C_2 \int_0^h e^{-\int_0^h f_1(h) dh} dh, \quad (10)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. В выражениях (9), (10) обозначено

$$f_1(h) = \frac{a_{sv}(h)S(h)}{W(h)m(h)} \left\{ 1 - m(h) + \frac{d}{dh} \left[\frac{W(h)}{a_{sv}(h)S(h)} \right] m(h) \right\}.$$

Преобразуем выражение $e^{-\int_0^h f_1(h) dh}$. Тогда уравнение (10) запишется следующим образом:

$$t(h) = C_1 + C_2 \int_0^h \frac{a_{sv}(h)S(h)}{W(h)} e^{-f(h)} dh. \quad (11)$$

Здесь принято

$$f(h) = \int_0^h \frac{a_{sv}(h)S(h)}{m(h)W(h)} [1 - m(h)] dh.$$

Аналогично, выразив t из первого уравнения системы (7) и проделав все преобразования, получим выражение для расчета температуры шихты вдоль линии тока:

$$t = C_3 + C_4 \int_0^h \frac{a_{sv}(h)S(h)}{m(h)W(h)} e^{-f(h)} dh. \quad (12)$$

Определим постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 , входящие в уравнения (11) и (12). Продифференцируем эти выражения по h . Так как при $m = 1$ имеем $\frac{dt}{dh} = \frac{dt}{dh}$ (линии температур шихты и газа параллельны), найдем, что $C_2 = C_4$.

При $h = 0, t = t'$ интеграл в выражении (12) равен 0. Отсюда $C_3 = t'$.

Подставив в первое уравнение системы (7) температуру t и $\frac{dt}{dh}$ из выражения (12) при условии $\frac{dt}{dh} = 0, t = t'$, получим

$$C_2 = C_4 \frac{t' - t'}{e^{-f(h)} + \int_0^H \frac{a_{sv}(h)S(h)}{m(h)W(h)} e^{-f(h)} dh}.$$

Аналогично, при граничном условии $h = 0, t = t'$ после подстановки во второе уравнение системы (7) температуры газа t и $\frac{dt}{dh}$ из уравнения (11) определим, что $t_1 = t' + C_2$.

Тогда окончательные формулы для расчета температур шихты t и газа t вдоль линий тока (h отсчитывается по пути движения шихты, т.е. сверху вниз) имеют вид

$$\begin{aligned} t(h) &= B + A \int_0^h \frac{a_{sv}(h)S(h)}{W(h)} e^{-f(h)} dh, \\ t(h) &= t' + A \int_0^h \frac{a_{sv}(h)S(h)}{m(h)W(h)} e^{-f(h)} dh. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \frac{t' - t'}{e^{-f(h)} + \int_0^H \frac{a_{sv}(h)S(h)}{m(h)W(h)} e^{-f(h)} dh}, \\ B &= t' + A, \\ f(h) &= \int_0^h \frac{a_{sv}(h)S(h)}{m(h)W(h)} [1 - m(h)] dh. \end{aligned} \quad (14)$$

При постоянных значениях W , m и a_{sv} найденные зависимости преобразуются в известные формулы Б. И. Китаева (профессор Б. И. Китаев — известный ученый и педагог, основоположник теории теплообмена в доменных печах) для расчета теплообмена в противотоке, причем уравнения (13) и (14) объединяют все три возможных случая в зависимости от соотношения W и W .

Отметим важные особенности формул (13) и (14).

1. При $h = 0$ входящие в уравнения интегралы равны нулю. Тогда коэффициент по смыслу является температурой газа на выходе из слоя (температурой колошникового газа), т.е.

$$t = t' + A = t' + \frac{t' - t'}{e^{-f(h)} + \int_0^H \frac{a_{sv}(h)S(h)}{m(h)W(h)} e^{-f(h)} dh}. \quad (15)$$

Таким образом, в отличие от известных решений, например [19], где в качестве одного из граничных условий используется температура газа на выходе из слоя, значение t рассчитывается и ее распределение по радиусу колошника может быть использовано для адаптации модели.

Можно показать, что выражение эквивалентно следующей зависимости:

$$A = \frac{t' - t'}{1 + \int_0^H \frac{a_{sv}(h)S(h)}{W(h)} e^{-f(h)} dh}.$$

Она характеризуется более быстрой сходимостью при использовании комбинации усовершенствованного метода последовательных приближений Вегстейна [23] и дихотомии [24], применяемых при вычислениях по уравнениям (13) и (14) в связи с зависимостью теплофизических свойств шихты и газа от температуры.

