

doi 10.26089/NumMet.v25r101

УДК 519.63

Вычислительный алгоритм продолжения потенциальных полей в сторону гравитирующих масс

П. Н. Вабищевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Российская Федерация
Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Саров, Саров, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-2040-4411, e-mail: vab@cs.msu.ru

Аннотация: В гравиразведке важнейшей является задача продолжения потенциальных полей с поверхности Земли вглубь. На основе решения такой задачи идентифицируется положение аномалий гравитационного поля. Приближенное решение задачи продолжения потенциальных полей часто базируется на решении интегрального уравнения первого рода с применением тех или иных процедур регуляризации. Аналогичный подход используется в нашей работе, когда продолженное поле представляется в виде потенциала простого слоя или его вертикальной производной. Плотность эквивалентного простого слоя положительна (отрицательна) для положительных (отрицательных) аномалий плотности при условии, что поверхность эквивалентного потенциала простого слоя включает все аномалии. Учет этого свойства является ключевой особенностью предложенного вычислительного алгоритма продолжения потенциальных полей в сторону аномалий. Определение неотрицательной плотности потенциала простого слоя базируется на NNLS (Non-Negative Least Squares) методе. Эффективность разработанного вычислительного алгоритма иллюстрируется расчетами для двумерных задач.

Ключевые слова: гравитационное аномальное поле, метод интегральных уравнений, потенциал простого слоя, метод наименьших квадратов.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ (грант № 23–41–00037).

Для цитирования: Вабищевич П.Н. Вычислительный алгоритм продолжения потенциальных полей в сторону гравитирующих масс // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 1. 1–9. doi 10.26089/NumMet.v25r101.

Computational algorithm for the continuation of potential fields towards gravitating masses

Petr N. Vabishchevich

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russia
Sarov Branch of Moscow State University, Sarov, Russia
ORCID: 0000-0002-2040-4411, e-mail: vab@cs.msu.ru

Abstract: The continuation of potential fields from the Earth's surface into the depths is the most important problem in gravity exploration. Based on the solution of such a problem, the location of gravity field anomalies is identified. The solution of the integral equation of the first kind with the application of some regularization procedures is often used for the approximate solution of the problem of the continuation of potential fields. A similar approach is used in our work when the

continued field is represented as a simple layer potential or its vertical derivative. The density of the equivalent simple layer potential is positive (negative) for positive (negative) density anomalies, provided that the surface of the equivalent simple layer potential contains all of the anomalies. The consideration of this property is a key feature of the proposed calculation algorithm for continuation of potential fields with respect to anomalies. The determination of the non-negative density of the simple layer potential is based on the NNLS (Non-Negative Least Squares) method. The efficiency of the developed computational algorithm is illustrated by calculating two-dimensional problems.

Keywords: anomalous gravitational field, method of integral equations, simple layer potential, method of least squares.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 23–41–00037).

For citation: P. N. Vabishchevich, “Computational algorithm for the continuation of potential fields towards gravitating masses,” *Numerical Methods and Programming*. 25 (1), 1–9 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r101.

1. Введение. Важный класс прикладных задач геофизики связан с гравиметрией, когда исследуются неоднородности в структуре земной коры и их влияние на гравитационное поле Земли [1]. Основной измеряемой величиной служит ускорение свободного падения, а гравитационная аномалия есть разность между наблюдаемым значением и нормальным значением силы тяжести. Анализ данных гравитационной разведки дает возможность получить информацию о распределении неоднородных по плотности масс в верхней части земной коры [1, 2].

Прямая задача гравиметрии связывается с определением гравитационного поля, которое создается телом с заданными физическими и геометрическими характеристиками. При интерпретации данных наблюдений решаются обратные задачи гравиметрии, когда по заданным значениям гравитационного поля в некоторой области наблюдения определяются характеристики тяготеющего тела. Отдельно выделяются задачи трансформации гравитационного поля, продолжения гравитационного поля в сторону тяготеющего тела, задачи определения формы и плотности аномалий. Численные методы решения прямых и обратных задач геофизики обсуждаются в книге [3].

