

Об одной безусловно устойчивой схеме класса КАБАРЕ для системы уравнений мелкой воды

А. В. Соловьев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики, лаборатория индустриальной математики,
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-9781-9527, e-mail: solovjev@cs.msu.ru

Д. Г. Асфандияров

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0009-0003-9869-8653, e-mail: dasfandiyarov@ibrae.ac.ru

Аннотация: В работе рассматривается новый подход к построению неявных безусловно устойчивых схем в рамках балансно-характеристической методики КАБАРЕ применительно к системе уравнений мелкой воды. Метод основан на идее инверсии координатных осей в явной схеме КАБАРЕ для преодоления ограничения на шаг по времени. Система уравнений является нелинейной, так как в уравнения включены минмаксные операции лимитирования на основе принципа максимума для локальных инвариантов Римана. Такое лимитирование существенно улучшает дисперсионные свойства схемы. Нелинейная система уравнений решается методом бегущего счета. В работе представлен вывод схемы для числа Куранта–Фридрихса–Леви $CFL \leq 1$ и $CFL > 1$. Приведены тестовые расчеты на примерах простейшего уравнения переноса и одномерных задачах мелкой воды для дозвукового случая. Сделаны выводы о влиянии нелинейной коррекции потоков на решение для данной схемы.

Ключевые слова: неявная схема КАБАРЕ, балансно-характеристический метод, уравнение переноса, уравнения мелкой воды.

Благодарности: Авторы выражают глубокую признательность Василию Михайловичу Головизнину, автору идеи инверсии координатных осей в схеме КАБАРЕ для преодоления ограничения на шаг по времени. Его оптимизм и настойчивость позволили получить описанные результаты.

Для цитирования: Соловьев А.В., Асфандияров Д.Г. Об одной безусловно устойчивой схеме класса КАБАРЕ для системы уравнений мелкой воды // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 1. 64–77. doi 10.26089/NumMet.v25r106.



One unconditionally stable CABARET class scheme for shallow water equations

Andrey V. Solovjev

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Laboratory of Industrial Mathematics, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0002-9781-9527, e-mail: solovjev@cs.msu.ru

Danil G. Asfandiyarov

Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ORCID: 0009-0003-9869-8653, e-mail: dasfandiyarov@ibrae.ac.ru

Abstract: The paper considers a new approach to the construction of implicit unconditionally stable schemes within the framework of the CABARET balance-characteristic technique in relation to the system of shallow water equations. The method is based on the idea of inverting coordinate axes in the CABARET scheme to overcome the time step limitation. The system of equations is nonlinear, since the equations include minmax limiting operations based on the maximum principle for local Riemann invariants. This limitation significantly improves the dispersion properties of the numerical scheme. The nonlinear system of equations is solved using the marching order method. The paper presents the derivation of the numerical scheme for the Courant–Friedrichs–Lewy number $CFL \leq 1$ and $CFL > 1$. Test calculations are presented on the simplest transport equation and one-dimensional shallow water problems for the subsonic case. Conclusions are drawn about the influence of nonlinear flux correction on the solution.

Keywords: implicit CABARET scheme, balance-characteristic method, transport equation, shallow water equations.

Acknowledgements: The authors express deep gratitude to Vasily Mikhailovich Goloviznin, the author of the idea of inverting coordinate axes in the CABARET scheme to overcome the limitation on the time step. His optimism and perseverance allowed us to obtain the results described.

For citation: A. V. Solovjev, D. G. Asfandiyarov, “One unconditionally stable CABARET class scheme for shallow water equations,” *Numerical Methods and Programming*. 25 (1), 64–77 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r106.

1. Введение. В вычислительной гидродинамике нелинейность основных уравнений в сочетании с большим количеством расчетных ячеек (и, следовательно, неизвестных) в сложных задачах требует привлечения больших вычислительных ресурсов. Это определяет интерес к разработке эффективных численных методов. Численные схемы, используемые для решения нестационарных задач, можно разделить на две группы: явные и неявные. В явных схемах решение для нового временного слоя в каждой расчетной ячейке рассчитывается на основе известных значений системы в текущий момент времени. Явные схемы являются условно устойчивыми, а величина допустимого шага интегрирования по времени зависит от размеров расчетных ячеек и скорости распространения возмущений. В настоящее время явные схемы являются основным инструментом решения систем гиперболических уравнений [1, 2].

Неявные разностные схемы так же содержат уравнения, описывающие зависимость решения на новом временном слое от решения на текущем (возможно, и более ранних) слое времени. Однако система уравнений для неявных схем не распадается на отдельные решаемые уравнения, что порождает сложности с их алгоритмической разрешимостью [3, 4]. Неявные схемы преобразуются к системе из N линейных или нелинейных алгебраических уравнений для N неизвестных, которые необходимо решать совместно.

Неявные схемы могут быть устойчивыми или неустойчивыми, и это не всегда связано с величиной шага по времени [5]. Однако только среди неявных схем встречаются абсолютно устойчивые, т.е. устойчивые при любом шаге по времени, хотя при использовании больших временных шагов они могут быть менее точными, чем явные схемы. Кроме того, неявность может приводить к дополнительной аппроксимационной вязкости [3].

Наряду с явными методами, неявные методы также используются для численного решения систем уравнений в частных производных гиперболического типа [3, 4]. В литературе имеется ряд работ по применению неявных численных методов для решения уравнений теории мелкой воды как в одномерном, так и двумерном случаях. Достаточно полный обзор таких работ представлен в [6]. Основной мотивацией в этих работах является повышение вычислительной эффективности — компромисс между численной устойчивостью и точностью применяемых методов.

В данной работе рассматривается новый подход к построению неявных безусловно устойчивых схем в рамках методике КАБАРЕ применительно к системе уравнений мелкой воды. За основу взята явная балансно-характеристическая схема КАБАРЕ [7]. Ее отличительные особенности связаны с тем, что вместо интерполяции в ней используется процедура экстраполяции при вычислении потоков. Это приводит к ее обратимости по времени и, как следствие, к бездиссипативности до применения процедуры коррекции потоков. Вопрос о неявных безусловно устойчивых схемах типа КАБАРЕ впервые был рассмотрен в работе [3]. В статье было предложено однопараметрическое семейство разностных схем для простейшего уравнения переноса, включающее в себя как известную ранее явную схему КАБАРЕ, так и множество неявных безусловно устойчивых схем. Исследовались их диссипативные и дисперсионные характеристики. На примере одномерных нестационарных уравнений мелкой воды было показано, как эти неявные схемы КАБАРЕ обобщаются на случай квазилинейных систем законов сохранения гиперболического типа.

В отличие от семейства неявных схем КАБАРЕ, представленных в работе [3], новая схема основана на идее инверсии координатных осей в явной схеме КАБАРЕ для преодоления ограничения на шаг по времени, а нелинейная система уравнений решается методом бегущего счета. Описываемая схема не является однородной. В работе представлен вывод схемы для числа Куранта–Фридрихса–Леви $CFL \leq 1$ и $CFL > 1$. Приводятся тестовые расчеты на простейшем уравнении переноса и одномерных задачах мелкой воды для дозвукового случая. Делаются выводы о влиянии нелинейной коррекции потоков для данной схемы.

