

Разностные схемы с весами для моделирования течений жидкости в приближении мелкой воды

П. Н. Вабищевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-2040-4411, e-mail: vab@cs.msu.ru

М. М. Чернышов

Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Саров,
Саров, Российская Федерация

ORCID: 0009-0002-0594-3350, e-mail: chernyshovmm@my.msu.ru

Аннотация: Математическое моделирование течений жидкости со свободной границей часто выполняется на основе приближения мелкой воды. Система уравнений включает скалярное уравнение адвекции для высоты жидкости и векторное уравнение адвекции для скорости. В данной работе приближенное решение начально-краевой задачи проводится на основе стандартной конечно-элементной аппроксимации по пространству. Используются неявные двухслойные схемы с весами по времени. Вычислительная реализация базируется на применении метода Ньютона. Обсуждается выполнение законов сохранения массы и полной механической энергии на непрерывном и дискретном уровне. Возможности рассматриваемых неявных схем иллюстрируются численными результатами приближенного решения одномерной и двумерной модельной задачи разрушения дамбы. Показано, что увеличение веса в двухслойной схеме обеспечивает большую монотонность приближенного решения.

Ключевые слова: система уравнений Эйлера, законы сохранения, приближение мелкой воды, метод конечных элементов, двухслойные схемы.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-41-00037).

Для цитирования: Вабищевич П.Н., Чернышов М.М. Разностные схемы с весами для моделирования течений жидкости в приближении мелкой воды // Вычислительные методы и программирование. 2023. 24, № 4. 450–462. doi 10.26089/NumMet.v24r431.

Difference schemes with weights for modelling fluid flows in the shallow water approximation

Petr N. Vabishchevich

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Moscow, Russia

ORCID: 0000-0002-2040-4411, e-mail: vab@cs.msu.ru

Mikhail M. Chernyshov

Sarov Branch of Moscow State University, Sarov, Russia

ORCID: 0009-0002-0594-3350, e-mail: chernyshovmm@my.msu.ru

Abstract: Mathematical modelling of free boundary fluid flows is often based on the shallow water approximation. The system of equations includes a scalar advection equation for fluid height and a vector advection equation for velocity. The paper presents an approximation of the initial boundary



value problem using the standard spatial finite element method. Time weights are used in implicit two-level schemes. The computational method is based on Newton’s method. The fulfillment of the laws of conservation of mass and total mechanical energy at the continuous and discrete level is discussed. Numerical results demonstrate the effectiveness of implicit schemes for approximating solutions to one- and two-dimensional model problems, specifically dam failure. It is shown that increasing the weight in the two-level scheme improves the monotonicity of the approximate solution.

Keywords: Euler system, conservation laws, shallow water approximation, finite element method, two-level schemes.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 23–41–00037).

For citation: P. N. Vabishchevich, M. M. Chernyshov, “Difference schemes with weights for modelling fluid flows in the shallow water approximation,” Numerical Methods and Programming, 24 (4), 450–462 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r431.

1. Введение. Математические модели механики сплошной среды [1, 2] базируются на законах сохранения массы, импульса и энергии. Основные особенности процессов связываются с переносом скалярных и векторных величин за счет адвекции [3, 4]. Для отдельных характеристик гидродинамического течения имеют место свойства положительности и монотонности. Отмеченные свойства дифференциальной задачи механики сплошной среды должны наследоваться при переходе к дискретной задаче [5, 6] с использованием тех или иных аппроксимаций по времени и по пространству.

При моделировании течений со свободной границей широко используется приближение мелкой воды [7, 8]. В этом случае применяются скалярное уравнение адвекции для высоты жидкости и векторное уравнение адвекции для скорости. Такие математические модели можно связать с уравнениями Эйлера для течений идеальных сжимаемых жидкостей [9], когда давление определяется заданной квадратичной зависимостью от плотности. Отмеченная аналогия позволяет использовать достижения вычислительной гидродинамики сжимаемых течений [10] при приближенном решении краевых задач для уравнений мелкой воды.

