

УДК 518

КВАЗИЭРМИТОВЫ СПЛАЙНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю. К. Демьянович¹

Построены (вообще говоря, неполиномиальные) сплайны второго порядка эрмита типа (называемые квазиэрмитовыми) на произвольной неравномерной сетке, получено продолжение системы функционалов, биортогональных к системе упомянутых сплайнов в определенных классах объемлющих пространств, установлены необходимые и достаточные условия непрерывности рассматриваемых сплайнов, даны прямые решения некоторых обобщенных эрмитовых интерполяционных задач. Построено предельное пространство квазиэрмитовых сплайнов в предельном переходе от пространств B -сплайнов при “склеивании” некоторых узлов сетки. Работа частично поддержана грантами РФФИ 04-01-00692 и 04-01-00026.

Ключевые слова: квазиэрмитовы сплайны, биортогональная система, гладкость сплайнов, интерполяционные задачи, предельные пространства сплайнов

Широко известны полиномиальные эрмитовы сплайны (см. [1–4]); иногда их называют сплайнами ненулевой высоты. На равномерной сетке их свойства удобно изучать с использованием преобразования Фурье (см., например, [2]). Однако на неравномерной сетке это преимущество пропадает и приходится прибегать к ашпроксимационным соотношениям и вводить структуру расположения носителей сплайнов, фигурирующих в упомянутых соотношениях [4]. Для сплайнов лагранжевого типа (т.е. для сплайнов нулевой высоты) на неравномерной сетке ранее (см. [5]) были рассмотрены свойства вложенности пространств таких сплайнов, построены системы функционалов, биортогональных к образующей системе этих сплайнов, найдены прямые решения интерполяционных задач в пространствах упомянутых сплайнов и, наконец, даны их вейвлетные разложения.

Цель данной работы — построить (не обязательно полиномиальные) сплайны второго порядка эрмитового типа (называемые здесь квазиэрмитовыми сплайнами), дать соответствующие биортогональные системы функционалов, получить решение некоторых обобщений эрмитовых интерполяционных задач в классе рассматриваемых сплайнов, вывести необходимые и достаточные условия непрерывности этих сплайнов, а также выделить одно из пространств квазиэрмитовых сплайнов предельным переходом от B -сплайнов (путем процесса “склеивания” некоторых узлов сетки).

В первом пункте вводятся некоторые обозначения и определения; в частности, определяются пространства квазиэрмитовых сплайнов. Во втором пункте строится продолжение системы функционалов, биортогональной к системе упомянутых сплайнов, на некоторые объемлющие пространства функций. Третий пункт посвящен конкретизации вариантов продолжений биортогональных систем для квадратичных сплайнов. Необходимые и достаточные условия непрерывности сплайнов рассмотрены в четвертом пункте. В пятом пункте производится предельный переход от B -сплайнов к квазиэрмитовым сплайнам и выделяются пространства квазиэрмитовых сплайнов, из которых можно создать телескопическую систему пространств при измельчении сетки; это позволяет стандартным образом получать вейвлетное разложение с использованием указанной биортогональной системы функционалов.

1. Некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, $3\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел вида $0, \pm 3, \pm 6, \dots$, а $\mathcal{R}^3$ — пространство трехмерных вектор-столбцов с вещественными компонентами. Компоненты вектора обозначаются квадратными скобками, например, для $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^3$ пишем $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2)^T$. Квадратную матрицу третьего порядка с трехкомпонентными вектор-столбцами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ будем обозначать $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

На конечном или бесконечном интервале (α, β) вещественной оси $\mathcal{R}^1$ рассмотрим сетку

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad X: \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots, \quad (1.1)$$

для которой

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} x_j = \alpha, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} x_j = \beta. \quad (1.2)$$

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, механико-математический факультет, Университетская наб., 79, 199034, г. Санкт-Петербург; e-mail: Yuri.Demjanovich@paloma.spbu.ru

Дальше через $\mathcal{J}$ всегда обозначается целое число, которое делится на 3, т.е. считается, что $\mathcal{J} = 3j$, где $j \in \mathcal{Z}$ (или, что то же самое, $\mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}$).

Объединение $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j \in \mathcal{Z}} (x_j, x_{j+1})$ назовем *сеточным подразделением*. Введем обозначения

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{J}} &\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{J} - 2, \mathcal{J} - 1, \mathcal{J}\}, & J_{\mathcal{J}+1} = J_{\mathcal{J}+2} &\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{J} - 1, \mathcal{J}, \mathcal{J} + 1\}, \\ S_{\mathcal{J}-2} &\stackrel{\text{def}}{=} [x_{\mathcal{J}-2}, x_{\mathcal{J}+1}], & S_{\mathcal{J}-1} = S_{\mathcal{J}} &\stackrel{\text{def}}{=} [x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+3}], \quad \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j \in \mathcal{Z}}$ — множество трехмерных вектор-столбцов $\mathbf{a}_j$ с вещественными компонентами. Пусть $A_j \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)$, $j \in \mathcal{Z}$.

Множество $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если

$$\det A_j \neq 0 \quad \forall j \in \mathcal{Z}. \quad (1.3)$$

Линейное пространство вещественнозначных функций $u(t)$, заданных на множестве M и имеющих ограниченную вариацию на каждом интервале (x_j, x_{j+1}) , $j \in \mathcal{Z}$, обозначим через $\mathcal{V}_X$ и положим $\mathcal{V}_X^s \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)} \in \mathcal{V}_X, i = 0, 1, \dots, s\}$. Пусть $C\langle c, d \rangle$ — линейное пространство, состоящее из функций u пространства $C(c, d)$, которые имеют конечные пределы $\lim_{t \rightarrow c+0} u(t)$ и $\lim_{t \rightarrow d-0} u(t)$. Введем также пространства $\mathcal{C}_X \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{k \in \mathcal{Z}} C\langle x_k, x_{k+1} \rangle$, $\mathcal{C}_X^s \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)} \in \mathcal{C}_X, \forall i = 0, 1, \dots, s\}$. В дальнейшем (если нет специального указания) через $\mathcal{X}$ обозначается любое из пространств $\mathcal{V}_X^s$ и $\mathcal{C}_X^s$.

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$ с компонентами из $\mathcal{X}$. Пусть $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_j\}_{j \in \mathcal{Z}}$ — полная цепочка векторов, а функции $\omega_j \in \mathcal{X}$, $j \in \mathcal{Z}$, удовлетворяют тождествам (называемым *аппроксимационными соотношениями* [4])

$$\sum_{j' \in J_k} \mathbf{a}_{j'} \omega_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \quad \forall k \in \mathcal{Z}, \quad (1.4)$$

$$\omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin S_j \cap M, \quad \forall j \in \mathcal{Z}. \quad (1.5)$$

При каждом фиксированном $t \in (x_k, x_{k+1})$ соотношения (1.4) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду свойства (1.3) система (1.4) однозначно разрешима:

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j' \in J_k, j' \neq j} \parallel^j \varphi(t))}{\det(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j' \in J_k})} \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \quad \forall j \in J_k; \quad (1.6)$$

здесь символ $\parallel^j$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $\mathbf{a}_j$ на столбец $\varphi(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов). Из соотношения (1.5) ясно, что $\text{supp } \omega_j \subset S_j$.