Гравитационный потенциал определяется как ньютоновский (объемный) потенциал. Измеряемое гравитационное поле связывается с производными потенциала первого и более высокого порядка. Сами измерения проводятся на поверхности Земли. Задача продолжения гравитационного поля в сторону аномалий позволяет более явно выявить положение аномалий [4]. Гравитационный потенциал и его производные вне аномалий удовлетворяют уравнению Лапласа, и поэтому мы имеем задачи продолжения решений эллиптических уравнений за границу расчетной области, которые можно формулировать как задачу Коши для эллиптических уравнений.

Задача Коши для эллиптических уравнений принадлежит к классу некорректных задач [5], когда малые возмущения входных данных (измерения на границе) приводят к большим возмущениям решения. Для ее приближенного решения необходимо использовать регуляризирующие алгоритмы [6, 7]. Среди различных подходов к приближенному решению условно-корректных эволюционных задач можно выделить [8] метод регуляризации А. Н. Тихонова, методы возмущения уравнения (метод квазиобращения), отдельно отметим алгоритмы с возмущением начальных условий (нелокальные краевые задачи). В современной вычислительной практике наиболее широко используются итерационные методы, когда в качестве параметра регуляризации выступает число итераций.

При численном решении задачи Коши для уравнений в неограниченной области можно использовать интегральные уравнения, численные методы для которых хорошо разработаны [9]. Применительно к задачам продолжения потенциала такой подход применялся еще в работе [10]. При приближенном решении некорректных задач принципиальное повышение точности достигается [11] при учете дополнительной информации о решении.

В данной работе используется метод интегральных уравнений, когда продолженное поле представляется в виде потенциала простого слоя или его вертикальной производной. Показано, что плотность

эквивалентного простого слоя положительна (отрицательна) для положительных (отрицательных) аномалий плотности при условии, что поверхность эквивалентного потенциала простого слоя включает все аномалии. На основе такой априорной информации о плотности потенциала простого слоя строится вычислительный алгоритм продолжения потенциальных полей в сторону аномалий. Для нахождения неотрицательной плотности потенциала простого слоя используется известный NNLS (Non-Negative Least Squares) метод [12].

2. Постановка задачи. Рассматривается задача продолжения гравитационных полей при измерениях на поверхности Земли. Гравитационная аномалия определяется разностью плотности залегающих масс и плотности окружающих пород. Обозначим аномальную плотность $\varrho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, и будем считать, что аномалия занимает область D . Измерения проводятся на части земной поверхности Γ , как это показано на рис. 1.

Аномальное гравитационное поле определяется через объемный потенциал

$$u(\mathbf{x}) = \int_D \varrho(\mathbf{y})K(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad (1)$$

где ядро (трехмерная задача)

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}, \quad |\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2,$$

G — универсальная гравитационная постоянная.

На части земной поверхности Γ измеряется вертикальная производная гравитационного потенциала. В соотношении

$$\frac{\partial u}{\partial l}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2)$$

$\partial/\partial l$ — производная по вертикали, $g(\mathbf{x})$ — заданная функция.

Прямая задача гравиметрии состоит в вычислении гравитационного поля $g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, при заданной плотности $\varrho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$, объемного потенциала (1). Общая обратная задача гравиметрии состоит в том, чтобы по известной $g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, получить информацию об области залегания аномалий D , аномальной плотности $\varrho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$. В такой общей постановке решение обратной задачи гравиметрии не единственно. Поэтому рассматриваются более частные задачи определения по доступным измерениям: области залегания аномалии с заданной плотностью, определение плотности для известной геометрии аномалии и т.д.

Положение аномалий с постоянной заданной плотностью лучше локализуется при измерениях вблизи этих аномалий. Задача продолжения гравитационного поля состоит в переносе данных наблюдений вглубь земной поверхности: с Γ на поверхность продолжения γ (рис. 2).