2. Определение высот ступеней теплообмена по формулам [19] является достаточно сложной задачей, так как надо знать величину степени незавершенности теплообмена Δt . Значение Δt определяется как разность температур шихты и газа на границе раздела тепловых зон. Она зависит от условий плавки и переменна по сечению печи.

Используя предлагаемое нами решение, высоты ступеней теплообмена и разность температур Δt предварительно определять не надо, а необходимо задаться лишь значением температуры газа на границе верхней и нижней зон, являющейся довольно стабильной величиной для конкретных условий плавки, т.е. “своеобразной константой процесса”.

Вычтя из первого уравнения системы уравнений (13) второе уравнение, получим

$$\Delta t = A e^{-f(h)}. \quad (16)$$

3. По этим зависимостям можно вести расчет температур для любого закона изменения отношения теплоемкостей потоков шихты и газа и коэффициента теплоотдачи вдоль линий тока. Для приближения математической модели теплообмена к реальным условиям введены следующие коэффициенты (параметры) адаптации.

1. Распределение температуры начала реакции прямого восстановления t по радиусу печи. Эта величина определяется кинетическими характеристиками железорудного материала и кокса и является функцией степени восстановления.

2. Коэффициент k_m , который характеризует распределение отношения теплоемкостей потоков шихты и газа и зависит от распределения по радиусу рудной нагрузки, порозности слоя и скоростей движения шихты и газа.

Начальное распределение отношения теплоемкостей потоков шихты и газа m на уровне засыпи определяется по информации о распределении по радиусу колошника рудной нагрузки, скорости газа. Затем m уточняется по совпадению расчетного и экспериментального распределений температур по радиусу колошника.

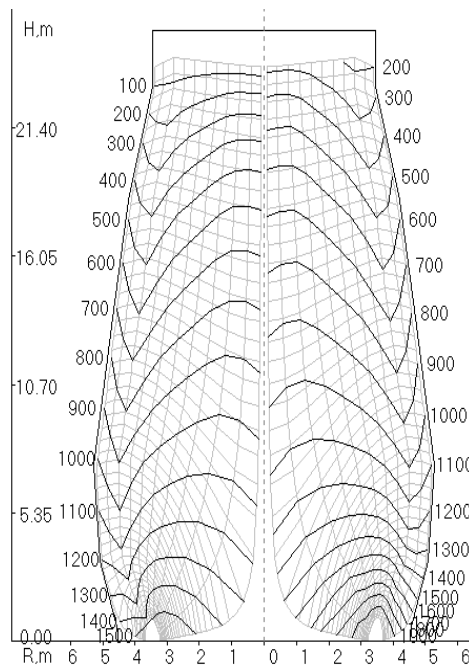


Рис. 4. Температурные поля шихты (слева) и газа (справа)

В результате расчетов по уравнениям (13), (14) определяются изотермы шихты и газа (рис. 4), а также распределения температур шихты и газа в любом горизонтальном или вертикальном сечении, используемых при адаптации модели и для анализа явлений. Ход изотерм характеризует неравномерность распределения по радиусу печи процессов теплообмена, а следовательно, и процессов восстановления. Характер изотерм газа определенно выражает существование двух основных источников неравномерности в доменной печи: фурменный подвод дутья и системы загрузки (как правило, конусные).

5. Математическая модель восстановления. В основу математической модели восстановления оксидов железа положена система дифференциальных уравнений массообмена и восстановления

$$v(h) dC = -K_{\Sigma V 0} e^{-E/RT} (1 - \varphi_{\text{Fe}}) C dh, \quad m^*(h) \frac{d\varphi_{\text{Fe}}}{dh} = \frac{dC}{dh}, \quad (17)$$

где — относительный концентрационный потенциал газового потока (или относительный потенциал массообмена, доли ед.), φ_{Fe} — степень восстановления оксидов железа (доли ед.), m^* — отношение теплоемкостей потоков шихты и газа (доли ед.), $K_{\Sigma V 0}$ — суммарный коэффициент массообмена при $\varphi_{\text{Fe}} = 0$ в см/с, E — энергия активации (Дж/моль), R — газовая постоянная (Дж/моль·К).

Концентрационный потенциал использован Б. И. Китаевым для анализа процессов восстановления в доменной печи.

Начальные условия

$$h = 0 : \quad \varphi_{Fe} = \varphi_{Fe0}, \quad h = 0 : \quad C = C_0. \quad (18)$$

Здесь φ_{Fe0} и C_0 — значения φ_0 и C на уровне засыпи в процентах.

Особенностью системы уравнений является введение в нее в явном виде модуля скорости газа v , получаемой из математической модели газодинамики, а также зависимость суммарного коэффициента массообмена $K_{\Sigma V0}$ как от температуры, так и от степени восстановления.