Дадим более наглядную запись соотношений (1.4) – (1.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mathcal{J}-2} \omega_{\mathcal{J}-2}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1} \omega_{\mathcal{J}-1}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}} \omega_{\mathcal{J}}(t) &\equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \\ \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1} \omega_{\mathcal{J}-1}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}} \omega_{\mathcal{J}}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1} \omega_{\mathcal{J}+1}(t) &\equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_j(t) &\equiv 0 & \forall t \in M \setminus S_j, \quad \forall j \in \mathcal{Z}, \\ \omega_{\mathcal{J}-1}(t) &= \frac{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}})}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}})} & \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\omega_{\mathcal{J}-1}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1})}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (1.8)$$

$$\omega_{\mathcal{J}}(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \quad (1.9)$$

$$\omega_{\mathcal{J}}(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1})}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}). \quad (1.10)$$

$$\omega_{\mathcal{J}+1}(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (1.11)$$

$$\omega_{\mathcal{J}+1}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}+2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+3})}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+3})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+4}). \quad (1.12)$$

Замечание 1. Узлы сетки X с индексами $\mathcal{J}$ из множества $3\mathbb{Z}$ не участвуют в определении функций ω_j и не потребуются в следующих пунктах 2–4; однако эти узлы используются в п. 5 в процессе “склеивания” узлов. Заметим также, что в дальнейшем используются ряды вида $\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \omega_j(t)$, где c_j — произвольные вещественные числа; эти ряды сходятся (поточечно): при каждом фиксированном $t \in M$ в таком ряде имеется не более трех ненулевых слагаемых.

Введем множество $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{S_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ и рассмотрим линейное пространство

$$\tilde{X} = \tilde{X}_{(\mathbf{A}, \varphi, \mathcal{S})}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \tilde{u} \mid \tilde{u}(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \omega_j(t) \quad \forall t \in M, \quad \forall c_j \in \mathcal{R}^1 \right\}.$$

Очевидно, что $\tilde{X} \subset \mathcal{X}$. Элементы пространства $\tilde{X}$ будем здесь называть *квазиэрмитовыми сплайнами второго порядка*. Функции ω_j , $j \in \mathbb{Z}$, называются *образующими пространства $\tilde{X}$* .

2. Построение биортогональной системы. Далее рассматриваются линейные функционалы из пространства $\mathcal{X}^*$. Будем говорить, что носитель функционала $f \in \mathcal{X}^*$ содержится в отрезке $[a, b]$, если его значения $\langle f, u \rangle$ на функциях $u \in \mathcal{X}$ определяются лишь значениями функции u на интервале (a, b) и $\langle f, (1 - \chi_{(a,b)})u \rangle = 0 \quad \forall u \in \mathcal{X}$, где $\chi_{(a,b)}$ — характеристическая функция интервала (a, b) .

Вводя вектор-функцию $\Omega_{(k)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_{k-2}(t), \omega_{k-1}(t), \omega_k(t))^T \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ и фиксируя $k \in \mathbb{Z}$, перепишем систему (1.4) в виде

$$A_k \Omega_{(k)}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}). \quad (2.1)$$

Теорема 1. Пусть компонентами вектора $\mathbf{f}^{(k)}$, $\mathbf{f}^{(k)} = (f_{\langle 0 \rangle}^{(k)}, f_{\langle 1 \rangle}^{(k)}, f_{\langle 2 \rangle}^{(k)})^T$, являются функционалы $f_{\langle i \rangle}^{(k)}$ со свойствами

а) биортогональности к системе функций $[\varphi]_0(t), [\varphi]_1(t), [\varphi]_2(t)$:

$$\langle f_{\langle i \rangle}^{(k)}, [\varphi]_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \{0, 1, 2\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

б) локализации носителя в промежутке $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\text{supp } f_{\langle i \rangle}^{(k)} \subset [x_k, x_{k+1}] \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда при каждом $k \in \mathbb{Z}$ система функционалов $\{g_{\langle i \rangle}^{(k)}\}_{i \in \{0,1,2\}}$, $g_{\langle i \rangle}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} [A_k^T \mathbf{f}^{(k)}]_i$

А) биортогональна к системе функций $\{\omega_{k-2}(t), \omega_{k-1}(t), \omega_k(t)\}$:

$$\langle g_{\langle i \rangle}^{(k)}, \omega_{k-2+j} \rangle = \delta_{i,j}, \quad (2.3)$$

Б) локализована в промежутке $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\text{supp } g_{\langle i \rangle}^{(k)} \subset [x_k, x_{k+1}] \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Для доказательства формулы (2.3) заметим, что свойство (2.2) можно записать в виде

$$\mathbf{f}^{(k)} \varphi^T = I, \quad (2.5)$$

где I — единичная матрица третьего порядка. Теперь, обозначая $\mathbf{g}^{(k)} = (g_{\langle 0 \rangle}^{(k)}, g_{\langle 1 \rangle}^{(k)}, g_{\langle 2 \rangle}^{(k)})^T \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ и используя соотношение (2.1), имеем $\mathbf{g}^{(k)} \Omega_{(k)}^T = A_k^T \mathbf{f}^{(k)} (A_k^{-1} \varphi)^T$, откуда ввиду (2.5) получаем $\mathbf{g}^{(k)} \Omega_{(k)}^T = I$. Последнее эквивалентно формулам (2.3).

Соотношение (2.4) очевидно. ■

Замечание 2. При $k = \mathcal{J} + 1$ и при $k' = \mathcal{J} + 2$ ($\mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}$) матрицы A_k и $A_{k'}$ совпадают, так что теорема 1 остается справедливой, если при этом k в качестве области локализации в пунктах б) и Б) вместо промежутка $[x_k, x_{k+1}]$ взять промежуток $[x_k, x_{k+2}]$.

Теорема 2. Пусть функционалы $g_{(i)}^{(k)}$, $i \in \{0, 1, 2\}$, удовлетворяют условиям (2.3)–(2.4) при любых $k \in \mathbb{Z}$. Тогда система функционалов $\{\hat{\omega}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, определяемая соотношениями

$$\hat{\omega}_{\mathcal{J}-2} \stackrel{\text{def}}{=} g_{(0)}^{(\mathcal{J})}, \quad \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1} \stackrel{\text{def}}{=} g_{(0)}^{(\mathcal{J}+1)}, \quad \hat{\omega}_{\mathcal{J}} \stackrel{\text{def}}{=} g_{(1)}^{(\mathcal{J}+1)}, \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathbb{Z},$$

биортогональна системе функций $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$: $\langle \hat{\omega}_j, \omega_{j'} \rangle = \delta_{j,j'}$.