3. Интегральное уравнение. Для решения задачи продолжения будем использовать стандартный подход, который связан с методом интегральных уравнений. Объемный потенциал (1) над поверхностью продолжения γ приближается потенциалом простого слоя

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \mu(\mathbf{y})K(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}. \quad (3)$$

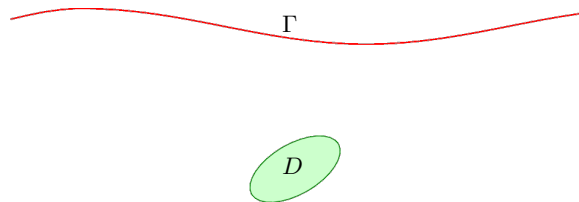


Рис. 1. Схема измерений: аномалия D с $\varrho(\mathbf{x}) \neq 0$, Γ — поверхность наблюдений

Fig. 1. Measurement scheme: anomaly D with $\varrho(\mathbf{x}) \neq 0$, Γ — observation area

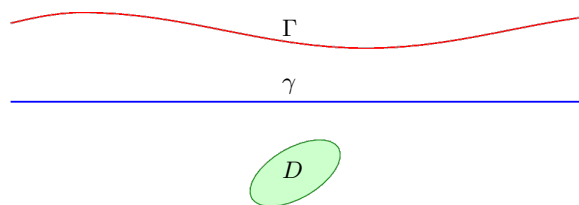


Рис. 2. Продолжение гравитационного поля: Γ — поверхность наблюдений, γ — поверхность продолжения

Fig. 2. Continuing the gravitational field: Γ — observing surface, γ — continuing surface

Из условия (2) получим интегральное уравнение

$$\int_{\gamma} \mu(\mathbf{y}) \tilde{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (4)$$

для плотности $\mu(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \gamma$. Для ядра имеет место представление

$$\tilde{K}(\mathbf{x}, \cdot) = \frac{\partial K}{\partial l}(\mathbf{x}, \cdot).$$

Для приближенного решения интегрального уравнения первого рода (4) можно использовать метод регуляризации А. Н. Тихонова [11].

Повышение точности достигается за счет априорных ограничений на ядро интегрального уравнения.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу в области Ω , которая включает аномалии (рис. 3) ($D \subset \Omega$). Функция $v(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, удовлетворяет, как и объемный потенциал $u(\mathbf{x})$, уравнению Пуассона:

$$\Delta v = -\varrho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5)$$

На границе задается однородное условие первого рода:

$$v(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (6)$$

На решениях краевой задачи (5), (6) применение третьей формулы Грина для точек вне расширенной области Ω дает

$$\int_D \varrho(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n}(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Тем самым мы имеем представление объемного потенциала (1) через решение вспомогательной задачи (5), (6):

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n}(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (7)$$

Такой переход к задаче меньшей размерности используется и при решении прямой задачи [13].

Будем рассматривать класс задач гравиметрии со знакопостоянной аномальной плотностью. Для определенности считаем, что $\varrho(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in D$. Принцип максимума для краевой задачи (5), (6) дает $v(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, и поэтому

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Принимая во внимание (7), имеем представление аномального поля через потенциал простого слоя с неотрицательной плотностью.

Эти ограничения мы используем при применении метода интегральных уравнений, когда в (3)

$$\mu(\mathbf{x}) \in K, \quad K = \{s(\mathbf{x}) \mid s(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega\}. \quad (8)$$

Ищется приближенное решение интегрального уравнения (4) в классе априорных ограничений (8) на его ядро.

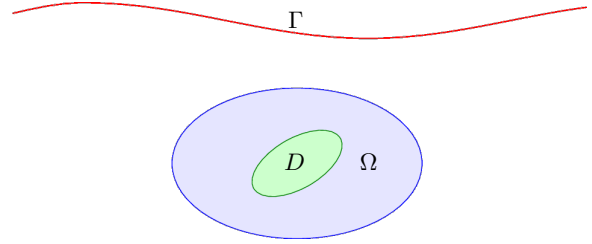


Рис. 3. Вспомогательная задача: D — область аномалий, Ω — расширенная область

Fig. 3. Auxiliary problem: D — anomaly region, Ω — extended region



4. Вычислительный алгоритм и примеры расчетов. Возможности предложенного алгоритма иллюстрируются результатами приближенного решения двумерной задачи продолжения гравитационного поля.