При численном моделировании течений жидкости большое внимание уделяется построению монотонных аппроксимаций для членов адвективного переноса, которые обеспечивают, в частности, неотрицательность плотности. В [11, 12] рассматриваются стандартные линейные аппроксимации применительно к базовым задачам механики сплошной среды — задачам конвекции–диффузии. Современный этап исследований [13–15] характеризуется использованием более сложных аппроксимаций, в частности нелинейных.

Законы сохранения массы и импульса наиболее просто обеспечиваются использованием консервативной (дивергентной) записи уравнений механики сплошной среды. Закон сохранения энергии является следствием этих уравнений, но нам сложно, в общем случае, рассчитывать на его выполнение на дискретном уровне. Консервативные аппроксимации наиболее естественно реализуются при использовании интегро-интерполяционного метода (метода баланса) на регулярных и нерегулярных сетках [16], в методе контрольного объема [4, 17]. В настоящее время основной вычислительной технологией решения прикладных проблем является метод конечных элементов [18, 19]. Он широко применяется в вычислительной гидродинамике [20, 21], на основе конечно-элементных аппроксимаций строятся консервативные вычислительные алгоритмы.

При аппроксимации по времени в вычислительной гидродинамике часто ориентируются на использование явных схем, которые имеют жесткие ограничения по устойчивости на временной шаг. В частности, для типичных задач адвекции явные схемы абсолютно неустойчивы [22, 23]. Отметим также, что для явных схем имеются подобные ограничения по монотонности решения сеточной задачи. Более естественно ориентироваться на неявные схемы. При решении краевых задач для уравнений с частными производными традиционно широко используются двухслойные схемы (θ -метод, схемы с весами) [14, 24, 25]. Для линейных задач исследование аппроксимаций по времени может базироваться на основе общей теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [16, 26]. Для нелинейных задач мы можем рассчитывать на безусловные априорные оценки в соответствующих конечномерных пространствах.

В настоящей работе мы рассматриваем начально-краевую задачу для уравнений мелкой воды, для которой имеют место законы сохранения массы, импульса и полной механической энергии. Аппроксимация по пространству проводится на основе использования стандартных линейных элементов для плотности и декартовых компонент скорости. Для нахождения приближенного решения на новом слое по времени используется схема с весами. Для приближенного решения нелинейной дискретной задачи на новом слое по времени применяется метод Ньютона. Подчеркнем, что никаких специальных процедур монотонизации не используется. Устанавливается закон сохранения массы, получена также оценка для диссипации полной механической энергии за счет аппроксимаций по времени. Возможности предложенных схем иллюстрируются результатами численного решения модельной задачи разрушения дамбы в одномерной и двумерной постановках.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать течение несжимаемой жидкости со свободной границей в цилиндрическом сосуде сечением Ω с твердыми границами и плоским дном. Уравнение для высоты слоя жидкости в цилиндре имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}h) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \tag{1}$$

где $h(\mathbf{x}, t) > 0$ — высота, а $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — горизонтальная скорость. Уравнение движения запишем в консервативном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\mathbf{u}) + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gh \operatorname{grad} h = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \tag{2}$$

где g — ускорение свободного падения, символом \otimes обозначено тензорное произведение двух векторов.

Боковая граница считается твердой. В силу этого имеем граничное условие непротекания

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Задаются также начальные условия для высоты слоя жидкости и для скорости:

$$h(\mathbf{x}, 0) = h_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{4}$$

Начально-краевая задача (1)–(4) описывает двумерные нестационарные течения несжимаемой жидкости со свободной границей в приближении мелкой воды.

Непосредственным интегрированием уравнения неразрывности (1) по области Ω с учетом граничного условия (3) получаем закон сохранения массы:

$$m(t) = m(0), \quad m(t) = \varrho \int_{\Omega} h(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}, \tag{5}$$

где $\varrho = \operatorname{const} > 0$ — плотность жидкости. В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ определим скалярное произведение и норму

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}.$$

Аналогично определяется пространство векторных функций $\mathbf{L}_2(\Omega)$. При неотрицательности высоты слоя жидкости закон сохранения массы дает

$$\|h^{1/2}(\mathbf{x}, t)\| = \|h_0^{1/2}(\mathbf{x})\|.$$

Это соотношение можно рассматривать как априорную оценку в $L_2(\Omega)$ для $h^{1/2}$.