Эта система уравнений решена численным методом с предварительным проведением интерполирования входящих в систему переменных. Для этого применен метод сплайн-функций — интерполяция обобщенными кубическими сплайнами, а именно, рациональным сплайном, позволяющим интерполировать функции с большими градиентами. Рациональный сплайн имеет вид [25]

$$S_R(x) = f(1-t) + f_{i+1}t + E_i \left[\frac{t^3}{1+p_i(1-t)} - t \right] + D_i \left[\frac{(1-t)^3}{1+q_i t} - (1-t) \right], \quad (19)$$

где f_i — значения интерполируемой функции в узлах сетки Δ , $i = 0, \dots, N$, p_i, q_i — заданные числа, такие что $-1 < p_i, q_i < \infty$, $t = (x - x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Коэффициенты E_i и D_i определяются по зависимостям

$$E_i = \frac{-(3+q_i)(f_{i+1} - f_i) + h_i m_i + (2+q_i)h_i m_{i+1}}{(2+q_i)(2+q_i) - 1},$$

$$D_i = \frac{(3+p_i)(f_{i+1} - f_i) + h_i m_{i+1} + (2+p_i)h_i m_i}{(2+q_i)(2+q_i) - 1}.$$

Величины m_i определяются для $i = 1, 2, N-1$ из уравнения

$$\begin{aligned} \lambda_i P_{i-1} m_{i-1} + [\lambda_i P_{i-1} (2+q_{i-1}) + \mu_i Q_i (2+p_i)] m_i + \mu_i Q_i m_{i+1} = \\ = \lambda_i P_{i-1} (3+q_{i-1}) \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \mu_i Q_i (3+p_i) \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{где } \lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad P_{i-1} = \frac{3 + 3p_{i-1} + p_{i-1}^2}{(2+q_{i-1})(2+p_{i-1}) - 1}, \quad Q_i = \frac{3 + 3q_{i-1} + p_1^2}{(2+q_i)(2+p_i) - 1}.$$

Уравнение (20) решено относительно m методом трехточечной прогонки [24], являющимся частным случаем метода Гаусса.

В формуле (19) выбор параметров p_i, q_i обычно не вызывает затруднений. Он может быть сделан исходя из характера интерполируемых функций. Можно принять $p_i = q_i$ [25].

Имея значения V_T, m^* и t в соответствии с уравнением (19) с любой необходимой частотой, система уравнений (17) с начальными условиями (18) легко решается численно, например методами Рунге–Кутты.

Параметры m^* и m , являющиеся отношениями потоков шихты и газа при восстановлении и теплообмене соответственно, зависят от теплофизических и физико-химических свойств шихты и газа. Приближенно можно принять [26] $m^* = 1/m$.

Результатами расчета являются поля степеней восстановления железа и концентрационных потенциалов газа (рис. 5). Анализ этого рисунка показывает, что восстановительные процессы распределены по радиусу печи неравномерно, что вызвано, в свою очередь, неравномерным распределением по радиусу печи восстановительного потенциала газа.

6. Математическая модель зоны когезии. Зона когезии (или пластичности) представляет собой область доменной печи, где железорудные материалы находятся в размягченном состоянии, а кокс — в твердом. Она оказывает существенное сопротивление движению газового потока; местоположение и форма этой зоны в значительной степени определяют производительность доменной печи. Использование разработанных математических моделей газодинамики, теплообмена и восстановления с их особенностями приводит к тому, что расчетная форма зоны когезии, ее толщина и положение по высоте доменной печи определяются:

— характером неравномерности температурного поля, зависящего от системы загрузки, положения фурменного очага, профиля шахты и изменения газодинамического сопротивления по высоте доменной печи;

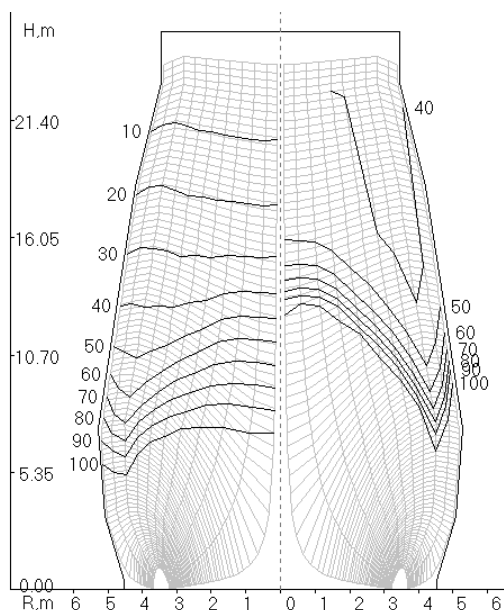


Рис. 5. Поля степеней восстановления железа φ_{Fe} (слева) и концентрационных потенциалов (справа)