4.1. Вычислительная реализация. Для двумерной задачи $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ с граничными условиями $\partial/\partial l = \partial/\partial x_2$, $x_2 = \text{const}$ на γ решается интегральное уравнение

$$\int_{\gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{x_2 - y_2}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} d\mathbf{y} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (9)$$

На поверхности наблюдений задаются точки измерений $\mathbf{x}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$ ($\mathbf{x}^{(j)} \in \Gamma$), и пусть $f_j = g(\mathbf{x}^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, n$. Для приближения интеграла в (9) применяется квадратурная формула прямоугольников. Будем использовать равномерное разбиение γ на m частей с узлами $\mathbf{y}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Приходим к дискретной задаче

$$A\varphi = f \quad (10)$$

с соответствующими элементами матрицы A для нахождения приближенного решения φ :

$$\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}, \quad \varphi_i \approx \mu(\mathbf{x}^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Приближенное решение задачи (10) проводится методом наименьших квадратов:

$$\|A\varphi - f\| \rightarrow \min. \quad (11)$$

С учетом (8) минимизация невязки проводится на множестве

$$\varphi \geq 0. \quad (12)$$

Вычислительные алгоритмы для задачи минимизации (11), (12) хорошо изучены [12, 14]. В вычислительной практике наиболее широко используется NNLS (Non-Negative Least Squares) алгоритм, подробно описанный в книге [12]. В приведенных ниже расчетах мы использовали Non-negative least squares solver из библиотеки SciPy [15] (модуль optimize, функция nnls).

4.2. Тестовая задача. Будем считать, что аномалия характеризуется постоянной плотностью (равной единице при используемой системе измерений) и область залегания D — два круга с центрами $(-0.2, -0.3)$, $(0.1, -0.4)$ и радиусами 0.05, 0.1 соответственно. Поверхность наблюдения и поверхность продолжения:

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \mid -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\}, \quad \gamma = \{\mathbf{x} \mid -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 = -h\},$$

где h — глубина продолжения. Такая модельная двумерная задача рассматривалась в [8]. Аномальное поле на различных глубинах

$$g(x_1) = -\frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \quad x_2 = -h$$

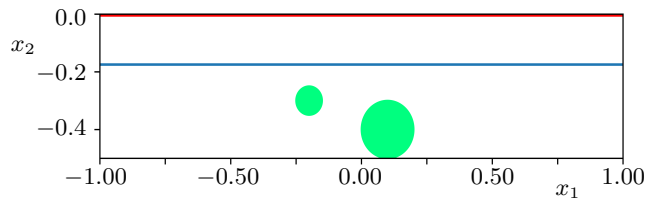
приведено на рис. 4. При продолжении поля мы имеем возможность разделить и локализовать по горизонтали две аномалии.

4.3. Решение задачи продолжения. Отрезки Γ и γ разбиваются равномерно на n и m отрезков соответственно. Для базового варианта положим $n = 200$ и $m = 100$. Приближенное решение задачи при продолжении поля с земной поверхности на различную глубину показано на рис. 5. При малых глубинах продолжения приближенное решение для неотрицательной плотности φ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, не равно нулю во многих узлах $\mathbf{y}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$. При приближении к аномалии число положительных φ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, уменьшается при увеличении амплитуды. Мы имеем эффект локализации аномалии по горизонтали (по переменной x_1).

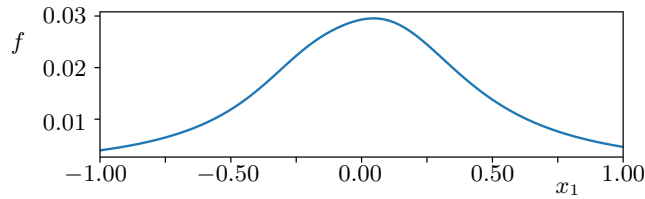
Обозначим $\varphi(h)$ приближенное решение задачи продолжения на глубину h и невязку

$$\chi(h) = \|A\varphi(h) - f\|$$

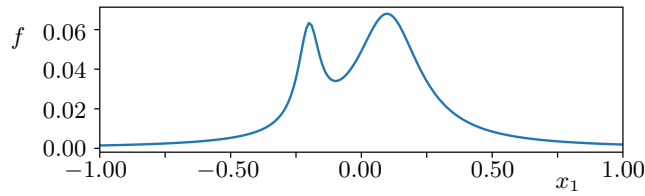
на решениях задачи (11), (12). Зависимость невязки от глубины продолжения при разных разбиениях Γ и γ приведена на рис. 6. Невязка приближенного решения практически не зависит от числа точек измерений n и от числа узлов квадратурной формулы m . Принципиально важно, что локальный минимум



a)