2. Общий вид разностной схемы для уравнений мелкой воды. Рассмотрим систему одномерных консервативных уравнений мелкой воды над ровным дном

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\Phi = \{h, u\}$, $F = \{hu, hu^2 + gh^2/2\}$, $h(x, t) > 0$ — глубина воды, $u(x, t)$ — скорость течения, $g = const > 0$ — ускорение свободного падения.

В расчетной области $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ построим неравномерную сетку из N ячеек. Ячейки будем обозначать полуцелыми индексами, а узлы — целыми: $x_{i+1} = x_i + \Delta x_{i+1/2}$, $i \in \{0, 1, \dots, N\}$, $x_0 = x_{\min}$, $x_{N+1} = x_{\max}$. Аналогично, расчетный отрезок времени $0 \leq t \leq t_{\max}$ разобьем на, возможно неравные, слои возрастающей последовательностью $t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1/2}$, $n \in \{0, 1, \dots, M\}$, $t_0 = 0$, $t_{M+1} = t_{\max}$.

На построенной сетке рассмотрим два набора переменных. Переменные одного из них будем относить к узлам пространственной сетки и обозначать целым нижним индексом, переменные из другого набора — к серединам ячеек пространственной сетки, обозначая такие переменные полуцелым нижним индексом. Например, h_i^n относится к узлам пространственной сетки, а $h_{i+1/2}^n$ — к серединам ее ячеек. Верхний индекс в обоих случаях обозначает временной слой. Относящиеся к ячейке переменные будем считать консервативными, к ним будут применимы разностные аналоги интегральных законов сохранения. Переменные, относящиеся к узлам, будем называть потоковыми.

Для уравнений (1) в некоторой ячейке $C_{i+1/2}$ выпишем балансные соотношения:

$$\frac{\Phi_{i+1/2}^{n+1} - \Phi_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{F_{i+1}^{n+1/2} - F_i^{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0. \tag{2}$$

Эти соотношения определяют эволюцию консервативных переменных при условии, что известны потоки в узлах в промежуточный момент времени.

Для вычисления потоковых переменных в конечно-объемных схемах можно использовать различные способы [1]. В данной работе для этого будет использована методика КАБАРЕ [2, 7]. В соответствии с этой методикой система уравнений (1) должна быть преобразована к системе уравнений переноса вида

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial I_k}{\partial x} = q_k, \quad k \in \{1, 2\}, \tag{3}$$



где I_k — локальные инварианты Римана, λ_k — характеристическая скорость. Причем

$$I_k = I_k(h, u), \quad k \in \{1, 2\}. \quad (4)$$

Вычисление потоковых переменных в узлах сетки теперь сводится к численному решению уравнений (3) в узлах сетки и переходу от инвариантов к физическим переменным с помощью уравнений (4).

Продemonстрируем эту методику для системы уравнений мелкой воды (1). Преобразуем эту систему в характеристическую форму (3). Очевидными преобразованиями система (1) может быть преобразована к так называемой простой форме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + A \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A можно найти, решив квадратное уравнение $|A - E\lambda| = 0$, где E — единичная диагональная матрица:

$$\lambda_{1,2} = u \pm c, \quad c = \sqrt{gh}. \quad (6)$$

Найдем теперь левые собственные векторы матрицы A :

$$l_1 = (l_1^1, 1), \quad (l_1^1, 1) \begin{pmatrix} -c & h \\ g & -c \end{pmatrix} = (-c \cdot l_1^1 + g, h \cdot l_1^1 - c) = 0, \quad l_1^1 = \frac{c}{h} = \frac{\sqrt{gh}}{h} = \frac{g}{\sqrt{gh}} = \frac{g}{c}, \quad (7)$$

$$l_2 = (l_2^1, 1), \quad (l_2^1, 1) \begin{pmatrix} c & h \\ g & c \end{pmatrix} = (c \cdot l_2^1 + g, h \cdot l_2^1 + c) = 0, \quad l_2^1 = -\frac{c}{h} = -\frac{g}{c}. \quad (8)$$

Из левых собственных векторов (7) и (8) можно составить матрицу

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{c}{h} & 1 \\ -\frac{c}{h} & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим уравнение (5) на эту матрицу слева. Поскольку

$$\Omega \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{c}{h} & 1 \\ -\frac{c}{h} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{h}u + g & c + u \\ -\frac{c}{h}u + g & -c + u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{h}(u + c) & u + c \\ -\frac{c}{h}(u - c) & u - c \end{pmatrix},$$

получим следующую систему уравнений, которую будем называть характеристической:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \right] + (u + c) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right] &= 0, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \right] + (u - c) \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражения в квадратных скобках можно записать как производные от некоторых выражений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \pm \frac{g}{c} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \pm \frac{g}{\sqrt{gh}} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \pm 2 \frac{\partial \sqrt{gh}}{\partial t}.$$

Теперь, обозначая

$$R = u + 2c, \quad Q = u - 2c, \quad (10)$$

представим характеристическую систему (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial R}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Система уравнений (11) является характеристической формой системы (1), а выражения (10) — инвариантами.

3. Решение уравнений переноса в схемах КАБАРЕ. В этом разделе кратко будут изложены подходы к решению линейных уравнений переноса (11), применяемые в схемах КАБАРЕ, и вычисление потоковых переменных в узлах сетки. Подробное изложение методов вычисления потоковых переменных для различных систем уравнений можно найти в [2].

Рассмотрим первое уравнение (11)

$$\frac{\partial R}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

и предположим, что течение дозвуковое. Тогда $|u| < c$ и, следовательно, характеристическая скорость $\lambda_R = u + c$ положительна. Предположим, что в ячейке $C_{i-1/2}$ известны значения R_{i-1}^n и $R_{i-1/2}^{n+1/2}$. Тогда значение инварианта R на новом временном слое вычисляется по экстраполяционной формуле

$$R_i^{n+1} = 2R_{i-1/2}^{n+1/2} - R_{i-1}^n. \tag{12}$$

Для второго уравнения (11) ситуация аналогична. Из предположения $|u| < c$ следует $\lambda_Q = u - c < 0$, и поэтому инвариант Q переносится справа налево:

$$Q_i^{n+1} = 2Q_{i+1/2}^{n+1/2} - Q_{i+1}^n. \tag{13}$$

Рис. 1 иллюстрирует процесс экстраполяции инвариантов. Закрашенными кружками обозначаются известные переменные, пустым — вычисляемые.