Уравнение (2) напрямую выражает закон сохранения импульса. Интегрируя это уравнение по Ω , получим

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(h\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} + \frac{g}{2} \int_{\partial\Omega} h^2 \mathbf{n} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Тем самым имеет место

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(0) - \frac{g\varrho}{2} \int_0^t \int_{\partial\Omega} h^2 \mathbf{n} \, d\mathbf{x} \, dt, \quad \mathbf{I}(t) = \varrho \int_{\Omega} h\mathbf{u} \, d\mathbf{x}. \tag{6}$$



Принимая во внимание уравнение (1) и равенство

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(h\mathbf{u}^2) = \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial t}(h\mathbf{u}) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \frac{\partial h}{\partial t}$$

и домножая уравнение (2) на \mathbf{u} , получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(h\mathbf{u}^2) + \frac{1}{2} \operatorname{div}(h\mathbf{u}^2\mathbf{u}) + gh\mathbf{u} \operatorname{grad} h = 0. \quad (7)$$

Уравнение (1) домножим на gh :

$$\frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial t} + gh \operatorname{div}(\mathbf{u}h) = 0. \quad (8)$$

Складывая (7), (8), приходим к равенству

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(h\mathbf{u}^2) + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{div}(h\mathbf{u}^2\mathbf{u}) + g \operatorname{div}(\mathbf{u}h^2) = 0.$$

Интегрирование по области Ω с учетом (3) дает

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} h\mathbf{u}^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Приходим к закону сохранения полной механической энергии

$$E(t) = E(0), \quad E(t) = \rho \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} h\mathbf{u}^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) d\mathbf{x}. \quad (9)$$

Мы можем рассматривать (9) как априорную оценку

$$\|h^{1/2}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}\|^2 + g\|h(\mathbf{x}, t)\|^2 = \|h_0^{1/2}\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\|^2 + g\|h_0(\mathbf{x})\|^2$$

для высоты слоя жидкости и скорости.

Равенства (5), (6) и (9) являются основными законами сохранения для задачи (1)–(4). Качество используемых аппроксимаций по пространству и времени оценивается, в частности, по выполнению законов сохранения на дискретном уровне.

3. Неявные двухслойные схемы. Для приближенного решения начально-краевой задачи для уравнений мелкой воды используются двухслойные схемы с весами. Аппроксимация по пространству обеспечивается стандартными линейными конечными элементами [27, 28]. Для двумерных векторных величин используется координатное представление $\mathbf{v} = \{v_1, v_2\}$ при кусочно-линейной аппроксимации по пространству отдельных компонент вектора.

Расчетная область Ω предполагается многоугольником, в котором выполнена триангуляция. Определим пространство линейных конечных элементов $V^h \subset H^1(\Omega)$, где $H^1(\Omega)$ — гильбертово пространство Соболева с нормой

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} (\varphi^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2) d\mathbf{x} \right]^{1/2}.$$

Для простоты задания граничных условий (3) будем считать, что отдельные части границы расчетной области параллельны координатным осям. В соответствии с (3) на отдельных частях границы области $\Gamma_i \subset \partial\Omega$, $i = 1, 2$, для компонент скорости $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}$ задаются условия Дирихле:

$$u_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

С учетом граничных условий (10) определим подпространства

$$V_i^h = \{\varphi \in V^h : \varphi(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Векторы $\mathbf{v} = \{v_1, v_2\}$ задаются на прямой сумме V_1^h и V_2^h :

$$\mathbf{V}^h = \{\mathbf{v} = \{v_1, v_2\} : v_i(\mathbf{x}) \in V_i^h, i = 1, 2\}.$$

Конечно-элементное приближение $h \in V^h$, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^h$ задачи (1)–(4) определяется из выполнения равенств

$$\left(\frac{dh}{dt}, \varphi\right) + (\operatorname{div}(\mathbf{u}h), \varphi) = 0, \tag{11}$$

$$\left(\frac{d}{dt}(h\mathbf{u}), \mathbf{v}\right) + (\operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}), \mathbf{v}) + g(h \operatorname{grad} h, \mathbf{v}) = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{12}$$

$$(h(0), \varphi) = (h_0, \varphi), \quad (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \tag{13}$$

для всех $\varphi \in V^h$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^h$.