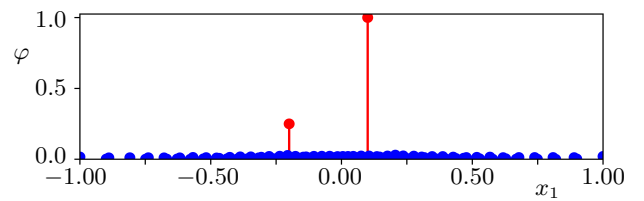


b)

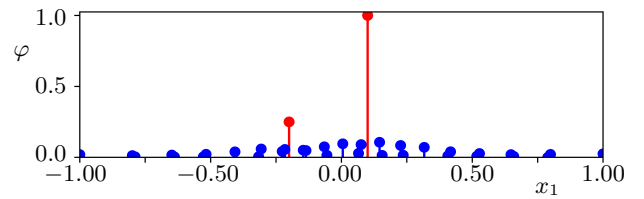


c)

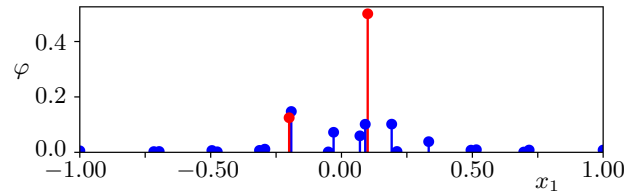
Рис. 4. Аномальное поле: а) схема измерений; б) поле при $h = 0$; в) поле при $h = 0.25$
 Fig. 4. Anomalous field: a) measurement scheme; б) field at $h = 0$; в) field at $h = 0.25$



a)



b)



c)

Рис. 5. Точная (красный цвет) и расчетная (синий) плотность потенциала простого слоя при: а) $h = 0.1$; б) $h = 0.2$; в) $h = 0.3$
 Fig. 5. Exact (red) and calculated (blue) potential density of the simple layer at: а) $h = 0.1$; б) $h = 0.2$; в) $h = 0.3$

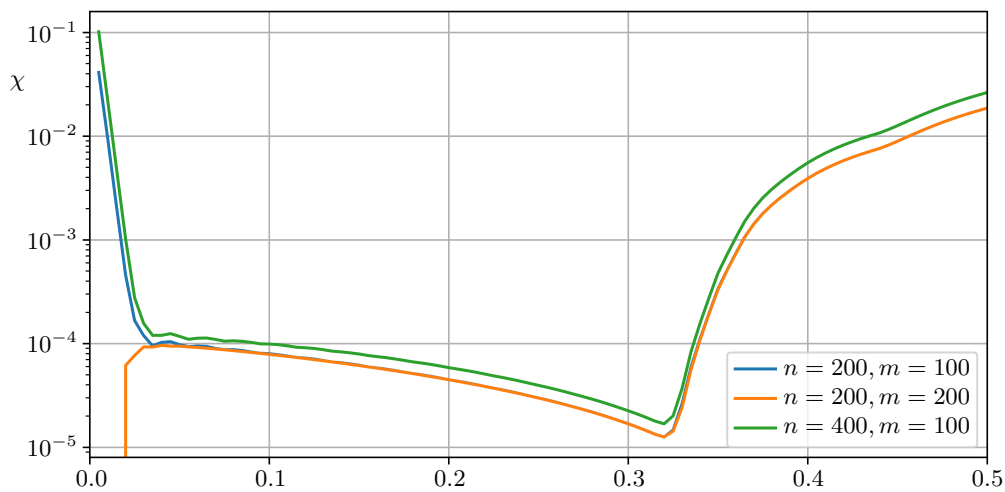


Рис. 6. Невязка приближенного решения при различных значениях расчетных параметров
 Fig. 6. Discrepancy of the approximate solution at different values of the computational parameters



невязки достигается вблизи центра аномалий. Фактически при параметрическом решении задачи продолжения с использованием потенциала простого слоя на различных глубинах мы можем оценивать глубину залегающих аномалий. Плотность потенциала простого слоя при $h = 0.325$ при варьировании расчетных параметров показана на рис. 7. Эти расчеты демонстрируют вычислительную надежность используемого вычислительного алгоритма.