Доказательство. Доказательство разобьем на несколько частей.

1. Сначала определим значения функционала $\hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}$ на функциях $\omega_{j'}$, $\mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}$, $j' \in \mathbb{Z}$. Согласно теореме 1 имеем

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}, \omega_{\mathcal{J}-2} \rangle = 1, \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}, \omega_{\mathcal{J}-1} \rangle = 0, \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}, \omega_{\mathcal{J}} \rangle = 0. \quad (2.6)$$

По определению $\hat{\omega}_{\mathcal{J}-2} = g_{(0)}^{(\mathcal{J})}$ и потому $\text{supp } \hat{\omega}_{\mathcal{J}-2} = \text{supp } g_{(0)}^{(\mathcal{J})} \subset [x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}]$, так что при выполнении условия

$$(x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}) \cap \text{supp } \omega_{j'} = \emptyset \quad (2.7)$$

значение функционала $\hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}$ на функции $\omega_{j'}$ равно нулю:

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}, \omega_{j'} \rangle = 0. \quad (2.8)$$

Ввиду формул (2.6) в этом пункте нам осталось доказать соотношение (2.8) в двух случаях: для $j' \leq \mathcal{J} - 3$ и для $j' \geq \mathcal{J} + 1$. В первом случае возьмем сначала $j' = \mathcal{J} - 3$; тогда согласно (1.9)–(1.10)

$$\text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{j'}, x_{j'+3}] = [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}],$$

откуда ясно, что (2.7) выполнено и для этого j' соотношение (2.8) установлено. Если взять $j' = \mathcal{J} - 4$, то в соответствии с формулами (1.7)–(1.8) опять-таки $\text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}]$ и снова приходим к (2.8). Запишем последнее рассуждение кратко в символьном виде:

$$j' = \mathcal{J} - 4 \quad \stackrel{(1.7)-(1.8)}{\implies} \quad \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}] \implies (2.8).$$

Для $j' = \mathcal{J} - 5$ следует воспользоваться формулами (1.11)–(1.12), откуда $\text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-5}, x_{\mathcal{J}-2}]$, и опять получаем (2.8), что можно кратко записать в символьном виде

$$j' = \mathcal{J} - 5 \quad \stackrel{(1.11)-(1.12)}{\implies} \quad \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-5}, x_{\mathcal{J}-2}] \implies (2.8).$$

Ясно, что с уменьшением номера j' носитель функции $\omega_{j'}$ отодвигается налево (в сторону уменьшения чисел на числовой оси), и потому для остальных значений $j' \leq \mathcal{J} - 3$ соотношение (2.7), а с ним и (2.8) по-прежнему выполнены. Итак, при $j' \leq \mathcal{J} - 3$ соотношение (2.8) установлено.

Рассмотрим случай, когда $j' \geq \mathcal{J} + 1$. Для $j' = \mathcal{J} + 1, \mathcal{J} + 2, \mathcal{J} + 3$ доказательство соотношения (2.8) в символьном виде выглядит следующим образом:

$$j' = \mathcal{J} + 1 \quad \stackrel{(1.11)-(1.12)}{\implies} \quad \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+4}] \implies (2.8),$$

$$j' = \mathcal{J} + 2 \quad \stackrel{(1.7)-(1.8)}{\implies} \quad \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \implies (2.8),$$

$$j' = \mathcal{J} + 3 \quad \stackrel{(1.9)-(1.10)}{\implies} \quad \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \implies (2.8).$$

Поскольку с увеличением номера j' носитель функции $\omega_{j'}$ отодвигается направо (в сторону увеличения чисел на числовой оси), то для остальных значений $j' \geq \mathcal{J} + 1$ соотношение (2.7), а с ним и (2.8) тоже выполнены. Таким образом, при всех $j' \leq \mathcal{J} - 3$ и при всех $j' \geq \mathcal{J} + 1$ соотношение (2.8) установлено. С учетом формул (2.6) получаем

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}, \omega_{j'} \rangle = \delta_{\mathcal{J}-2, j'}. \quad (2.9)$$

2. Теперь найдем значения функционала $\hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}$ на функциях $\omega_{j'}$, $\mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}$, $j' \in \mathbb{Z}$. В соответствии с теоремой 1 имеем

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}, \omega_{\mathcal{J}-1} \rangle = 1, \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}, \omega_{\mathcal{J}} \rangle = 0, \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}, \omega_{\mathcal{J}+1} \rangle = 0. \quad (2.10)$$

Из определения функционала $\hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}$ получаем $\text{supp } \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1} = \text{supp } g_{(0)}^{(\mathcal{J}+1)} \subset [x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+2}]$, так что при выполнении условия

$$(x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+2}) \cap \text{supp } \omega_{j'} = \emptyset \quad (2.11)$$

имеем

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}, \omega_{j'} \rangle = 0. \quad (2.12)$$

Ввиду формул (2.10) в этом пункте важно установить соотношение (2.12) в двух случаях: для $j' \leq \mathcal{J} - 2$ и для $j' \geq \mathcal{J} + 2$. В первом случае возьмем сначала $j' = \mathcal{J} - 2$, $j' = \mathcal{J} - 3$, $j' = \mathcal{J} - 4$; имеем:

$$\begin{aligned} j' = \mathcal{J} - 2 & \xRightarrow{(1.11)-(1.12)} \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-2}, x_{\mathcal{J}+1}] \implies (2.11) \implies (2.12), \\ j' = \mathcal{J} - 3 & \xRightarrow{(1.9)-(1.10)} \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}] \implies (2.11) \implies (2.12), \\ j' = \mathcal{J} - 4 & \xRightarrow{(1.7)-(1.8)} \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}] \implies (2.11) \implies (2.12). \end{aligned}$$

Для остальных $j' \leq \mathcal{J} - 2$ соотношение (2.12) очевидно.