Пространственная аппроксимация приводит к тому, что законы сохранения могут нарушаться. Конечно, закон сохранения массы для неотрицательной высоты слоя жидкости следует из (11). Достаточно положить $\varphi = \operatorname{const} \in V^h$. В случае, например, уравнения (12) обеспечить точное выполнение закона сохранения импульса в общем случае не удастся. При конечно-элементной аппроксимации мы работаем в классе тестовых функций $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^h$, в то время как для выполнения закона сохранения необходимо выполнение (12) при $\mathbf{v} = \operatorname{const} \neq 0$. Дисбаланс связан с последним членом в левой части равенства (12), которого нет, например, в задачах, если $\operatorname{grad} h = 0$ в окрестности границы. Тем самым мы имеем прямой аналог закона сохранения импульса на дискретном уровне только для некоторых частных случаев. Нарушение закона сохранения полной энергии при конечно-элементной аппроксимации по пространству имеет схожую природу. Влияние аппроксимаций по времени мы обсуждаем ниже.

Пусть τ — шаг равномерной (для простоты) сетки по времени: $u^n = u(t^n)$, $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$, $N\tau = T$. При аппроксимации по времени мы отслеживаем выполнение законов сохранения массы и полной механической энергии, с которыми можно связать соответствующие априорные оценки для решения задачи. Такие важные проблемы, как положительность (неотрицательность) высоты слоя жидкости на каждом шаге по времени, требуют более глубокого исследования и в данной работе не затрагиваются. Мы будем считать, что высота слоя жидкости положительна, т.е. на каждом слое по времени $h^n > 0$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Для приближенного решения задачи (11)–(13) используется неявная двухслойная схема. В этом случае приближенное решение на новом слое определяется из уравнений

$$\left(\frac{h^{n+1} - h^n}{\tau}, \varphi\right) + (\operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+\sigma} h^{n+\sigma}), \varphi) = 0, \tag{14}$$

$$\left(\frac{h^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} - h^n\mathbf{u}^n}{\tau}, \mathbf{v}\right) + (\operatorname{div}(h^{n+\sigma}\mathbf{u}^{n+\sigma} \otimes \mathbf{u}^{n+\sigma}), \mathbf{v}) + g(h^{n+\sigma} \operatorname{grad} h^{n+\sigma}, \mathbf{v}) = 0 \tag{15}$$

для $n = 0, 1, \dots, N - 1$ при заданных h^0, \mathbf{u}^0 (см. (13)). В (14), (15) используются обозначения

$$h^{n+\sigma} = \sigma h^{n+1} + (1 - \sigma)h^n, \tag{16}$$

где $\sigma = \operatorname{const} \geq 0$ — весовой параметр. При вычислительной реализации и исследовании схем с весами часто удобно сначала находить решение на момент времени $t^{n+\sigma}$, потом уже пересчитывать решение на момент времени t^{n+1} . Такой подход соответствует тому, что, например, вместо (14) используется уравнение

$$\left(\frac{h^{n+\sigma} - h^n}{\sigma\tau}, \varphi\right) + (\operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+\sigma} h^{n+\sigma}), \varphi) = 0,$$

а после этого находится h^{n+1} из (16).

При $\sigma = 0.5$ мы имеем симметричную схему (схему Кранка–Николсон), которая аппроксимирует исходные уравнения со вторым порядком по τ , а при $\sigma \neq 0.5$ — с первым. Обычно считают, что $\sigma \leq 1$, мы такое ограничение на весовой параметр не накладываем. При больших σ мы, конечно, теряем в точности, но улучшаются другие свойства приближенного решения, например его монотонность.