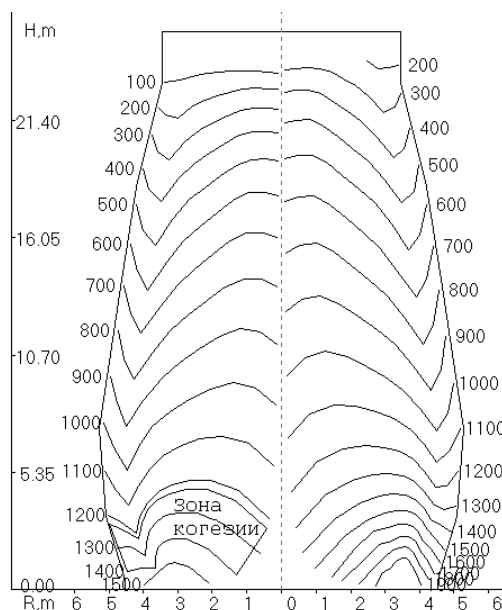


Рис. 6. Температурные поля шихты и газа с зоной коксезии

— температурами размягчения и плавления железорудного материала, зависящими от степени восстановления.

На рис. 6 приведены температурные поля шихты и газа, аналогичные рис. 4, с наложенной на них зоной коксезии.

7. Балансовая (равновесная) математическая модель [27]. В основе математической модели лежат следующие предпосылки. Теплообмен в доменной печи завершен, т.е. на определенной части высоты существует малый перепад температур между газом и шихтой. В определенной зоне печи на стадии восстановления магнетита (Fe_3O_4) реакция восстановления востита (FeO) стремится к термодинамическому равновесию. Здесь реализуется так называемое зональное восстановление, когда восстановление различных оксидов железа совмещается по времени.

Решение системы уравнений для нижней зоны, представленной условием термодинамического равновесия, а именно константой равновесия реакции восстановления FeO оксидом углерода, материальным и тепловым балансами, дополненной уравнением теплового баланса для верхней зоны, позволяет рассчитать основные показатели доменной плавки. Определенные таким образом показатели являются предельно достижимыми (минимальными) при данных параметрах шихты и дутья. Использование фактических степеней использования газа позволяет определить фактические показатели доменной плавки. Балансовая модель может использоваться как самостоятельно (для расчета входных параметров для двумерных моделей), так и в комплексе двумерных моделей.

8. Комплекс двумерных математических моделей доменного процесса. Разработаны алгоритм и программа расчета для персональной ЭВМ.

Программа балансовой модели написана на языке Basic. Для компиляции программы использован транслятор Visual Basic 6.0, работающий в среде Microsoft Visual Studio 6 и создающий 32-разрядные приложения для операционной системы Windows.

Программа двумерной модели написана на языке Fortran. Для трансляции программы использован компилятор Compaq Visual Fortran v.6.6B, работающий в среде Developer Studio. Этот компилятор создает 32-разрядные приложения и работает под Windows. Компилятор обеспечивает полную поддержку стандарта Fortran 90 и в то же время включает все новшества последнего стандарта Fortran 95. Библиотеки этого компилятора позволяют получать изображения с разрешением 800×600 и выше с количеством цветов более 256.

Расчеты проводятся по схеме, приведенной на рис. 7. Данные для расчета берутся из базы данных. В качестве базы данных нами выбрана известная таблица Excel из Microsoft Office XP. Результаты расчета

также представляются в таблице Excel и передаются как исходные в программу двумерных математических моделей.