Во втором случае $j' \geq \mathcal{J} + 2$; опять-таки для $j' = \mathcal{J} + 2$, $j' = \mathcal{J} + 3$ соответственно получаем

$$\begin{aligned} j' = \mathcal{J} + 2 & \xRightarrow{(1.7)-(1.8)} \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \implies (2.11) \implies (2.12), \\ j' = \mathcal{J} + 3 & \xRightarrow{(1.9)-(1.10)} \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \implies (2.11) \implies (2.12), \end{aligned}$$

а для остальных $j' \geq \mathcal{J} + 2$ соотношение (2.12) очевидно. С учетом формул (2.10) получаем

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}, \omega_{j'} \rangle = \delta_{\mathcal{J}-1, j'}. \quad (2.13)$$

3. Случай функционала $\hat{\omega}_{\mathcal{J}}$ рассматривается аналогично предыдущему. Используя теорему 1, имеем

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}}, \omega_{\mathcal{J}-1} \rangle = 0, \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}}, \omega_{\mathcal{J}} \rangle = 1, \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}}, \omega_{\mathcal{J}+1} \rangle = 0. \quad (2.14)$$

Поскольку $\text{supp } \hat{\omega}_{\mathcal{J}} = \text{supp } g_{\langle 1 \rangle}^{(\mathcal{J}+1)} \subset [x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+2}]$, то при выполнении условия

$$(x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+2}) \cap \text{supp } \omega_{j'} = \emptyset \quad (2.15)$$

имеем

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}}, \omega_{j'} \rangle = 0. \quad (2.16)$$

Ввиду формул (2.14) достаточно установить соотношение (2.16) в двух случаях: для $j' \leq \mathcal{J} - 2$ и для $j' \geq \mathcal{J} + 2$. В первом случае рассмотрим $j' = \mathcal{J} - 2$, $j' = \mathcal{J} - 3$, $j' = \mathcal{J} - 4$; получаем соответственно:

$$\begin{aligned} j' = \mathcal{J} - 2 & \xRightarrow{(1.11)-(1.12)} \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-2}, x_{\mathcal{J}+1}] \implies (2.15) \implies (2.16), \\ j' = \mathcal{J} - 3 & \xRightarrow{(1.9)-(1.10)} \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}] \implies (2.15) \implies (2.16), \\ j' = \mathcal{J} - 4 & \xRightarrow{(1.7)-(1.8)} \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}] \implies (2.15) \implies (2.16). \end{aligned}$$

Для остальных $j' \leq \mathcal{J} - 2$ соотношение (2.16) еще более очевидно.

Во втором случае $j' \geq \mathcal{J} + 2$; опять-таки для $j' = \mathcal{J} + 2$, $j' = \mathcal{J} + 3$ соответственно получаем

$$\begin{aligned} j' = \mathcal{J} + 2 & \xRightarrow{(1.7)-(1.8)} \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \implies (2.15) \implies (2.16), \\ j' = \mathcal{J} + 3 & \xRightarrow{(1.9)-(1.10)} \text{supp } \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \implies (2.15) \implies (2.16), \end{aligned}$$

а для остальных $j' \geq \mathcal{J} + 2$ соотношение (2.15) совершенно очевидно. С учетом формул (2.14) получаем

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}}, \omega_{j'} \rangle = \delta_{\mathcal{J}, j'}. \quad (2.17)$$

Поскольку $\mathcal{J}$ — произвольный элемент множества $3\mathcal{Z}$, то из (2.9), (2.13) и (2.17) следует соотношение $\langle \hat{\omega}_j, \omega_{j'} \rangle = \delta_{j, j'} \forall j, j' \in \mathcal{Z}$. Теорема полностью доказана. ■

3. Биортогональные системы для квадратичных сплайнов. В случае, когда вектор-функция имеет вид $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, формулы (1.7)–(1.12) дают квадратичные сплайны.

Возьмем в качестве исходного пространства функций пространство $\mathcal{X} = \mathcal{C}_X^2$, а в качестве продолжения системы функционалов, биортогональной к функциям $[\varphi]_0(t) = 1$, $[\varphi]_1(t) = t$, $[\varphi]_2(t) = t^2$, возьмем систему функционалов, определяемых формулами

$$\langle f_{\langle 0 \rangle}^{(k)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\xi_k) - \xi_k u'(\xi_k) + \frac{1}{2} \xi_k^2 u''(\xi_k), \quad \langle f_{\langle 1 \rangle}^{(k)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u'(\xi_k) - \xi_k u''(\xi_k), \quad \langle f_{\langle 2 \rangle}^{(k)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \xi_k^2 u''(\xi_k),$$

где ξ_k — некоторая точка интервала (α, β) , выбираемая так, чтобы

$$\xi_{\mathcal{J}} \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \quad \xi_{\mathcal{J}+1}, \xi_{\mathcal{J}+2} \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad \mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Полагая $\mathbf{f}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (f_{(0)}^{(k)}, f_{(1)}^{(k)}, f_{(2)}^{(k)})^T$, в соответствии с теоремой 1 получаем систему функционалов

$$\{g_{(i)}^{(k)}\}_{i=0,1,2}, \quad g_{(i)}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} [A_k^T \mathbf{f}^{(k)}]_i,$$

биортогональную функциям $\omega_{k-2}, \omega_{k-1}, \omega_k$. В данной ситуации удобно рассмотреть отдельно случай $k = \mathcal{J}$ и случаи $k = \mathcal{J} + 1, \mathcal{J} + 2$, (при $\mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}$), ибо в последних двух случаях $A_{\mathcal{J}+1} = A_{\mathcal{J}+2}$ и области локализации функционалов $f_{(i)}^{(\mathcal{J}+1)}$ и $f_{(i)}^{(\mathcal{J}+2)}$, $i = 0, 1, 2$, совпадают (см. формулы (3.1)).

Итак, обозначая $\mathbf{g}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (g_{(0)}^{(k)}, g_{(1)}^{(k)}, g_{(2)}^{(k)})^T$, имеем

$$\mathbf{g}^{(\mathcal{J})} = A_{\mathcal{J}}^T \mathbf{f}^{(\mathcal{J})} = \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_1 - \xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 - \xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{t=\xi_{\mathcal{J}}},$$

$$\mathbf{g}^{(\mathcal{J}+1)} = A_{\mathcal{J}+1}^T \mathbf{f}^{(\mathcal{J}+1)} =$$

$$= \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}+1}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+1} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}+1}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+1} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}+1}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+1} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{t=\xi_{\mathcal{J}+1}},$$

$$\mathbf{g}^{(\mathcal{J}+2)} = A_{\mathcal{J}+2}^T \mathbf{f}^{(\mathcal{J}+2)} =$$

$$= \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}+2}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+2} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}+2}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+2} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}+2}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+2} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{t=\xi_{\mathcal{J}+2}}.$$

Пользуясь теоремой 2, найдем в пространстве $(C_X^2)^*$ систему функционалов $\{\hat{\omega}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, биортогональную системе сплайнов $\{\omega_{j'}\}_{j' \in \mathbb{Z}}$: при $\mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}$

$$\hat{\omega}_{\mathcal{J}-2} = \left([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_1 - \xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \right) \Bigg|_{t=\xi_{\mathcal{J}}}, \quad (3.2)$$

$$\hat{\omega}_{\mathcal{J}-1} = \left([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}+1}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+1} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \right) \Bigg|_{t=\xi_{\mathcal{J}+1}}, \quad (3.3)$$

$$\hat{\omega}_{\mathcal{J}} = \left([\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (\xi_{\mathcal{J}+2}^2 [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+2} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_2) \frac{d^2}{dt^2} \right) \Bigg|_{t=\xi_{\mathcal{J}+2}}. \quad (3.4)$$