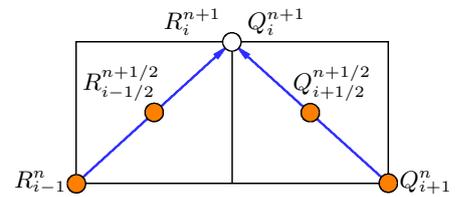


Рис. 1. Перенос инвариантов

Fig. 1. Invariants transfer

После вычисления инвариантов по формулам (12) и (13) необходимо провести их коррекцию, основанную на принципе максимума [8]. Затем следует применить формулы (10) и (6) для вычисления потоковых значений в узле:

$$u_i^{n+1} = \frac{R_i^{n+1} + Q_i^{n+1}}{2}, \quad c_i^{n+1} = \frac{R_i^{n+1} - Q_i^{n+1}}{4}, \quad h_i^{n+1} = \frac{(c_i^{n+1})^2}{g}. \tag{14}$$

Алгоритм вычисления инвариантов на промежуточном слое $t_{n+1/2}$ и алгоритм коррекции будут описаны в следующих разделах.

Как следует из изложенного, для дозвуковых течений перенос инварианта R всегда осуществляется слева направо, а инварианта Q — справа налево. Рассмотрим более подробно процедуру переноса и коррекции инварианта R . Отдельно рассмотрим два случая:

$$\text{CFL} = \frac{\lambda_{i-1/2}^{n+1/2} \tau_{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} \leq 1, \quad \lambda = u + c \tag{15}$$

и

$$\text{CFL} = \frac{\lambda_{i-1/2}^{n+1/2} \tau_{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} > 1.$$

Первое условие соответствует критерию Куранта–Фридрихса–Леви устойчивости разностных схем для гиперболических уравнений. При выполнении второго условия такие схемы неустойчивы.

4. Явная схема для уравнения переноса. В этом разделе будет кратко описана явная разностная схема КАБАРЕ для скалярного уравнения переноса

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \lambda \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \lambda > 0. \tag{16}$$

Эта схема была неоднократно описана, например в [2], поэтому ниже будут приведены только основные соотношения.

Характеристический этап разностной схемы КАБАРЕ для уравнения (16) состоит из двух фаз. На первой фазе вычисляется консервативное значение на промежуточном временном слое из соотношения

$$\frac{R_{i-1/2}^{n+1/2} - R_{i-1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \lambda_{i-1/2}^n \frac{R_i^n - R_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1/2}} = 0. \tag{17}$$



На второй фазе производится экстраполяция

$$\tilde{R}_i^{n+1} = 2R_{i-1/2}^{n+1/2} - R_{i-1}^n \quad (18)$$

и лимитирование (коррекция)

$$R_i^{n+1} = \min \left(R_{\max}, \max \left(R_{\min}, \tilde{R}_i^{n+1} \right) \right), \quad (19)$$

где

$$R_{\min} = \min \left(R_{i-1}^n, R_{i-1/2}^n, R_i^n \right), \quad R_{\max} = \max \left(R_{i-1}^n, R_{i-1/2}^n, R_i^n \right). \quad (20)$$

Вместо (20) можно использовать более жесткие ограничения

$$R_{\min} = \min \left(R_{i-1}^n, R_i^n \right), \quad R_{\max} = \max \left(R_{i-1}^n, R_i^n \right). \quad (21)$$

Балансный этап схемы КАБАРЕ для уравнения (16) имеет следующий вид:

$$\frac{R_{i-1/2}^{n+1} - R_{i-1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{1}{2} \left[\lambda_{i-1/2}^n \frac{R_i^n - R_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1/2}} + \lambda_{i-1/2}^{n+1} \frac{R_i^{n+1} - R_{i-1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} \right] = 0, \quad (22)$$

или, с учетом соотношения (17),

$$\frac{R_{i-1/2}^{n+1} - R_{i-1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \lambda_{i-1/2}^{n+1} \frac{R_i^{n+1} - R_{i-1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} = 0. \quad (23)$$

Схема (17)–(22) устойчива для $CFL \leq 1$. На рис. 2 показаны схемы характеристического и балансного этапов явной схемы КАБАРЕ.

5. Неявная схема для уравнения переноса. Раньше уже предпринимались попытки преодолеть ограничение $CFL \leq 1$ для явной схемы КАБАРЕ [3] в рамках традиционного подхода к построению неявных разностных схем, который сводится к записи разностных соотношений в виде системы линейных уравнений. В этом случае решение тем или иным способом этой системы обеспечивает вычисление значений сеточных переменных на новом временном слое. В то же время неотъемлемой составной частью метода КАБАРЕ является коррекция потоковых переменных, обеспечивающая улучшенные дисперсионные свойства схемы. Ниже описан подход, позволяющий использовать такую коррекцию для случаев $CFL > 1$.

Основная идея построения разностной схемы класса КАБАРЕ для $CFL > 1$ заключается в следующем. Перепишем уравнение переноса (16) в следующем виде:

$$\frac{\partial R}{\partial x} + \gamma \frac{\partial R}{\partial t} = 0, \quad \gamma = \frac{1}{\lambda} > 0. \quad (24)$$

Уравнение (24) по-прежнему является гиперболическим уравнением переноса, которое с точностью до обозначения координатных переменных совпадает с уравнением (16). Если ось Ox рассматривать как ось времени, а Ot — как координатную, то для такого уравнения можно повторить технику построения явной разностной схемы, приведенную в предыдущем разделе.

Характеристический этап для уравнения (24) будет иметь вид, состоящий из двух фаз. На первой фазе вычисляется значение в центре пространственно-временной ячейки из соотношения

$$\frac{R_{i-1/2}^{n+1/2} - R_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x_{i-1/2}/2} + \gamma_{i-1}^{n+1/2} \frac{R_{i-1}^{n+1} - R_{i-1}^n}{\tau_{n+1/2}} = 0. \quad (25)$$

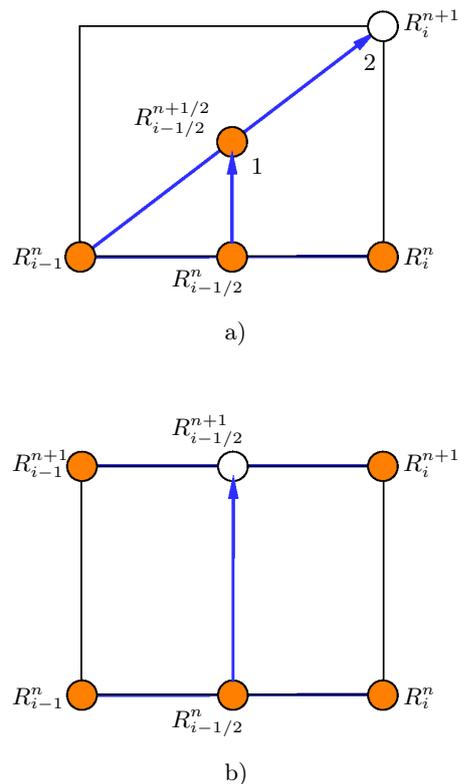


Рис. 2. Явная схема КАБАРЕ: а) характеристический этап; б) балансный этап

Fig. 2. Explicit CABARET scheme: а) characteristic stage; б) balance stage

На второй фазе производится экстраполяция

$$\tilde{R}_i^{n+1} = 2R_{i-1/2}^{n+1/2} - R_{i-1}^n. \quad (26)$$

Лимитирование производится следующим образом:

$$R_i^{n+1} = \min \left(R_{\max}, \max \left(R_{\min}, \tilde{R}_i^{n+1} \right) \right), \quad (27)$$