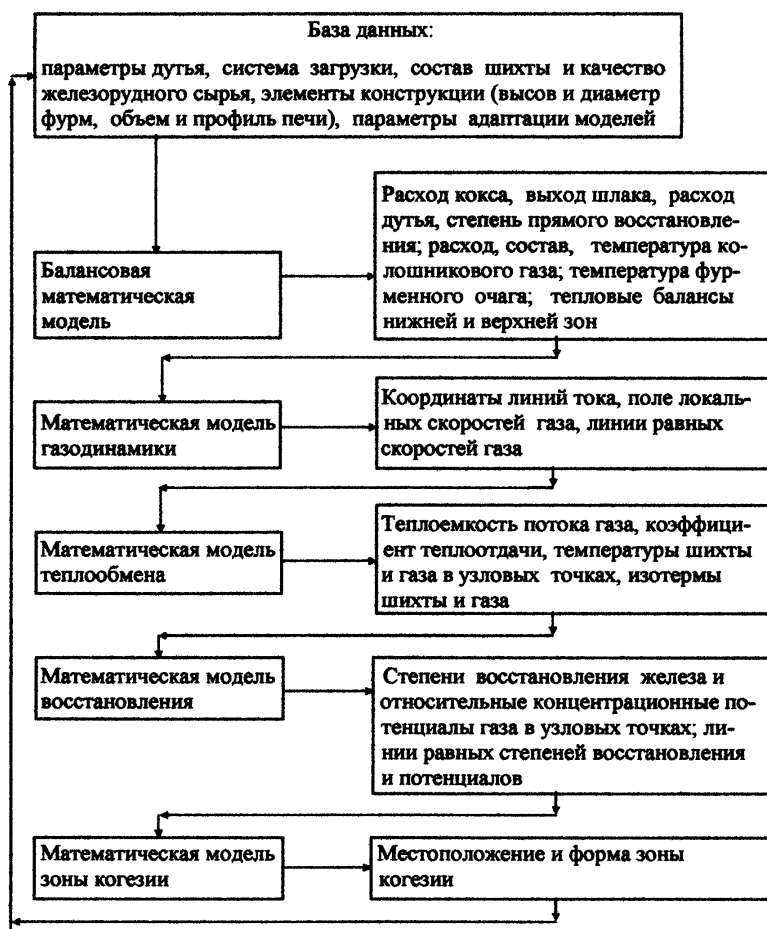


Рис. 7. Структурная схема комплекса двумерных математических моделей доменного процесса

9. Адаптация и проверка адекватности математической модели доменного процесса.

Адаптация балансовой (равновесной) математической модели проводится путем определения коэффициентов адаптации, воздействующих на состав колошникового газа и выход шлака.

Адекватность балансовой (равновесной) математической модели проверена по совпадению фактических и расчетных показателей плавки (расход кокса, расход дутья, выход шлака, температура и состав колошникового газа) для доменных печей, работающих в близких к равновесным условиям, а также для печей, работающих в отличающихся от равновесия условиях при подстановке вместо равновесной степени использования газа фактической.

Адекватность разработанной балансовой математической модели подтверждается также соответствием рассчитанных и фактических коэффициентов влияния различных технологических факторов на показатели доменной плавки.

Адаптация двумерной математической модели проведена путем определения коэффициентов адаптации по совпадению характера распределения фактических и расчетных значений температур газа на трех горизонтах доменной печи № 9 ММК.

Адекватность двумерной математической модели проверена по информации о работе доменной печи объемом 2300 м³ завода им. Ильича (Украина) по совпадению характера расчетных и фактических распределений температур по радиусу на среднем и нижнем горизонтах с использованием информации о фактическом распределении температуры газа по радиусу на верхнем горизонте.

10. Применение комплекса двумерных математических моделей доменного процесса. С

помощью данного комплекса двумерных математических моделей доменного процесса могут решаться следующие задачи:

— расчетное определение влияния качественных характеристик железородного сырья и кокса, пара-

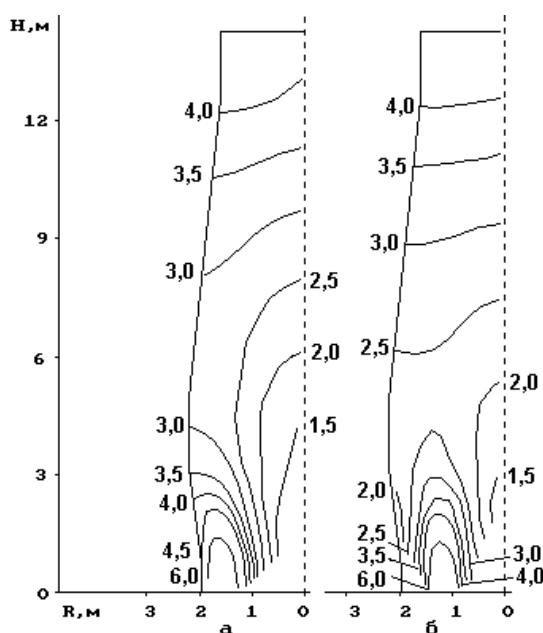


Рис. 8. Поля скоростей газа при различных положениях фурменного очага:
 $L = 0,3$ м (а) и $L = 0,7$ м (б).
 Цифры у кривых — скорости в м/с