Выбирая в уравнении (14) тестовую функцию $\varphi = \varrho$, получим

$$\varrho(h^{n+1}, 1) = \varrho(h^n, 1), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \tag{17}$$



Равенство (17) есть дискретный аналог закона сохранения массы (5). Дисбаланс полной механической энергии за счет используемых аппроксимаций по времени оценивается, например, следуя [10, 29]. В уравнении (15) положим $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+\sigma}$ и получим

$$\left(\frac{h^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} - h^n\mathbf{u}^n}{\tau}, \mathbf{u}^{n+\sigma} \right) + (\operatorname{div}(h^{n+\sigma}\mathbf{u}^{n+\sigma} \otimes \mathbf{u}^{n+\sigma}), \mathbf{u}^{n+\sigma}) + g(h^{n+\sigma} \operatorname{grad} h^{n+\sigma}, \mathbf{u}^{n+\sigma}) = 0. \quad (18)$$

Принимая во внимание

$$\mathbf{u}^{n+\sigma} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \tau \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) O(\tau),$$

для первого слагаемого имеем

$$\begin{aligned} \frac{h^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} - h^n\mathbf{u}^n}{\tau} \mathbf{u}^{n+\sigma} &= \frac{h^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} - h^n\mathbf{u}^n}{\tau} \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) O(\tau) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{h^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1})^2 - h^n(\mathbf{u}^n)^2}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{h^{n+1} - h^n}{\tau} \mathbf{u}^n \mathbf{u}^{n+1} + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) O(\tau) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{h^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1})^2 - h^n(\mathbf{u}^n)^2}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{h^{n+1} - h^n}{\tau} (\mathbf{u}^{n+1/2})^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) O(\tau) + O(\tau^2). \end{aligned}$$

В силу этого из (18) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{h^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1})^2 - h^n(\mathbf{u}^n)^2}{\tau}, 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h^{n+1} - h^n}{\tau}, (\mathbf{u}^{n+1/2})^2 \right) + (\operatorname{div}(h^{n+\sigma}\mathbf{u}^{n+\sigma} \otimes \mathbf{u}^{n+\sigma}), \mathbf{u}^{n+\sigma}) + \\ + g(h^{n+\sigma} \operatorname{grad} h^{n+\sigma}, \mathbf{u}^{n+\sigma}) + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) O(\tau) + O(\tau^2) = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Учет дисбаланса энергии за счет аппроксимации по пространству дает равенство

$$\left(\frac{h^{n+1} - h^n}{\tau}, (\mathbf{u}^{n+\sigma})^2 \right) + (\operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+\sigma} h^{n+\sigma}), (\mathbf{u}^{n+\sigma})^2) + 2\delta_h^n = 0.$$

Величина $\delta_h^n \neq 0$, так как $(\mathbf{u}^{n+\sigma})^2 \notin V^h$ (см. (14)). Это дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{h^{n+1} - h^n}{\tau}, (\mathbf{u}^{n+1/2})^2 \right) + (\operatorname{div}(h^{n+\sigma}\mathbf{u}^{n+\sigma} \otimes \mathbf{u}^{n+\sigma}), \mathbf{u}^{n+\sigma}) + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) O(\tau) = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{h^{n+1} - h^n}{\tau}, (\mathbf{u}^{n+\sigma})^2 \right) + (\operatorname{div}(h^{n+\sigma}\mathbf{u}^{n+\sigma} \otimes \mathbf{u}^{n+\sigma}), \mathbf{u}^{n+\sigma}) = \\ = (\operatorname{div}(h^{n+\sigma}\mathbf{u}^{n+\sigma} \otimes \mathbf{u}^{n+\sigma}), \mathbf{u}^{n+\sigma}) - \frac{1}{2} (\operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+\sigma} h^{n+\sigma}), (\mathbf{u}^{n+\sigma})^2) - \delta_h^n = 0. \end{aligned}$$

Можем записать равенство (19) в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1})^2 - h^n(\mathbf{u}^n)^2}{\tau}, 1 \right) + g(h^{n+\sigma} \operatorname{grad} h^{n+\sigma}, \mathbf{u}^{n+\sigma}) + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) O(\tau) + O(\tau^2) - \delta_h^n = 0. \quad (20)$$

Для оценки второго слагаемого в левой части равенства (20) привлекается уравнение (14). Полагая $\varphi = gh^{n+\sigma}$, получим

$$\begin{aligned} g \left(\frac{h^{n+1} - h^n}{\tau}, h^{n+\sigma} \right) + g(\operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+\sigma} h^{n+\sigma}), h^{n+\sigma}) = \\ = \frac{g}{2} \left(\frac{(h^{n+1})^2 - (h^n)^2}{\tau}, 1 \right) + g(\operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+\sigma} h^{n+\sigma}), h^{n+\sigma}) + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) O(\tau). \quad (21) \end{aligned}$$