4.4. Защищенные данные. При численном решении некорректных задач специальное внимание уделяется случаю, когда входные данные известны с некоторой погрешностью. Будем считать, что измерения гравитационного поля в точках наблюдения заданы с ошибкой. Вместо f_j , $j = 1, 2, \dots, m$, имеем

$$\tilde{f}_j = f_j + \delta \max_{1 \leq k \leq m} |f_k| \sigma_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь σ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ — случайная величина, которая равномерно распределена на $[-1, 1]$. Параметр δ определяет амплитуду возмущений.

Глубина расположения потенциала простого слоя выступает в качестве параметра регуляризации. С учетом поведения невязки будем оценивать h_δ как максимальную величину h , для которой имеет место

$$\|A\varphi(h) - \tilde{f}\| \leq \delta \sqrt{m} \max_{1 \leq j \leq m} |f_j|.$$

Результаты численного решения задачи при уровне погрешности $\delta = 1\%$ представлены на рис. 8. Глубина залегания по невязке оценивается величиной $h_\delta \approx 0.39$. Расчетные данные при $\delta = 2\%$ (рис. 9) дают $h_\delta \approx 0.435$.

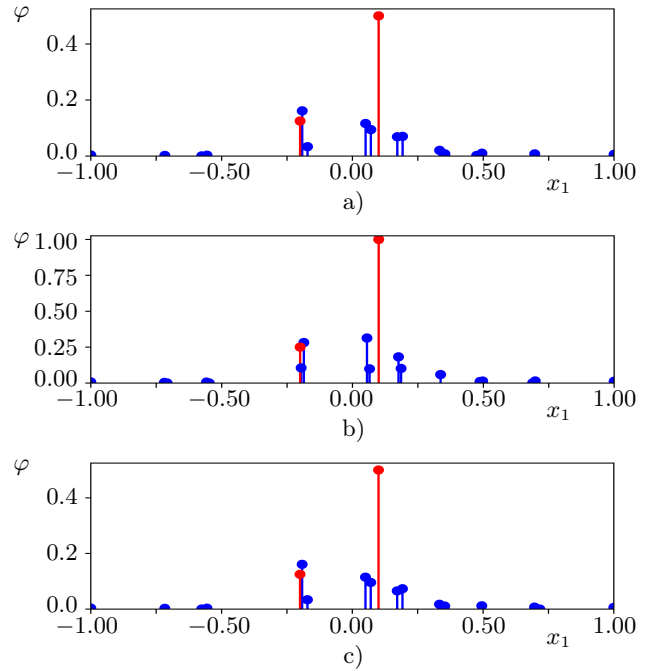
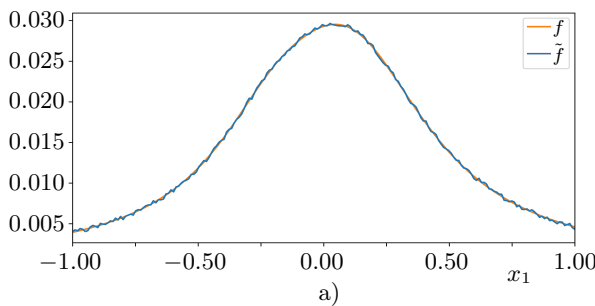


Рис. 7. Точная (красный цвет) и расчетная (синий) плотность потенциала простого слоя при $h = 0.325$ для: а) $n = 200$, $m = 100$; б) $n = 200$, $m = 200$; в) $n = 400$, $m = 100$

Fig. 7. Exact (red) and calculated (blue) potential density of the simple layer at $h = 0.325$ for: а) $n = 200$, $m = 100$; б) $n = 200$, $m = 200$; в) $n = 400$, $m = 100$

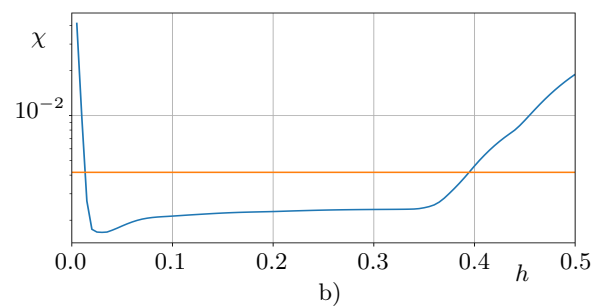
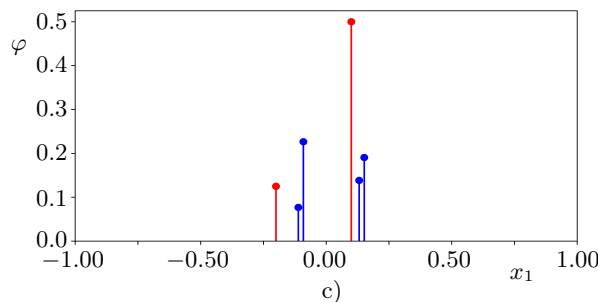