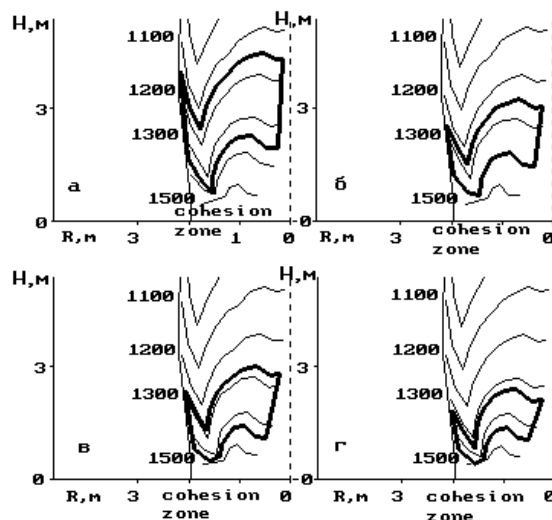


Рис. 9. Зоны когезии при плавке агломератов из серовских буроохромистых руд.
 Пояснения в тексте

метров дутья, профиля печи и других входных параметров на характер протекающих явлений и технико-экономические показатели доменной плавки;

— влияние изменения процессов газодинамики и теплообмена в объеме доменной печи при использовании новых технических решений: применении комбинированного дутья с высокими расходами природного газа и кислорода, вдувании угольной пыли, использовании высокопотенциального тепла, изменении профиля печи и параметров фурм;

— исследование изменения характера температурных и скоростных полей при отклонениях от нормального хода доменного процесса: нарушении теплообмена, окружной неравномерности, тихом ходе, нарушении графика выпусков.

Ниже приведены конкретные примеры использования разработанной математической модели для решения практических задач.

На рис. 8 показано влияние положения фурменного очага, зависящего от расхода дутья, а также от конструктивных параметров (высота и диаметра фурм), на поля скоростей газа (см/с). Видно, что положение фурменного очага оказывает влияние на характер поля скоростей на всей высоте шахты, причем на 3/4 высоты — значительное.

Проведено исследование влияния восстановимости на положение и форму зоны когезии для агломератов из серовских буроохромистых руд (рис. 9): бедного с низкой (а) и высокой (б) восстановимостью и богатого с низкой (в) и высокой (г) восстановимостью. Видно, что восстановимость агломерата существенно влияет на положение и толщину зоны когезии. Известно, что в опытных плавках при содержании кислорода в дутье 35 и 40 % возникли трудности, связанные с похолоданием шахты. Представляло интерес проанализировать причины возникновения, а также пути ликвидации этих трудностей. Температурные поля шихты и газа при содержании кислорода в дутье 35 и 50 % приведены на рис. 10. Видно, что при увеличении содержания кислорода в дутье холодает не только колошник, но и шахта на всем протяжении, вплоть до уровня фурм, во всех вертикальных сечениях. Причем в области рудного гребня возникает кризисное явление — отношение теплоемкостей потоков шихты и газа на колошнике приближается к единице и происходит вырождение верхней ступени теплообмена уже при содержании кислорода в дутье 45 %. Это вызывает необходимость выравнивания рудной нагрузки по радиусу при содержании кислорода в дутье более 40 %.

Хотя данная математическая модель по своей сути (исходя из постановки задачи) двумерная, в первом

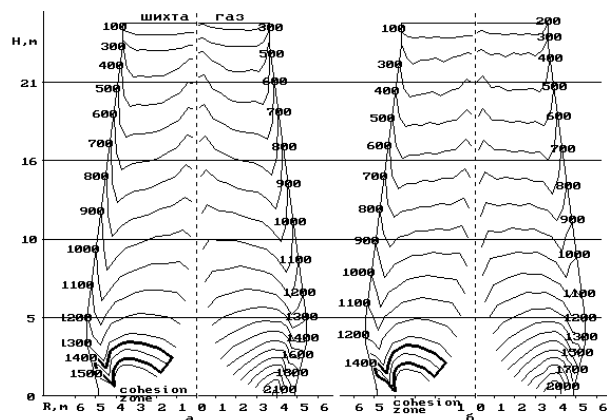


Рис. 10. Температурные поля шихты и газа при содержании кислорода в дутье 35 % (а) и 50 % (б)