Складывая (20) и (21), приходим к

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1})^2 - h^n(\mathbf{u}^n)^2}{\tau}, 1 \right) + \frac{g}{2} \left(\frac{(h^{n+1})^2 - (h^n)^2}{\tau}, 1 \right) = \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) O(\tau) + O(\tau^2) + \tau \delta_h^n.$$

Это равенство можно записать в виде закона сохранения полной энергии на дискретном уровне

$$E^n = E^0 + t^n \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) O(\tau) + t^n O(\tau^2) + \sum_{k=0}^n \tau \delta_h^k, \tag{22}$$

где

$$E^n = \frac{1}{2} \varrho \left(h^n(\mathbf{u}^n)^2 + g(h^n)^2, 1 \right), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

На основании оценки (22) можем сделать вывод о том, что на дискретном уровне закон сохранения полной энергии без учета дисбаланса за счет пространственной аппроксимации (при $\delta_h^k = 0$, $n = 0, 1, \dots, N$) для схемы с весами (14), (15) выполняется только приближенно: со вторым порядком по τ при $\sigma = 0.5$ и первым — при $\sigma \neq 0.5$.

4. Численные расчеты. Приведем некоторые результаты численного решения модельной задачи разрушения дамбы в одномерном и двумерном случае. Разработано исследовательское программное обеспечение на языке Python с использованием библиотек вычислительной платформы FEniCS [30]. Для нахождения приближенного решения на новом слое по времени решается нелинейная задача. Мы используем метод Ньютона без каких-либо модификаций; в расчетах обычно достаточно двух-трех итераций. Однако сходимость итерационного метода для задач с негладкими решениями на грубых расчетных сетках не всегда имеет место. Проблема построения более надежных сеточных решателей, учитывающих особенности решаемой задачи, заслуживает отдельного внимания.

Начнем с результатов численного решения модельной одномерной задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + gh \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

когда $-5 < x < 5$, $T = 1$. Граничные и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u(-5, t) = 0, \quad u(5, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \\ h(x, 0) = \begin{cases} 10, & -5 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 5, \end{cases} \quad u(x, 0) = 0, \quad -5 < x < 5. \end{aligned}$$

До момента времени прихода ударной волны к правой границе мы имеем (см., например, [31]) точное решение задачи (задача о распаде произвольного разрыва).

Для рассматриваемой задачи с разрывным решением в качестве основной выбрана сетка с числом ячеек по пространству $N = 200$ и шагом по времени $\tau = 0.005$. Используется чисто неявная схема ($\sigma = 1$). Полученное приближенное решение приведено на рис. 1, штриховыми линиями показано точное решение. Наибольшие немонотонности наблюдаются после набегания ударной волны на правую стенку.

Результаты расчетов при использовании различных шагов по времени иллюстрируются рис. 2. Увеличение шага по времени позволяет уменьшить осцилляции приближенного решения. Повышение точности приближенного решения при использовании более подробных сеток по пространству демонстрируется рис. 3. На рис. 4 приведены расчетные данные при различных значениях весового параметра σ . При его увеличении наблюдается сглаживание нефизичных осцилляций приближенного решения. Отметим, что для рассматриваемой тестовой задачи с разрывными начальными условиями при использовании $\sigma = 0.5$ сильная немонотонность не дает возможности найти приближенное решение — решение быстро разваливается. Для задач с более гладкими приближенными решениями расчеты по симметричной схеме удается проводить.