Пример 1 (“квазиэрмитова” система функционалов). В формулах (3.2)–(3.4) выберем векторы $\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}$, специальным образом: $[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0 = 1, [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_1 = \xi_{\mathcal{J}}, [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_2 = \xi_{\mathcal{J}}^2, [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 = 1, [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 = \xi_{\mathcal{J}+1}, [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_2 = \xi_{\mathcal{J}+1}^2, [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 = 0, [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 = 1, [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_2 = 2\xi_{\mathcal{J}+2}$; получаемые в результате функционалы и сплайны будем обозначать верхним индексом “единица”: $\hat{\omega}_j^1, \omega_{j'}^1$, так что $\langle \hat{\omega}_j^1, \omega_{j'}^1 \rangle = \delta_{j,j'}$. При таком выборе упомянутых векторов имеем

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}^1, u \rangle = u(\xi_{\mathcal{J}}), \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}^1, u \rangle = u(\xi_{\mathcal{J}+1}), \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}}^1, u \rangle = \frac{du}{dt}(\xi_{\mathcal{J}+2}), \quad (3.5)$$

что соответствует определенному обобщению функционалов, участвующих в задаче Эрмита. При этом формулы (1.7)–(1.12) могут быть записаны в виде

$$\omega_{\mathcal{J}-1}^1(t) = \frac{(t - \xi_{\mathcal{J}})(2\xi_{\mathcal{J}+2} - \xi_{\mathcal{J}} - t)}{(\xi_{\mathcal{J}+1} - \xi_{\mathcal{J}})(2\xi_{\mathcal{J}+2} - \xi_{\mathcal{J}} - \xi_{\mathcal{J}+1})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \quad (3.6)$$

$$\omega_{\mathcal{J}-1}^1(t) = \frac{(\xi_{\mathcal{J}+3} - t)(t + \xi_{\mathcal{J}+3} - 2\xi_{\mathcal{J}+2})}{(\xi_{\mathcal{J}+3} - \xi_{\mathcal{J}+1})(\xi_{\mathcal{J}+1} + \xi_{\mathcal{J}+3} - 2\xi_{\mathcal{J}+2})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (3.7)$$

$$\omega_{\mathcal{J}}^1(t) = \frac{(t - \xi_{\mathcal{J}})(t - \xi_{\mathcal{J}+1})}{(2\xi_{\mathcal{J}+2} - \xi_{\mathcal{J}} - \xi_{\mathcal{J}+1})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \quad (3.8)$$

$$\omega_{\mathcal{J}}^1(t) = \frac{(t - \xi_{\mathcal{J}+1})(t - \xi_{\mathcal{J}+3})}{(2\xi_{\mathcal{J}+2} - \xi_{\mathcal{J}+1} - \xi_{\mathcal{J}+3})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (3.9)$$

$$\omega_{\mathcal{J}+1}^1(t) = \frac{(t - \xi_{\mathcal{J}+1})(2\xi_{\mathcal{J}+2} - \xi_{\mathcal{J}+1} - t)}{(\xi_{\mathcal{J}+3} - \xi_{\mathcal{J}+1})(2\xi_{\mathcal{J}+2} - \xi_{\mathcal{J}+1} - \xi_{\mathcal{J}+3})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (3.10)$$

$$\omega_{\mathcal{J}+1}^1(t) = \frac{(t - \xi_{\mathcal{J}+4})(2\xi_{\mathcal{J}+5} - \xi_{\mathcal{J}+4} - t)}{(\xi_{\mathcal{J}+3} - \xi_{\mathcal{J}+4})(2\xi_{\mathcal{J}+5} - \xi_{\mathcal{J}+3} - \xi_{\mathcal{J}+4})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+4}). \quad (3.11)$$

Пространство $\tilde{X}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \tilde{u} \mid \tilde{u}^1(t) = \sum_{j \in \mathcal{Z}} c_j \omega_j^1(t) \forall t \in M, \forall c_j \in \mathcal{R}^1 \right\}$ лежит в пространстве $\mathcal{C}^1$, а функция

$\tilde{u}^1 \in \tilde{X}^1$, $\tilde{u}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega_j^1(t)$, представляет собой решение интерполяционной задачи вида

$$u(\xi_{\mathcal{J}}) = v_{\mathcal{J}}, \quad u(\xi_{\mathcal{J}+1}) = v_{\mathcal{J}+1}, \quad \frac{du}{dt}(\xi_{\mathcal{J}+2}) = v_{\mathcal{J}+2}, \quad u \in \mathcal{C}^1,$$

где v_j — заданные числа ($j \in \mathcal{Z}$).

Пример 2. Учитывая соотношения (3.1), положим $\xi_{\mathcal{J}+1} = \xi_{\mathcal{J}+2}$ для упрощения формул (3.5) – (3.11). Получаемые в результате функционалы и функции снабдим верхним индексом 2:

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}^2, u \rangle = u(\xi_{\mathcal{J}}), \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}^2, u \rangle = u(\xi_{\mathcal{J}+1}), \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}}^2, u \rangle = \frac{du}{dt}(\xi_{\mathcal{J}+1}),$$

$$\omega_{\mathcal{J}-1}^2(t) = \frac{(t - \xi_{\mathcal{J}})(2\xi_{\mathcal{J}+1} - \xi_{\mathcal{J}} - t)}{(\xi_{\mathcal{J}+1} - \xi_{\mathcal{J}})^2} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \quad (3.12)$$

$$\omega_{\mathcal{J}-1}^2(t) = \frac{(\xi_{\mathcal{J}+3} - t)(t + \xi_{\mathcal{J}+3} - 2\xi_{\mathcal{J}+1})}{(\xi_{\mathcal{J}+3} - \xi_{\mathcal{J}+1})^2} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (3.13)$$

$$\omega_{\mathcal{J}}^2(t) = \frac{(t - \xi_{\mathcal{J}})(t - \xi_{\mathcal{J}+1})}{\xi_{\mathcal{J}+1} - \xi_{\mathcal{J}}} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \quad (3.14)$$

$$\omega_{\mathcal{J}}^2(t) = \frac{(t - \xi_{\mathcal{J}+1})(t - \xi_{\mathcal{J}+3})}{\xi_{\mathcal{J}+1} - \xi_{\mathcal{J}+3}} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (3.15)$$

$$\omega_{\mathcal{J}+1}^2(t) = \frac{(t - \xi_{\mathcal{J}+1})^2}{(\xi_{\mathcal{J}+3} - \xi_{\mathcal{J}+1})^2} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (3.16)$$

$$\omega_{\mathcal{J}+1}^2(t) = \frac{(t - \xi_{\mathcal{J}+4})^2}{(\xi_{\mathcal{J}+3} - \xi_{\mathcal{J}+4})^2} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+4}). \quad (3.17)$$