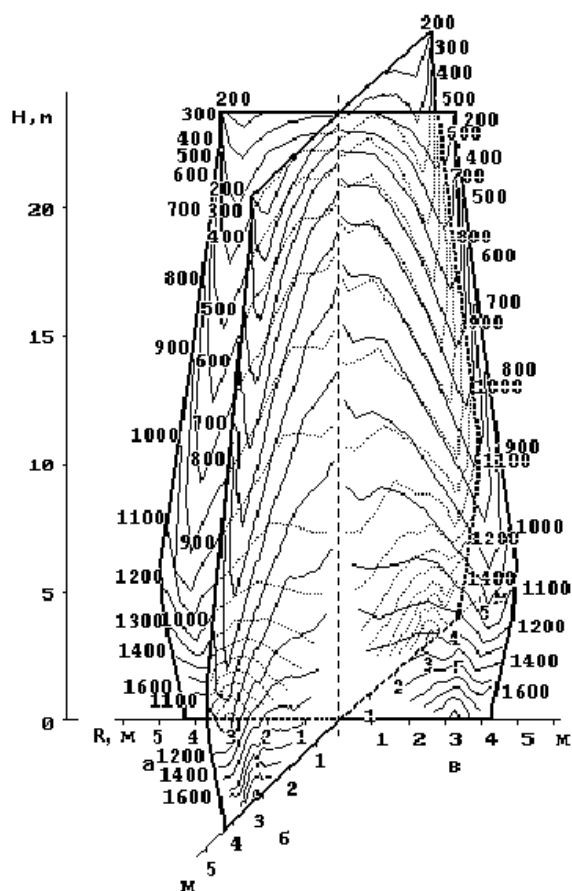


Рис. 11. Трехмерное температурное поле газа

приближении (т.е. в пренебрежении горизонтальными перетоками газа) возможно построение трехмерных температурных полей путем последовательного поворота расчетной плоскости относительно оси печи на угол 360° (количество фурм) (рис. 11). При этом с целью адаптации расчетов могут быть использованы показания периферийных термопар, расположенных под уровнем засыпи.

Разработанный комплекс двумерных математических моделей широко используется для развития теории и практики доменного производства, а также для решения практических задач доменной плавки (см., например, [28 – 43]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ведерников В.В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.: Госстройиздат, 1939.
2. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978.
3. Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.
4. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967.
7. Лаврик В.И., Савенков В.Н. Справочник по конформным отображениям. Киев: Наукова думка, 1970.
8. Цылев Л.М., Остроухов М.Я., Ходак Л.З. Процесс горения кокса в доменной печи. М.: Metallurgizdat, 1960.
9. Фиалков Б.С., Плицын В.Т. Кинетика движения и характер горения кокса в доменной печи. М.: Metallurgiya, 1971.
10. Радешток Ю., Ешар Е. Газодинамические условия в доменной печи // Черные металлы. 1970. № 22. 60–66.
11. Шюрман Э., Гуденау Х.В., Петерс К.-Х. Исследование пластичной зоны на доменной печи завода в Швельгерне // Черные металлы. 1982. № 6. 9–14.