где

$$R_{\min} = \min \left(R_{i-1}^n, R_{i-1}^{n+1/2}, R_{i-1}^{n+1} \right), \quad R_{\max} = \max \left(R_{i-1}^n, R_{i-1}^{n+1/2}, R_{i-1}^{n+1} \right). \quad (28)$$

Вместо (28) можно использовать более жесткие ограничения

$$R_{\min} = \min \left(R_{i-1}^n, R_{i-1}^{n+1} \right), \quad R_{\max} = \max \left(R_{i-1}^n, R_{i-1}^{n+1} \right). \quad (29)$$

Балансный этап схемы КАБАРЕ для уравнения (24) имеет следующий вид:

$$\frac{R_i^{n+1/2} - R_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x_{i-1/2}} + \frac{1}{2} \left[\gamma_{i-1}^{n+1/2} \frac{R_{i-1}^{n+1} - R_{i-1}^n}{\tau_{n+1/2}} + \gamma_i^{n+1/2} \frac{R_i^{n+1} - R_i^n}{\tau_{n+1/2}} \right] = 0, \quad (30)$$

или, с учетом соотношения (25),

$$\frac{R_i^{n+1/2} - R_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x_{i-1/2}/2} + \gamma_i^{n+1/2} \frac{R_i^{n+1} - R_i^n}{\tau_{n+1/2}} = 0. \quad (31)$$

Графически описанная схема вычислений проиллюстрирована на рис. 3.

Несложно заметить, что для разностной схемы (25)–(30) справедливо соотношение

$$\text{CFL}^{(2)} = \frac{\gamma_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot \Delta x_{i-1/2}}{\tau_{n+1/2}} = \frac{\Delta x_{i-1/2}}{\lambda_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot \tau_{n+1/2}} = \frac{1}{\text{CFL}^{(1)}} < 1,$$

где $\text{CFL}^{(1)}$ — критерий Куранта–Фридрихса–Леви для явной схемы (17)–(22). Таким образом, схема (25)–(30) оказывается устойчивой при

$$1 < \frac{\lambda_{i-1/2}^{n+1/2} \tau_{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} < \infty. \quad (32)$$

6. Характеристический этап разностной схемы для уравнений мелкой воды. Как уже отмечалось выше, характеристический этап разностных схем класса КАБАРЕ служит для вычисления потоковых переменных в узлах сетки на основе решения уравнения переноса для локальных инвариантов Римана. Также выше были рассмотрены два алгоритма переноса инвариантов как для $\text{CFL} \leq 1$, так и для $1 < \text{CFL} < \infty$. В случае дозвуковых течений, которыми мы ограничились, характеристический этап разностной схемы для уравнений мелкой воды будет выглядеть следующим образом.

Предположим, что на момент времени $t = t_n$ нам известны все консервативные и потоковые значения. Кроме того, пусть на левой границе расчетной области $x = x_{\min}$ заданы значения переменных, позволяющие вычислить инвариант $R = u + c$ для $t = t_{n+1/2}$ и $t = t_{n+1}$.

Рассмотрим теперь некоторую ячейку $C_{i-1/2}$, для которой известны пять значений инварианта R на левой и нижней гранях пространственно-временной ячейки (рис. 4):

$$R_{i-1}^n, \quad R_{i-1}^{n+1/2}, \quad R_{i-1}^{n+1}, \quad R_{i-1/2}^n, \quad R_i^n. \quad (33)$$

Заметим, что эти значения известны для самой левой ячейки. Ниже будет описан алгоритм, позволяющий по значениям (33) вычислить значения $R_i^{n+1/2}, R_i^{n+1}$ на правой грани пространственно-временной ячейки.

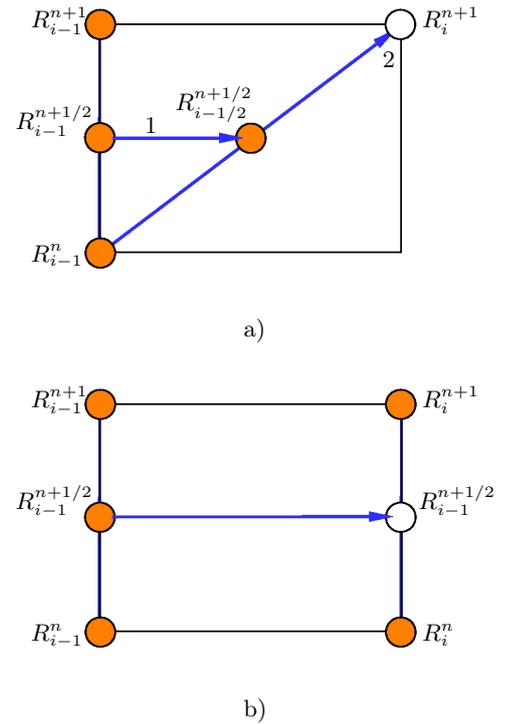


Рис. 3. Неявная схема КАБАРЕ:
 а) характеристический этап;
 б) балансный этап

Fig. 3. Implicit CABARET scheme:
 а) characteristic stage;
 б) balance stage



Предположим, что из некоторых соображений задан “разумный” шаг по времени $\tau_{n+1/2}$. Оценим число Куранта–Фридрихса–Леви в ячейке $C_{i-1/2}$ следующим образом:

$$\text{CFL}_{i-1/2}^{(R)} = \frac{(u+c)_{i-1/2}^n \cdot \tau_{n+1/2}}{\Delta x_{i-1/2}}. \quad (34)$$

В случае если $\text{CFL}_{i-1/2}^{(R)} \leq 1$, в этой ячейке следует применить явную схему (17)–(21) без балансного этапа (22). Вместо него в алгоритм добавляется соотношение (31) для вычисления значения $R_i^{n+1/2}$. Схема вычислений графически приведена на рис. 5 а. В случае если $\text{CFL}_{i-1/2}^{(R)} > 1$, для вычисления двух значений на правой грани пространственно-временной ячейки применяются соотношения (25)–(31) (рис. 5 б).

Итак, выше показано, каким образом, применяя бегущий счет слева направо, можно вычислить значения инварианта R во всех узлах сетки для временного слоя $t = t_{n+1}$. Полностью аналогично бегущим счетом справа налево можно вычислить во всех узлах и значения инварианта Q . После этого соотношения (14) позволяют вычислить все потоковые переменные как на промежуточном, так и на новом временном слое.

7. Балансный этап разностной схемы для уравнений мелкой воды. Характеристический этап, описанный выше, позволяет вычислить значения потоковых переменных во всех узлах сетки для временного слоя $t = t_{n+1}$. Теперь может быть выполнен балансный этап (2) схемы, на котором будут рассчитаны новые консервативные переменные в серединах ячеек:

$$\frac{h_{i+1/2}^{n+1} - h_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(F_1)_{i+1}^{n+1/2} - (F_1)_i^{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{(hu)_{i+1/2}^{n+1} - (hu)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(F_2)_{i+1}^{n+1/2} - (F_2)_i^{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0,$$

где

$$F_1 = hu, \quad F_2 = hu^2 + \frac{g}{2}h^2. \quad (36)$$

В свою очередь, рассчитанные значения переменных $h_{i+1/2}^{n+1}$ и $u_{i+1/2}^{n+1}$ позволяют вычислить инварианты $R_{i+1/2}^{n+1}$ и $Q_{i+1/2}^{n+1}$ (10) на новом временном слое.