Функции ω_j^2 , $j \in \mathcal{Z}$, непрерывны на промежутке (α, β) , а их производные, вообще говоря, имеют разрывы первого рода в узлах, лежащих в носителе (отметим, что функции $\omega_{\mathcal{J}+1}^2$ непрерывно дифференцируемы в узлах $x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+4}$, $\forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}$). Пространство $\tilde{X}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \tilde{u} \mid \tilde{u}^2(t) = \sum_{j \in \mathcal{Z}} c_j \omega_j^2(t) \forall t \in M, \forall c_j \in \mathcal{R}^1 \right\}$ содержится в

пространстве $\mathcal{C}_X^1 \cap C(\alpha, \beta)$, а функция $\tilde{u}^2(t) \in \tilde{X}^2$, $\tilde{u}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega_j^2(t)$, является решением интерполяционной задачи вида

$$u(\xi_{\mathcal{J}}) = v_{\mathcal{J}}, \quad u(\xi_{\mathcal{J}+1}) = v_{\mathcal{J}+1}, \quad \frac{du}{dt}(\xi_{\mathcal{J}+1}) = v_{\mathcal{J}+2}, \quad u \in \mathcal{C}_X^1 \cap C(\alpha, \beta), \quad (3.18)$$

представляющей собой один из вариантов задачи Эрмита.

Пример 3. Если в предыдущем примере перейти к пределу при

$$\xi_{\mathcal{J}} \rightarrow x_{\mathcal{J}} + 0, \quad \xi_{\mathcal{J}+1} \rightarrow x_{\mathcal{J}+1} + 0 \quad \forall \mathcal{J} \in \mathcal{Z} \quad (3.19)$$

и полученный результат обозначить верхним индексом 3, то приходим к еще одному варианту эрмитовой системы функционалов над пространством $\mathcal{C}_X^1$:

$$\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}^3, u \rangle = u(x_{\mathcal{J}} + 0), \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}^3, u \rangle = u(x_{\mathcal{J}+1} + 0), \quad \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}}^3, u \rangle = \frac{du}{dt}(x_{\mathcal{J}+1} + 0).$$

После предельного перехода (3.19) формулы (3.12)–(3.17) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{J}-1}^3(t) &= \frac{(t - x_{\mathcal{J}})(2x_{\mathcal{J}+1} - x_{\mathcal{J}} - t)}{(x_{\mathcal{J}+1} - x_{\mathcal{J}})^2} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \\ \omega_{\mathcal{J}-1}^3(t) &= \frac{(x_{\mathcal{J}+3} - t)(t + x_{\mathcal{J}+3} - 2x_{\mathcal{J}+1})}{(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+1})^2} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \\ \omega_{\mathcal{J}}^3(t) &= \frac{(t - x_{\mathcal{J}})(t - x_{\mathcal{J}+1})}{x_{\mathcal{J}+1} - x_{\mathcal{J}}} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \\ \omega_{\mathcal{J}}^3(t) &= \frac{(t - x_{\mathcal{J}+1})(t - x_{\mathcal{J}+3})}{x_{\mathcal{J}+1} - x_{\mathcal{J}+3}} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \\ \omega_{\mathcal{J}+1}^3(t) &= \frac{(t - x_{\mathcal{J}+1})^2}{(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+1})^2} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \\ \omega_{\mathcal{J}+1}^3(t) &= \frac{(t - x_{\mathcal{J}+4})^2}{(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+4})^2} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+4}). \end{aligned}$$

Рассмотрим линейное пространство $\tilde{X}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \tilde{u} \mid \tilde{u}^3(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \omega_j^3(t) \quad \forall t \in M, \quad \forall c_j \in \mathcal{R}^1 \right\}$; очевидно, что

$\tilde{X}^3 \subset \mathcal{C}_X^1 \cap C(\alpha, \beta)$, а функция $\tilde{u}^3(t) \in \tilde{X}^3$, $\tilde{u}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j \omega_j^3(t)$ — решение интерполяционной задачи

$$u(x_{\mathcal{J}}) = v_{\mathcal{J}}, \quad u(\xi_{\mathcal{J}+1}) = v_{\mathcal{J}+1}, \quad \frac{du}{dt}(\xi_{\mathcal{J}+1} + 0) = v_{\mathcal{J}+2}, \quad u \in \mathcal{C}_X^1 \cap C(\alpha, \beta);$$

в отличие от (3.18) здесь узлы интерполяции совпадают с узлами интерполирующего сплайна.

4. Об условиях непрерывности. Пусть

$$\varphi \in C(\alpha, \beta), \quad \varphi(t) \neq 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta). \quad (4.1)$$

Введем обозначение $\varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_j)$. При условии (4.1) для непрерывности образующих функций необходимо и достаточно, чтобы последние обращались в ноль на концах носителя; поэтому в рассматриваемом случае непрерывность эквивалентна равенствам:

$$\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \varphi_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}) = 0, \quad \det(\varphi_{\mathcal{J}+3}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}) = 0, \quad (4.2)$$

$$\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi_{\mathcal{J}}) = 0, \quad \det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi_{\mathcal{J}+3}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}) = 0, \quad (4.3)$$

$$\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+1}) = 0, \quad \det(\varphi_{\mathcal{J}+4}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+3}) = 0 \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}. \quad (4.4)$$

Сгруппируем соотношения в (4.2)–(4.3) иначе; возьмем первое соотношение в (4.2) и первое соотношение в (4.3):

$$\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \varphi_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}) = 0, \quad \det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi_{\mathcal{J}}) = 0.$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}$ линейно независимы, и принимая во внимание предположение (4.1), приходим к выводу, что с некоторыми константами $c_{\mathcal{J}} \neq 0$ верны соотношения

$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2} = c_{\mathcal{J}} \varphi_{\mathcal{J}} \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Теперь, сравнивая вторые соотношения в (4.2)–(4.3)

$$\det(\varphi_{\mathcal{J}+3}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}) = 0, \quad \det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi_{\mathcal{J}+3}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}) = 0,$$

убеждаемся, что с некоторыми константами $c_{\mathcal{J}+3} \neq 0$ должны выполняться также соотношения

$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1} = c_{\mathcal{J}+3} \varphi_{\mathcal{J}+3} \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}; \quad (4.6)$$

очевидно, что соотношения (4.5) и (4.6) эквивалентны.

Наконец, первое и второе из соотношений в (4.4) эквивалентны и означают, что векторы $\varphi_{\mathcal{J}+1}$ представляют собой линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}$ и $\mathbf{a}_{\mathcal{J}}$:

$$\varphi_{\mathcal{J}+1} = c'_{\mathcal{J}} \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1} + c''_{\mathcal{J}} \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \quad c'_{\mathcal{J}}, c''_{\mathcal{J}} \in \mathcal{R}^1, \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}. \quad (4.7)$$

Итак, установлено следующее утверждение

Теорема 3. При условии (4.1) для непрерывности функций $\omega_j(t)$ необходимо и достаточно выполнение соотношений (4.5) и (4.7).