12. *Бабарыкин Н.Н., Марсуверский Б.А., Новиков В.С. и др.* Свойства окатышей ССГОК и их поведение в доменной печи. Сообщение 2. // Производство чугуна. Вып. 4. Свердловск: Изд. УПИ, 1978. 66–79.
13. *Бабарыкин Н.Н., Колесниченко И.А.* Давление газа и шихты в доменной печи при работе на неофлюсованных окатышах // Производство чугуна. Вып. 14. Магнитогорск: Изд. МГМИ, 1975. 47–55.
14. *Morel S.* Wpływ temperatury gazów i siernistesu wsadu woznicowskiego przepływu w modelowym piecu szybowym // Zesz. nauk. P. Czest. 1970. № 59. 21–41.
15. *Китаев Б.И., Ярошенко Ю.Г., Суханов Е.Л. и др.* Теплотехника доменного процесса. М.: Металлургия, 1978.
16. *Пластилин Б.Г.* Исследование движения газов в доменных печах путем индикации дутья гелием // Комплексная переработка железных, марганцевых и хромитовых руд Казахстана. Алма-Ата: Наука, 1969. 80–87.
17. *Евдокименко А.И.* Физика шахтной плавки // Труды ГИНЦВЕТМЕТ. Вып. 2. М.: Металлургия, 1969. 16–30.
18. *Щербатский В.Б.* Исследование влияния неравномерности газораспределения на теплообмен в слое. Дис...канд. техн. наук. Свердловск, УПИ. 1972.
19. *Китаев Б.И., Ярошенко Ю.Г., Лазарев Б.Л.* Теплообмен в доменной печи. М.: Металлургия, 1966.
20. *Ходак Л.З., Борисов Ю.И.* О взаимосвязи процессов горения и плавления с движением шихтовых материалов в доменной печи // Подготовка железорудного сырья к металлургическому переделу. М.: Наука, 1973. 179–189.
21. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973.
22. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
23. *Wegstein J.* Acceleration convergence of iterative processes // Communications of the Ass. Comput. Mach. 1958. № 6. 9–13.
24. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
25. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
26. *Китаев Б.И., Тимофеев В.Н., Боковиков Б.А. и др.* Тепло- и массообмен в плотном слое. М.: Металлургия, 1972.
27. *Дмитриев А.Н.* Балансовая (равновесная) математическая модель // Математическое моделирование доменного процесса. Научные доклады Института металлургии УрО РАН, Екатеринбург, 1994.
28. *Дмитриев А.Н., Шаврин С.В.* Двумерная математическая модель доменного процесса // Сталь, 1996. № 12. 7–13.
29. *Дмитриев А.Н., Шаврин С.В.* Характер температурных и скоростных полей при вдувании газа-теплоносителя в шахту доменной печи // Изв. вузов. Черная металлургия. 1996. № 11. 87–88.
30. *Дмитриев А.Н., Шаврин С.В.* Влияние окружной неравномерности на характер температурных полей в доменной печи // Изв. вузов. Черная металлургия. 1997. № 1. 73.
31. *Дмитриев А.Н., Шаврин С.В.* Влияние неравномерности распределения угольной пыли по фурмам на характер температурных полей в доменной печи // Изв. вузов. Черная металлургия. 1997. № 5. 74–75.
32. *Дмитриев А.Н., Шаврин С.В.* Влияние содержания кислорода в дутье на характер температурных полей в доменной печи при вдувании угольной пыли // Изв. вузов. Черная металлургия. 1997. № 7. 81–82.
33. *Абрамов С.Д., Гаврилюк Г.Г., Дмитриев А.Н. и др.* Роль элементов конструкции доменной печи в формировании температурных полей и зон когезии // Черные металлы. 1997. № 10. 7–8.
34. *Дмитриев А.Н., Шаврин С.В.* Исследование температурных и скоростных полей с помощью двумерной математической модели при использовании новых технических решений // Сталь. 1998. № 5. 5–8.
35. *Дмитриев А.Н., Шаврин С.В.* Анализ аномальных явлений доменной плавки // Сталь. 1998. № 8. 13–16.
36. *Абрамов С.Д., Дмитриев А.Н., Леконцев Ю.А. и др.* Анализ и совершенствование доменного процесса с использованием математических моделей // Черные металлы. 1998. №№ 7, 8. 32–37.
37. *Шаврин В.С., Кудинов Д.З., Шведский В.С., Дмитриев А.Н. и др.* Моделирование загрузки и тепло-массообменные процессы в доменной печи // Теплофизика и информатика в металлургии: достижения и проблемы. Материалы Международной конференции, посвященной 300-летию металлургии Урала, 80-летию металлургического факультета и кафедры “Теплофизика и информатика в металлургии”. Екатеринбург: УГТУ, 2000. 166–171.
38. *Вусихис А.С., Дмитриев А.Н., Кудинов Д.З. и др.* Сравнительный анализ показателей доменной плавки с добавкой в шихту сидеритовых руд при различных вариантах их подготовки // Теплофизика и информатика в металлургии: достижения и проблемы. Материалы Международной конференции, посвященной 300-летию металлургии Урала, 80-летию металлургического факультета и кафедры “Теплофизика и информатика в металлургии”. Екатеринбург: УГТУ, 2000. 177–182.
39. *Дмитриев А.Н.* Роль моделирования в разработке и совершенствовании пирометаллургических процессов переработки комплексного сырья Урала // Теплофизика и информатика в металлургии: достижения и проблемы. Материалы Международной конференции, посвященной 300-летию металлургии Урала, 80-летию металлургического факультета и кафедры “Теплофизика и информатика в металлургии”. Екатеринбург: УГТУ, 2000. 182–186.
40. *Дмитриев А.Н., Кудинов Д.З., Ченцов А.В.* Использование математического моделирования при разработке и совершенствовании пирометаллургических процессов переработки комплексного сырья // Труды Всероссийской научно-практической конференции “Моделирование, программное обеспечение и наукоемкие технологии в металлургии”. Новокузнецк: СибГИУ, 2001. 152–159.

41. *Шаврин В.С., Дмитриев А.Н., Кудинов Д.З. и др.* Новые методы в анализах доменного процесса // Изв. вузов. Черная металлургия. 2003. № 1. 11–13.
42. *Дмитриев А.Н., Шаврин С.В.* Новые элементы в исследовании явлений доменной плавки // Материалы международной научно-технической конференции доменщиков, посвященной 70-летию КГТМК “Криворожсталь”. Кривой Рог, 2004. 246–250.
43. *Dmitriev A.N., Shavrin S.V.* Development of mathematical methods of the analysis and modelling of the phenomena in a blast furnace // Third International Conference on Mathematical Modeling and Computer Simulation of Material Technologies (MMT-2004). College of Judea and Samaria, Ariel, Israel. September 06–10, 2004. 24–33.

Поступила в редакцию
06.07.2004