Рис. 8. Уровень погрешности $\delta = 1\%$: а) измерения; б) невязка; в) приближенное решение
 Fig. 8. Error level $\delta = 1\%$: а) measurements; б) discrepancy; в) approximate solution

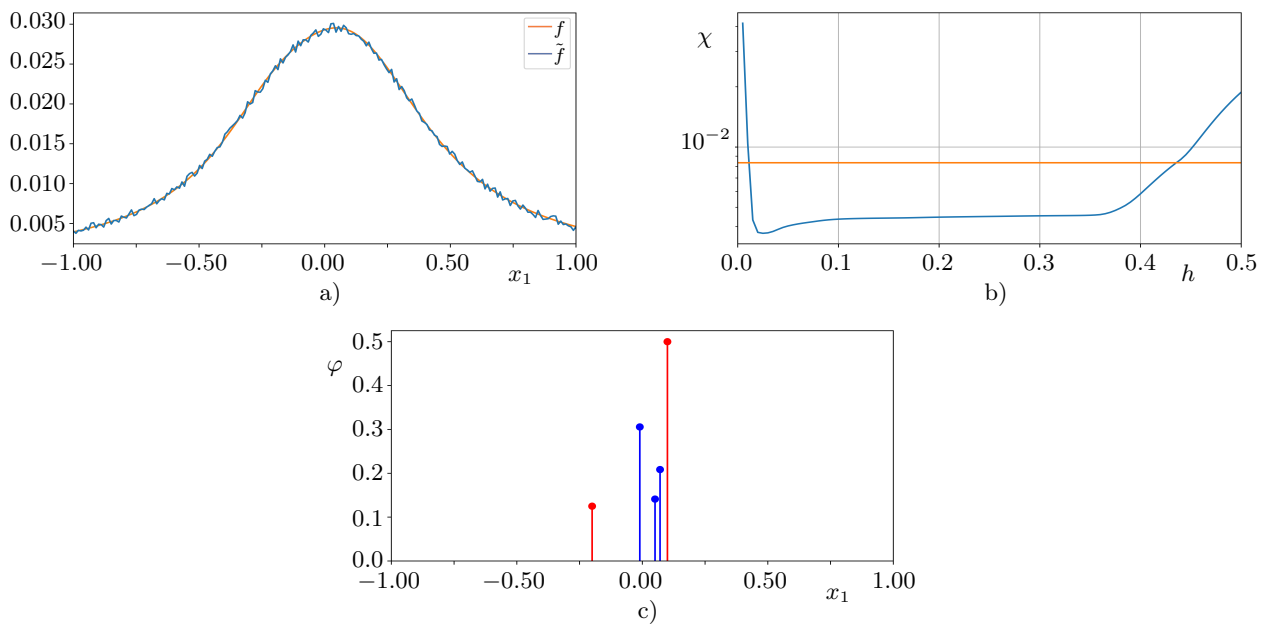


Рис. 9. Уровень погрешности $\delta = 2\%$: а) измерения; б) невязка; в) приближенное решение
 Fig. 9. Error level $\delta = 2\%$: a) measurements; b) discrepancy; c) approximate solution

5. Заключение. Приближенное решение некорректной задачи продолжения потенциальных полей с поверхности Земли в сторону залегающих масс базируется на использовании потенциала простого слоя. Такой подход широко используется в разведочной геофизике. Основные результаты работы формулируются следующим образом.

- Для задач со знакопостоянной аномальной плотностью выделен класс априорных ограничений на искомую плотность. Вычислительный алгоритм строится на основе метода наименьших квадратов при неотрицательности решения.
- Глубина расположения потенциала простого слоя выступает в качестве регуляризирующего параметра. Его оценка выполняется на основе принципа невязки при учете погрешности измерений гравитационного поля.
- Как показывают результаты численного решения модельной двумерной задачи продолжения, предложенный вычислительный алгоритм надежен и позволяет не только локализовать аномалию по горизонтали, но и дать оценку глубины залегания аномалий.