Обозначим через $\omega_j^\diamond$ функции, полученные по формулам (1.7)–(1.12) при $\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2} = \varphi_{\mathcal{J}} \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}$; тогда по упомянутым формулам имеем:

$$\omega_{\mathcal{J}-1}^\diamond(t) = \frac{\det(\varphi_{\mathcal{J}}, \varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}})}{\det(\varphi_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \quad (4.8)$$

$$\omega_{\mathcal{J}-1}^\diamond(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+3})}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+3})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (4.9)$$

$$\omega_{\mathcal{J}}^\diamond(t) = \frac{\det(\varphi_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi(t))}{\det(\varphi_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \quad (4.10)$$

$$\omega_{\mathcal{J}}^\diamond(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi(t), \varphi_{\mathcal{J}+3})}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+3})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (4.11)$$

$$\omega_{\mathcal{J}+1}^\diamond(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+3})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (4.12)$$

$$\omega_{\mathcal{J}+1}^\diamond(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}+2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+3})}{\det(\varphi_{\mathcal{J}+3}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+3})} \quad \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+4}). \quad (4.13)$$

Из формул (4.8)–(4.13) видно, что

$$\omega_{\mathcal{J}-1}^\diamond(x_{\mathcal{J}} + 0) = \omega_{\mathcal{J}-1}^\diamond(x_{\mathcal{J}+3} - 0) = 0, \quad \omega_{\mathcal{J}}^\diamond(x_{\mathcal{J}} + 0) = \omega_{\mathcal{J}}^\diamond(x_{\mathcal{J}+3} - 0) = 0;$$

кроме того, $\omega_{\mathcal{J}+1}^\diamond(x_{\mathcal{J}+3} - 0) = \omega_{\mathcal{J}+1}^\diamond(x_{\mathcal{J}+3} + 0) = 1$. При выполнении условия (4.7), или (что то же самое) условия

$$\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+1}) = 0 \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}, \quad (4.14)$$

верны формулы

$$\omega_{\mathcal{J}+1}^\diamond(x_{\mathcal{J}+1} + 0) = \omega_{\mathcal{J}+1}^\diamond(x_{\mathcal{J}+4} - 0) = 0.$$

Замечание 3. При $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ можно потребовать непрерывность первых производных в узлах; это требование эквивалентно соотношениям вида

$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2} = \bar{c}_{\mathcal{J}} \varphi'_{\mathcal{J}} \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z} \quad (4.15)$$

с некоторыми ненулевыми константами $\bar{c}_{\mathcal{J}}$; однако одновременное выполнение соотношений (4.5) и (4.15), вообще говоря, невозможно.

5. Квазиэрмитовы сплайны как предел B -сплайнов при “склеивании” некоторых узлов. На сетке (1.1)–(1.2) рассмотрим B -сплайны второй степени, определяемые соотношениями

$$\mathbf{a}_{j-2}^B \omega_{j-2}^B(t) + \mathbf{a}_{j-1}^B \omega_{j-1}^B(t) + \mathbf{a}_j^B \omega_j^B(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_j, x_{j+1}), \quad (5.1)$$

$$\text{supp } \omega_j^B = [x_j, x_{j+3}], \quad (5.2)$$

где

$$\mathbf{a}_j^B \stackrel{\text{def}}{=} \left(1, \frac{x_{j+1} + x_{j+2}}{2}, x_{j+1}x_{j+2}\right)^T, \quad \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, t^2)^T. \quad (5.3)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\omega_j^B(t) &= (t - x_j)^2(x_{j+1} - x_j)^{-1}(x_{j+2} - x_j)^{-1} && \text{при } t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \omega_j^B(t) &= (x_{j+2} - x_j)^{-1}(x_{j+2} - x_{j+1})^{-1}(x_{j+3} - x_{j+1})^{-1} \times \\ &\quad \times [(x_j - x_{j+2} - x_{j+3} + x_{j+1})t^2 - 2(x_{j+1}x_j - x_{j+2}x_{j+3})t + \\ &\quad + x_jx_{j+1}x_{j+3} - x_jx_{j+2}x_{j+3} + x_jx_{j+1}x_{j+2} - x_{j+1}x_{j+2}x_{j+3}] && \text{при } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \omega_j^B(t) &= (t - x_{j+3})^2(x_{j+3} - x_{j+2})^{-1}(x_{j+3} - x_{j+1})^{-1} && \text{при } t \in [x_{j+2}, x_{j+3}], \\ \omega_j^B(t) &= 0 && \text{при } t \notin [x_j, x_{j+3}],\end{aligned}$$

так что $\text{supp } \omega_j^B = [x_j, x_{j+3}]$. Легко проверить, что система функционалов $\{\hat{\omega}_i^B\}_{i \in \mathbb{Z}}$,

$$\langle \hat{\omega}_i^B, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{i+1}) + \frac{(x_{i+2} - x_{i+1})u'(x_{i+1})}{2} \quad \forall u \in C^1(\alpha, \beta),$$

биортогональна к системе $\{\omega_j^B\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Перейдем к пределу при условии $x_{\mathcal{J}-1} \rightarrow x_{\mathcal{J}} \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}$ в соотношениях (5.1)–(5.3). Учитывая свойства локальности и непрерывности упомянутых соотношений (в каждом из них фигурирует конечное число параметров) и обозначая предельные значения рассматриваемых объектов верхним символом $\flat$, из (5.1)–(5.3) получаем:

$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}^{\flat} \omega_{\mathcal{J}-2}^{\flat}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}^{\flat} \omega_{\mathcal{J}-1}^{\flat}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}}^{\flat} \omega_{\mathcal{J}}^{\flat}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \quad (5.4)$$

$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}^{\flat} \omega_{\mathcal{J}-1}^{\flat}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}}^{\flat} \omega_{\mathcal{J}}^{\flat}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}^{\flat} \omega_{\mathcal{J}+1}^{\flat}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad (5.5)$$

$$\text{supp } \omega_{\mathcal{J}-1}^{\flat} = \text{supp } \omega_{\mathcal{J}}^{\flat} = [x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+3}], \quad \text{supp } \omega_{\mathcal{J}+1}^{\flat} = [x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+4}], \quad (5.6)$$

где при $\mathcal{J} \in 3\mathbb{Z}$

$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}^{\flat} \stackrel{\text{def}}{=} (1, x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}}^2)^T, \quad \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}^{\flat} \stackrel{\text{def}}{=} \left(1, \frac{x_{\mathcal{J}} + x_{\mathcal{J}+1}}{2}, x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{J}+1}\right)^T, \quad \mathbf{a}_{\mathcal{J}}^{\flat} \stackrel{\text{def}}{=} \left(1, \frac{x_{\mathcal{J}+1} + x_{\mathcal{J}+3}}{2}, x_{\mathcal{J}+1}x_{\mathcal{J}+3}\right)^T.$$