8. Вычисление шага по времени. Несмотря на то что описанная выше разностная схема является безусловно устойчивой, с увеличением шага по времени происходит снижение точности результата. Поэтому целесообразно ограничиться некоторым предельным значением CFL и использовать шаг

$$\tau = \text{CFL} \cdot \min_i \left(\frac{\Delta x_{i+1/2}}{(|u|+c)_{i+1/2}^n} \right).$$

9. Тестовые расчеты. В данном разделе приведены тестовые расчеты, иллюстрирующие свойства описанной выше схемы. Так как безусловная устойчивость схемы достигается за счет модификации схемы решения уравнения переноса, применяемой к инвариантам Римана, то, во-первых, будет продемонстрирован ряд расчетов по переносу гладкого и разрывного профилей в широком диапазоне чисел Куранта–Фридрихса–Леви.

Во-вторых, на примере решения уравнения переноса будет продемонстрирована важность процедуры коррекции потоков в схемах класса КАБАРЕ для улучшения их дисперсионных свойств.

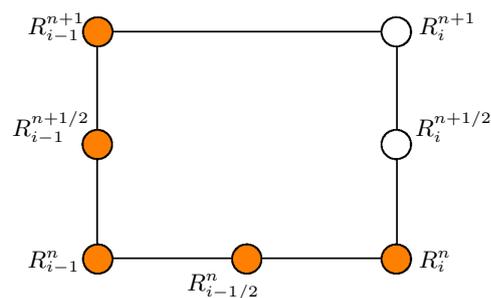


Рис. 4. Известные (закрашенные кружки) и вычисляемые (пустые кружки) переменные

Fig. 4. Known (filled circles) and calculated (open circles) variables

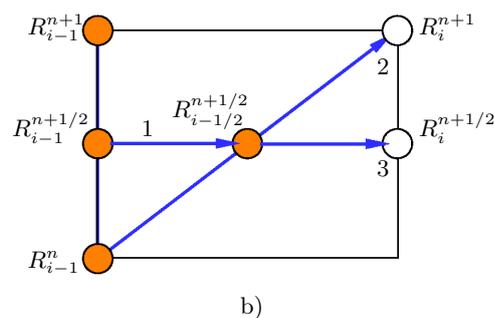
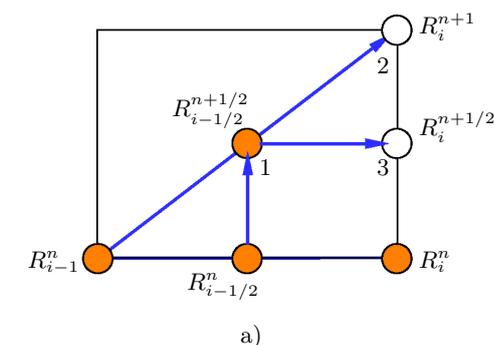


Рис. 5. Схема вычислений: а) $\text{CFL} \leq 1$; б) $\text{CFL} > 1$

Fig. 5. Calculation scheme: а) $\text{CFL} \leq 1$; б) $\text{CFL} > 1$

В заключение будет продемонстрировано решение нескольких задач для системы уравнений мелкой воды.

9.1. Решение скалярного уравнения переноса. Схема с лимитированием. Рассматривается задача численного решения скалярного уравнения переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const} > 0, \quad (37)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x). \quad (38)$$

Задача решалась на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ на сетке из 450 ячеек для скорости переноса $c = 1$. Граничные условия — периодические. Используются две функции начальных возмущений — гауссиан

$$\varphi_0(x) = 1 + \exp\left(-\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2\right), \quad a = 0.04, \quad x_0 = -0.5 \quad (39)$$

и прямоугольник

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-0.7, -0.3], \\ 1, & x \notin [-0.7, -0.3]. \end{cases} \quad (40)$$

На рис. 6 приведено решение при разных числах Куранта для момента времени $t = 1$. Начальное возмущение распространилось на расстояние $\Delta x = 1$ за интервал времени $\Delta t = 1$.

Значение STEP, указанное на рис. 6–10, соответствует количеству сделанных расчетных шагов по времени.

Из приведенных графиков (рис. 6), иллюстрирующих выполненные расчеты, видно, что лимитирование (21) и (29) удовлетворительно монотонизируют решение за исключением переноса разрывного решения для $1 < CFL < 2$.

9.2. Решение скалярного уравнения переноса. Схема без лимитирования. Лимитирование (21) и (29), выполняемое в каждой ячейке в процессе бегущего счета, имеет важную роль. Если исключить лимитирование, то система уравнений для значений в узлах на новом временном слое станет линейной и ее можно решить любым соответствующим методом. На рис. 7 показано несколько таких решений для задачи (37)–(40).

9.3. Примеры решения уравнений мелкой воды. В данном разделе продемонстрировано несколько решений системы уравнений мелкой воды (1) на примере классических задач Римана [1].

Задача 1. Левый скачок и правая волна Римана

$$\begin{cases} h(x, 0) = 1, & u(x, 0) = 0, & x < 0, \\ h(x, 0) = 1.4, & u(x, 0) = 0, & x > 0. \end{cases}$$

Задача 2. Две волны Римана

$$\begin{cases} h(x, 0) = 1, & u(x, 0) = -0.4, & x < 0, \\ h(x, 0) = 1, & u(x, 0) = 0.4, & x > 0. \end{cases}$$

Задача 3. Два скачка

$$\begin{cases} h(x, 0) = 1, & u(x, 0) = 0.4, & x < 0, \\ h(x, 0) = 1, & u(x, 0) = -0.4, & x > 0. \end{cases}$$

На рис. 8–10 приведено численное решение этих задач с помощью описанной выше схемы для $CFL = 6$ и $CFL = 30$ на сетке из 500 ячеек, расчетная область $x \in [-150, 150]$. Решения представлены для глубины h и скорости потока u . Для сравнения эта же задача была решена по явной схеме КАБАРЕ для $CFL = 0.3$. Решение по явной схеме используется как референсное, так как точное решение визуально неотлично от него. Для получения решения по явной схеме потребовалось выполнить в 100 раз больше шагов по времени по сравнению с расчетом по неявной схеме для $CFL = 30$. Результаты расчета при разных числах Куранта–Фридрихса–Леви представлены на ближайшие моменты времени.