Список литературы

1. Мудрецова Е.А., Веселов К.Е. (Ред.) Гравиразведка. Справочник геофизика. М.: Недра, 1990.
2. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. М.: МГГА, 2009.
3. Ягола А.Г., Янфей В., Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином, 2014.
4. Долгаль А.С. Гравиметрия и магнитометрия: трансформации геопотенциальных полей. Пермь: ПГНИУ, 2022.
5. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Институт математики, 2010.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Издательство Сибирского Отделения РАН, 2018.
8. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics. Berlin: De Gruyter, 2007.
9. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочник. Киев: Наукова Думка, 1986.



10. Тихонов А.Н., Гласко В.Б., Литвиненко О.К., Мелихов В.Р. О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс в гравиметрической и магнитной разведках на основе метода регуляризации // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1968. № 2. 30–48.
11. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
12. Lawson C.L., Hanson R.J. Solving least squares problems. Philadelphia: SIAM Press, 1995.
13. Вабищевич П.Н., Пулатов П.А. Экономичные разностные методы решения прямых задач грави- и магнито-разведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1983. № 10. 68–76.
14. Björck A.A. Numerical methods for least squares problems. Philadelphia: SIAM Press, 1996.
15. Fundamental algorithms for scientific computing in Python. <https://scipy.org/>. Cited January 10, 2024.

Поступила в редакцию
 15 ноября 2023 г.

Принята к публикации
 7 декабря 2023 г.

Информация об авторе

Петр Николаевич Вабищевич — д.ф.-м.н., профессор; 1) Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, 119991, Москва, Российская Федерация; 2) Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Саров, ул. Парковая, д. 8, 607328, Саров, Российская Федерация.

References

1. E. A. Mudretsova and K. E. Veselov (Eds.), *Gravimetry: A Handbook in Geophysics* (Nedra, Moscow, 1990) [in Russian].
2. Yu. I. Blokh, *Interpretation of Gravitational and Magnetic Anomalies* (MGGA, Moscow, 2009) [in Russian].
3. A. G. Yagola, V. Yanfei, I. E. Stepanova, and V. N. Titarenko, *Inverse Problems and Methods of Their Solution. Applications to Geophysics* (Binom, Moscow, 2014) [in Russian].
4. A. S. Dolgal, *Gravimetry and Magnetometry: Transformations of Geopotential Fields* (PGNIU, Perm, 2022) [in Russian].
5. M. M. Lavrentiev and L. Ya. Savelyev, *Theory of Operators and Ill-Posed Problems* (Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2010) [in Russian].
6. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1974; Wiley, New York, 1977).
7. S. I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications* (De Gruyter, Berlin, 2011).
8. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics* (De Gruyter, Berlin, 2007).
9. A. F. Verlan' and V. S. Sizikov, *Integral Equations: Methods, Algorithms, and Programs. Reference Book* (Naukova Dumka, Kiev, 1986) [in Russian].
10. A. N. Tikhonov, V. B. Glasko, O. K. Litvinenko, and V. R. Melikhov, "On the Continuation of the Potential toward Perturbing Masses in Gravimetric and Magnetic Reconnaissance on the Basis of the Regularization Method," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Zemli*, No. 2. 30–48 (1968).
11. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1990; Kluwer, Dordrecht, 1995).
12. C. L. Lawson and R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems* (SIAM Press, Philadelphia, 1995).
13. P. N. Vabishchevich and P. A. Pulatov, "Economical Difference Methods for Solving Direct Problems of Gravi- and Magnetosurvey," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Zemli*, No. 10. 68–76 (1983).
14. A. A. Björck, *Numerical Methods for Least Squares Problems* (SIAM Press, Philadelphia, 1996).
15. Fundamental algorithms for scientific computing in Python. <https://scipy.org/>. Cited January 10, 2024.

Received
 November 15, 2023

Accepted for publication
 December 7, 2023

Information about the author

Petr N. Vabishchevich — Dr. Sci., Professor; 1) Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia; 2) Sarov Branch of Moscow State University, Parkovaya ulitsa, 8, 607328, Sarov, Russia.