Из условий (5.4)–(5.6) однозначно определяются функции $\omega_j^{\flat}$; они имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{J}-1}^{\flat}(t) &= \frac{(t - x_{\mathcal{J}})[2x_{\mathcal{J}+1}x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{J}+1} - x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{J}+3} + t(2x_{\mathcal{J}} - x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+1})]}{(x_{\mathcal{J}+1} - x_{\mathcal{J}})^2(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}})} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \\ \omega_{\mathcal{J}-1}^{\flat}(t) &= \frac{(t - x_{\mathcal{J}+3})^2}{(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}})(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+1})} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \\ \omega_{\mathcal{J}}^{\flat}(t) &= \frac{(t - x_{\mathcal{J}})^2}{(x_{\mathcal{J}+1} - x_{\mathcal{J}})(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}})} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \\ \omega_{\mathcal{J}}^{\flat}(t) &= \frac{(x_{\mathcal{J}+3} - t)[2x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{J}+1} - x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+1}x_{\mathcal{J}+3} + t(2x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}} - x_{\mathcal{J}+1})]}{(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}})(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+1})^2} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \\ \omega_{\mathcal{J}+1}^{\flat}(t) &= \frac{(t - x_{\mathcal{J}+1})^2}{(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+1})^2} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \\ \omega_{\mathcal{J}+1}^{\flat}(t) &= \frac{(t - x_{\mathcal{J}+4})^2}{(x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+4})^2} && \text{при } t \in (x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+4}).\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что полученные функции $\omega_j^{\flat}$ неотрицательны и непрерывны, однако их первые производные, вообще говоря, разрывны в узлах, лежащих в носителе (заметим, что первая производная функции $\omega_{\mathcal{J}+1}^{\flat}$ в точках $x_{\mathcal{J}+1}$ и $x_{\mathcal{J}+4}$ непрерывна). Таким образом, можно считать, что значения $\omega_j^{\flat} \in C(\alpha, \beta) \cap \mathcal{C}_X^2 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

Распространение функционалов соответствующей биортогональной системы на $C(\alpha, \beta) \cap \mathcal{C}_X^2$ получается по формулам (3.2)–(3.4), если там положить $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^{\flat}$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}^{\flat} &= \left(1 + (x_{\mathcal{J}} - \xi_{\mathcal{J}}) \frac{d}{dt} + \frac{(x_{\mathcal{J}} - \xi_{\mathcal{J}})^2}{2} \frac{d^2}{dt^2}\right) \Big|_{t=\xi_{\mathcal{J}}}, && \xi_{\mathcal{J}} \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \\ \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}^{\flat} &= \left(1 + \left(\frac{x_{\mathcal{J}} + x_{\mathcal{J}}}{2} - \xi_{\mathcal{J}}\right) \frac{d}{dt} + \frac{(x_{\mathcal{J}} - \xi_{\mathcal{J}+1})(x_{\mathcal{J}+1} - \xi_{\mathcal{J}+1})}{2} \frac{d^2}{dt^2}\right) \Big|_{t=\xi_{\mathcal{J}+1}}, && \xi_{\mathcal{J}+1} \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \\ \hat{\omega}_{\mathcal{J}}^{\flat} &= \left(1 + \left(\frac{x_{\mathcal{J}+1} + x_{\mathcal{J}+3}}{2} - \xi_{\mathcal{J}+2}\right) \frac{d}{dt} + \frac{(x_{\mathcal{J}+1} - \xi_{\mathcal{J}+2})(x_{\mathcal{J}+3} - \xi_{\mathcal{J}+2})}{2} \frac{d^2}{dt^2}\right) \Big|_{t=\xi_{\mathcal{J}+2}}, && \xi_{\mathcal{J}+2} \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}).\end{aligned}$$

Один из вариантов упомянутой биортогональной системы можно получить переходом к пределу $\xi_{\mathcal{J}} \rightarrow x_{\mathcal{J}} + 0$, $\xi_{\mathcal{J}+1} = \xi_{\mathcal{J}+2} \rightarrow x_{\mathcal{J}} + 0$. В результате для $u \in C(\alpha, \beta) \cap \mathcal{C}_X^1$ находим

$$\begin{aligned}\langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-2}^b, u \rangle &= u(x_{\mathcal{J}}), \\ \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}-1}^b, u \rangle &= u(x_{\mathcal{J}+1}) + \frac{x_{\mathcal{J}} - x_{\mathcal{J}+1}}{2} \frac{du}{dt}(x_{\mathcal{J}+1} + 0), \\ \langle \hat{\omega}_{\mathcal{J}}^b, u \rangle &= u(x_{\mathcal{J}+1}) + \frac{x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+1}}{2} \frac{du}{dt}(x_{\mathcal{J}+1} + 0).\end{aligned}\tag{5.7}$$

Рассмотрим линейное пространство $\tilde{X}^b \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \tilde{u}^b \mid \tilde{u}^b(t) = \sum_{j \in \mathcal{Z}} c_j \omega_j^b(t) \ \forall t \in M, \ \forall c_j \in \mathcal{R}^1 \right\}$; очевидно, что $\tilde{X}^b \subset \mathcal{C}_X^1 \cap C(\alpha, \beta)$, а функция $\tilde{u}^b \in \tilde{X}^b$, $\tilde{u}^b \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in \mathcal{Z}} v_j \omega_j^b(t)$, является решением интерполяционной задачи вида

$$u(x_{\mathcal{J}}) = v_{\mathcal{J}}, \quad u(\xi_{\mathcal{J}+1}) = v_{\mathcal{J}+1}, \quad \frac{du}{dt}(\xi_{\mathcal{J}+1} + 0) = v_{\mathcal{J}+2}, \quad u \in \mathcal{C}_X^1 \cap C(\alpha, \beta).$$

Замечание 4. Пусть сетка $\overline{X}_1$ получена из сетки X удалением одного или нескольких узлов, а пространство $\tilde{X}_1^b$ построено аналогично пространству $\tilde{X}^b$ с использованием новой сетки $\overline{X}_1$; тогда справедливо включение $\tilde{X}_1^b \subset \tilde{X}^b$. Благодаря этому на последовательности измельчающихся сеток можно получить последовательность вложенных пространств псевдоэрмитовых сплайнов. Использование биортогональных систем вида (5.7) теперь приведет к вейвлетным разложениям упомянутых пространств (аналогично тому, как это сделано в работе [5] для сплайнов нулевой высоты), к соответствующим калибровочным соотношениям и к формулам декомпозиции/реконструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. Стрэнг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М: Мир, 1977.
3. Михлин С.Г. Вариационно-сеточная аппроксимация // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1974. **48**. 32–188.
4. Демьянович Ю.К. Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб, 1994.
5. Демьянович Ю.К. Всплесковые разложения в пространствах сплайнов на неравномерной сетке // Докл. РАН. 2002. **382**, № 3. 313–316.

Поступила в редакцию
30.08.2004