10. Заключение. В данной работе описана новая разностная схема класса КАБАРЕ, устойчивая при всех числах Куранта–Фридрихса–Леви. Основным свойством этой схемы является нелинейность системы уравнений, которая решается методом бегущего счета. Тестовые расчеты показывают, что схема позволяет воспроизводить решения для широкого диапазона чисел Куранта–Фридрихса–Леви. Нерешенными пока остаются несколько принципиальных вопросов. Так, например, не решен вопрос с включением

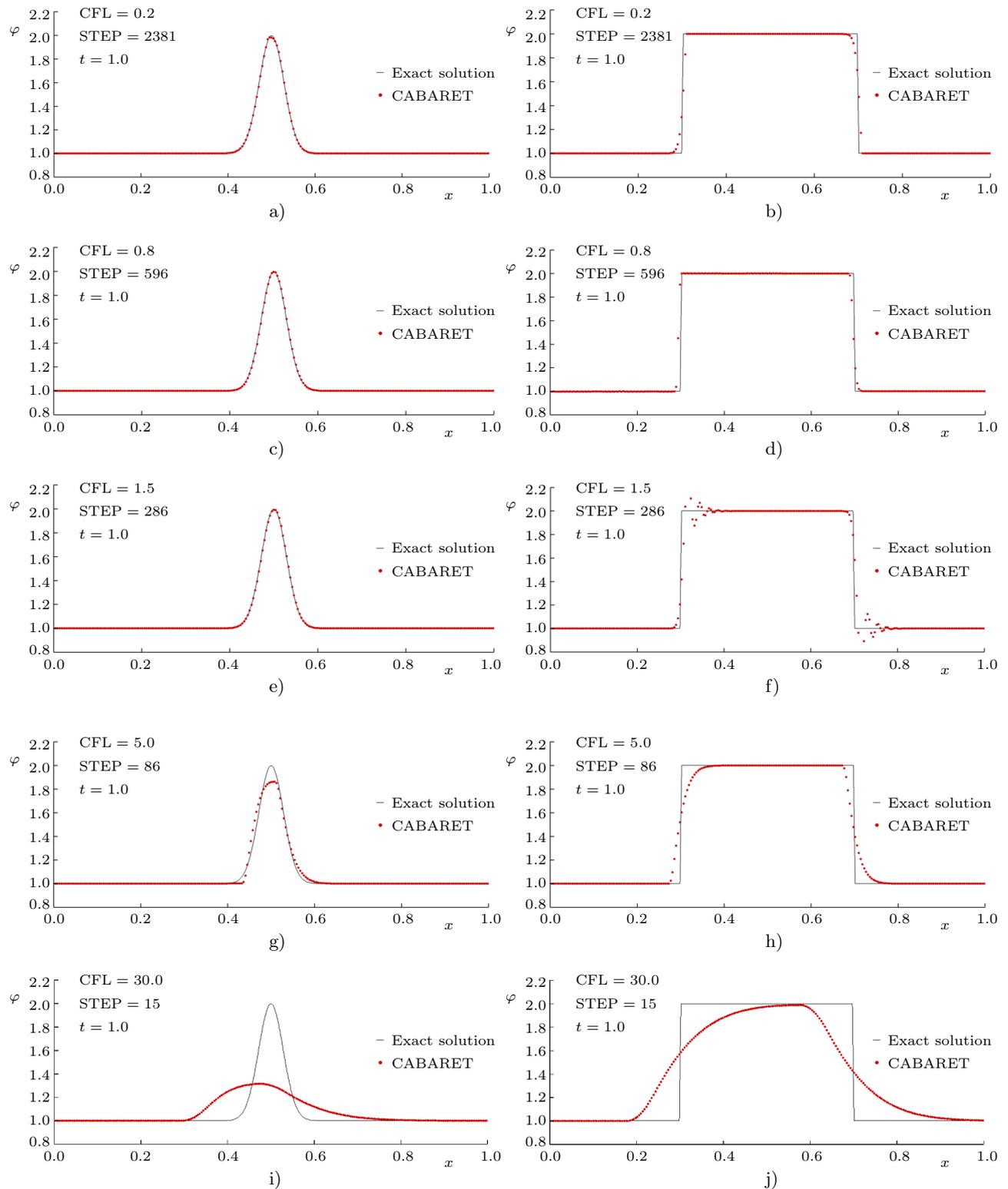


Рис. 6. Решения уравнения переноса с лимитированием потоков для возмущений, имеющих форму гауссиана и прямоугольника: а), б) CFL = 0.2; в), д) CFL = 0.8; е), ф) CFL = 1.5; г), х) CFL = 5; и), ж) CFL = 30

Fig. 6. Solutions of the transport equation with flux limitation for disturbances having the shape of a Gaussian and a rectangle: а), б) CFL = 0.2; в), д) CFL = 0.8; е), ф) CFL = 1.5; г), х) CFL = 5; и), ж) CFL = 30

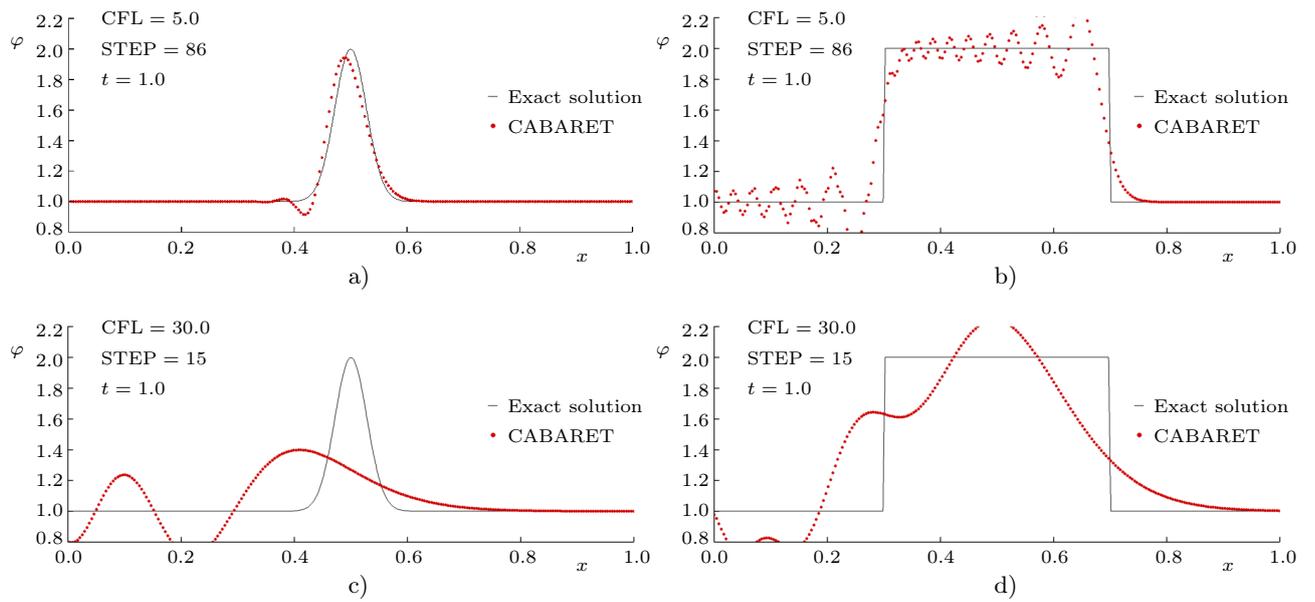


Рис. 7. Решения уравнения переноса без лимитирования потоков для возмущений, имеющих форму гауссиана и прямоугольника: а), б) CFL = 5; с), д) CFL = 30

Fig. 7. Solutions of the transport equation without limiting fluxes for disturbances having the shape of a Gaussian and a rectangle: а), б) CFL = 5; с), д) CFL = 30

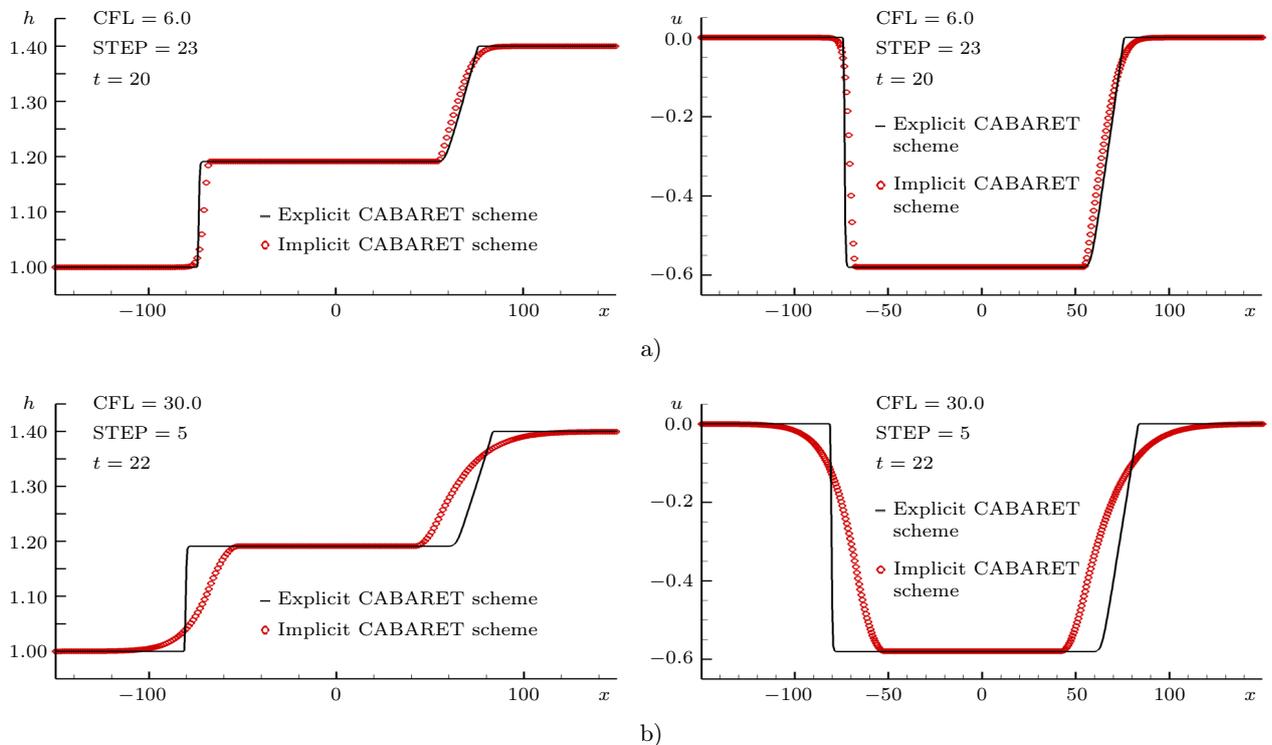


Рис. 8. Левый скачок и правая волна Римана. Решения для глубины h и скорости u , полученные по явной и неявной схемам КАБАРЕ: а) CFL = 6; б) CFL = 30

Fig. 8. Left shock and right Riemann wave. Solutions for depth h and velocity u obtained using explicit and implicit CABARET schemes: а) CFL = 6; б) CFL = 30

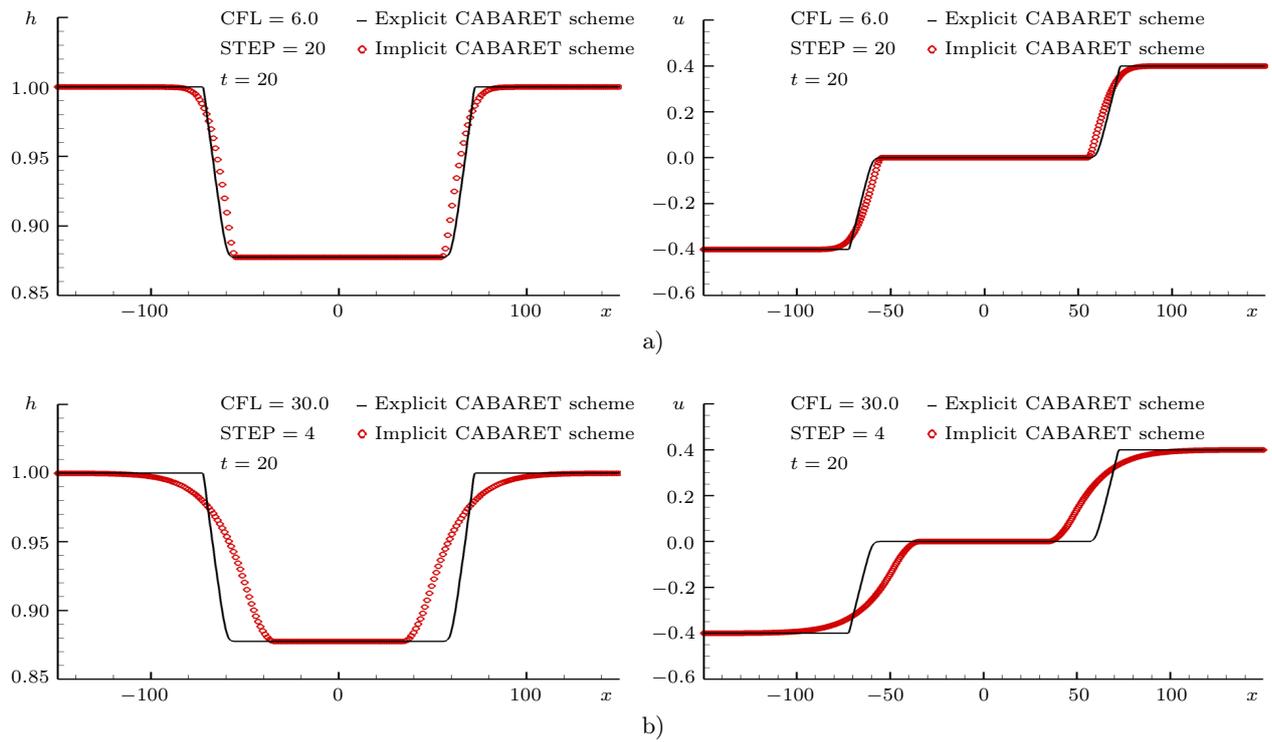


Рис. 9. Две волны Римана. Решения для глубины h и скорости u , полученные по явной и неявной схемам КАБАРЕ: а) CFL = 6; б) CFL = 30

Fig. 9. Two Riemann waves. Solutions for depth h and velocity u obtained using explicit and implicit CABARET schemes: а) CFL = 6; б) CFL = 30

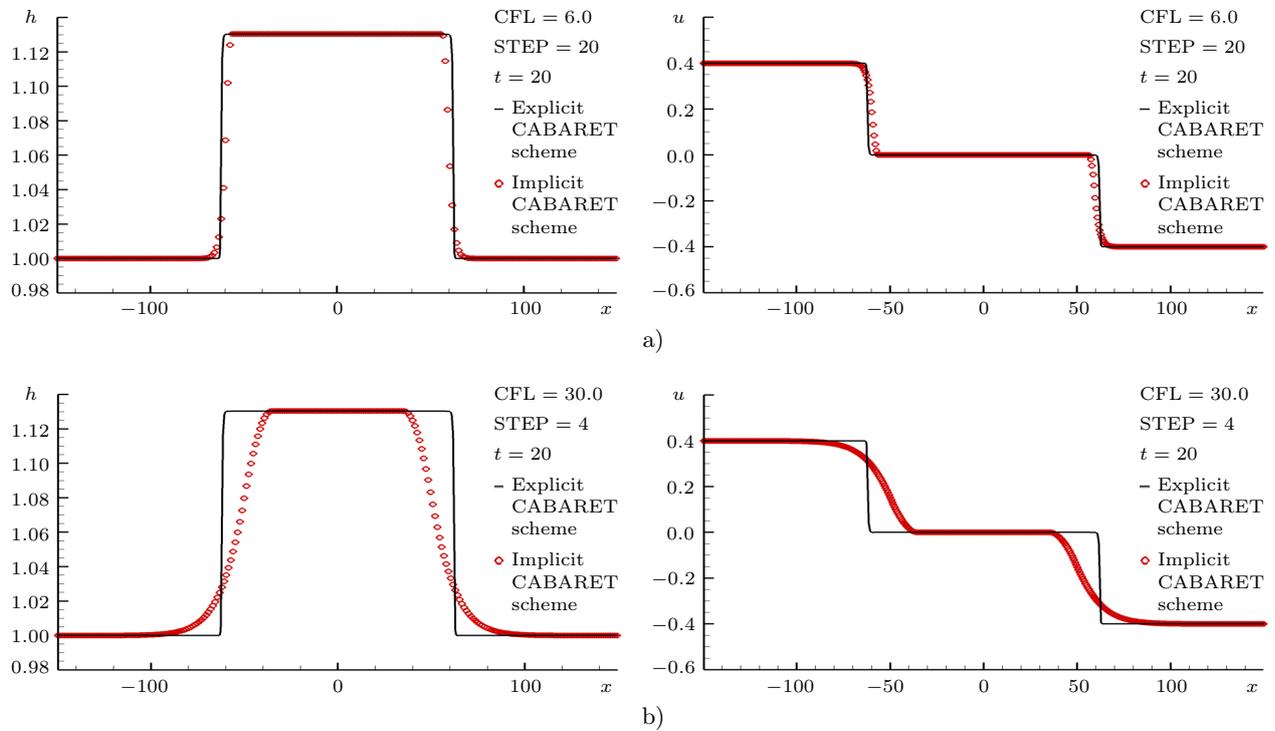


Рис. 10. Два скачка. Решения для глубины h и скорости u , полученные по явной и неявной схемам КАБАРЕ: а) CFL = 6; б) CFL = 30

Fig. 10. Two shocks. Solutions for depth h and velocity u obtained using explicit and implicit CABARET schemes: а) CFL = 6; б) CFL = 30

в разностную схему граничных условий типа жесткой стенки. Кроме того, в описанной выше схеме существенным является постоянство знака характеристических скоростей на сетке. Есть и другие вопросы, требующие дальнейшего изучения. Однако, на взгляд авторов, схемы подобного типа имеют хороший потенциал.

Список литературы

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
3. Головизнин В.М., Горбачев Д.Ю., Колоколников А.М., Майоров П.А., Майоров П.А., Тленин Б.А. Неявные обратимые по времени схемы “кабаре” для квазилинейных уравнений мелкой воды // Вычислительные методы и программирование. 2016. 17, № 4. 402–414. doi 10.26089/NumMet.v17r437
4. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
5. Головизнин В.М., Соловьев А.В. Дисперсионные и диссипативные характеристики разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа. М.: МАКС Пресс, 2018.
6. Fernández-Pato J., Morales-Hernández M., García-Navarro P. Implicit finite volume simulation of 2D shallow water flows in flexible meshes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2018. 328. 1–25. doi 10.1016/j.cma.2017.08.050
7. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М. Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. 2003. 15, № 9. 29–48.
8. Головизнин В.М., Карабасов С.А. Нелинейная коррекция схемы Кабаре // Математическое моделирование. 1998. 10, № 12. 107–123.

Поступила в редакцию
25 декабря 2023 г.

Принята к публикации
3 января 2024 г.

Информация об авторах

Андрей Валерьевич Соловьев — к.ф.-м.н., вед. науч. сотр.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, лаборатория индустриальной математики, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

Данил Гамилевич Асфандияров — к.ф.-м.н., заведующий лабораторией; Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, ул. Большая Тульская, 52, 115191, Москва, Российская Федерация.

References

1. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).
2. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *New CFD Algorithms for Multiprocessor Computer Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
3. V. M. Goloviznin, D. Yu. Gorbachev, A. M. Kolokolnikov, et al., “Implicit and Time Reversible CABARET Schemes for Quasilinear Shallow Water Equations,” *Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programirovanie)* 17 (4), 402–414 (2016). doi 10.26089/NumMet.v17r437.
4. A. A. Samarskii and Yu. P. Popov, *Difference Schemes for Solving Gas Dynamics Problems* (Nauka, Moscow, 1992) [in Russian].
5. V. M. Goloviznin and A. V. Solovjev, *Dispersion and Dissipative Characteristics of Difference Schemes for Partial Differential Equations of Hyperbolic Type* (MAKS Press, Moscow, 2018) [in Russian].



6. J. Fernández-Pato, M. Morales-Hernández, and P. García-Navarro, “Implicit Finite Volume Simulation of 2D Shallow Water Flows in Flexible Meshes,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **328**. 1–25 (2018). doi [10.1016/j.cma.2017.08.050](https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.08.050).
7. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and I. M. Kobrinskii, “Balance-Characteristic Schemes with Separated Conservative and Flux Variables,” *Mat. Model.* **15** (9). 29–48 (2003).
8. V. M. Goloviznin and S. A. Karabasov, “Nonlinear Correction of Cabaret Scheme,” *Mat. Model.* **10** (12). 107–123 (1998).

Received
December 25, 2023

Accepted for publication
January 3, 2024

Information about the authors

Andrey V. Solovjev — Ph.D., Leading Researcher; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Laboratory of Industrial Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.

Danil G. Asfandiyarov — Ph.D., Head of Laboratory; Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences, Bol’shaya Tul’skaya ulitsa, 52, 115191, Moscow, Russia.