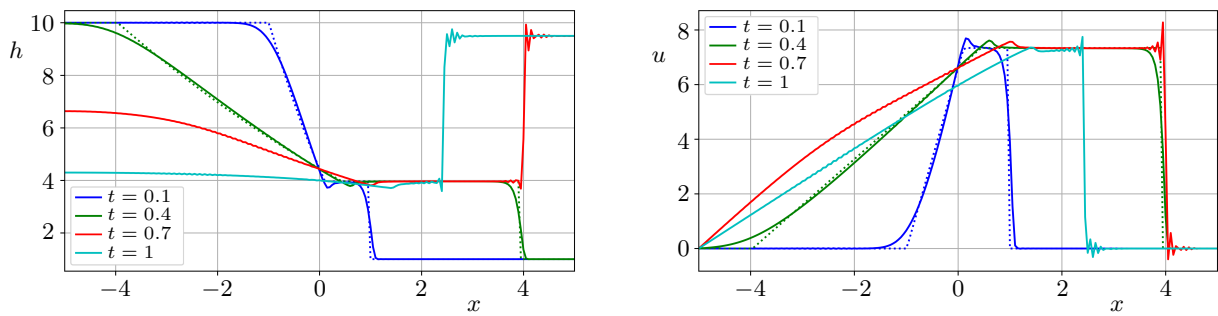


Рис. 1. Высота (слева) и скорость (справа) на разные моменты времени: $N = 200$, $\tau = 0.005$

Fig. 1. Height (left) and velocity (right) at different times: $N = 200$, $\tau = 0.005$

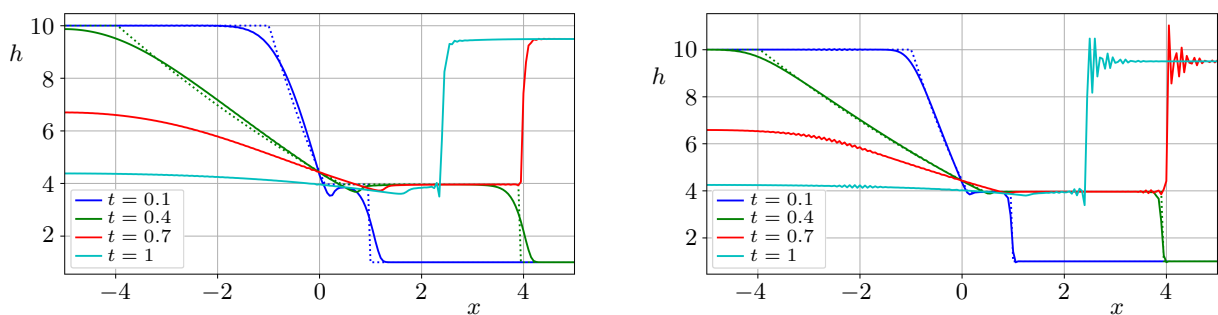


Рис. 2. Влияние шага по времени ($N = 200$): $\tau = 0.01$ (слева), $\tau = 0.0025$ (справа)

Fig. 2. Effect of time step ($N = 200$): $\tau = 0.01$ (left), $\tau = 0.0025$ (right)

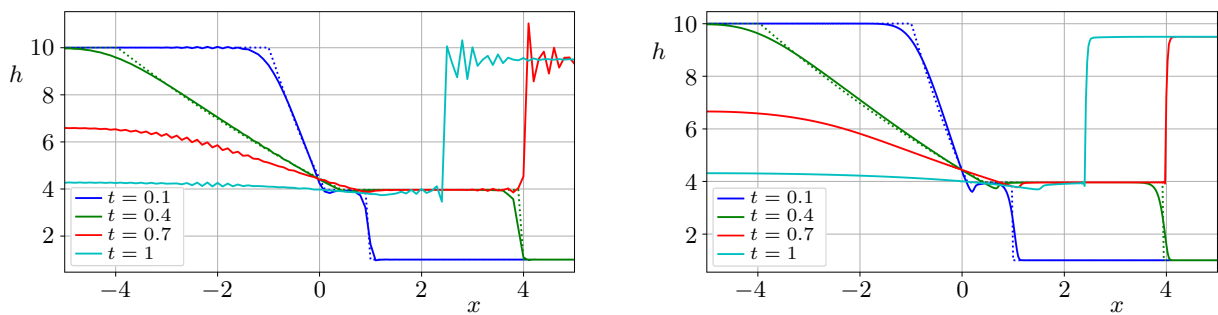


Рис. 3. Приближенное решение на разных сетках по пространству ($\tau = 0.005$): $N = 100$ (слева), $N = 400$ (справа)

Fig. 3. Approximate solution on different grids over the space ($\tau = 0.005$): $N = 100$ (left), $N = 400$ (right)

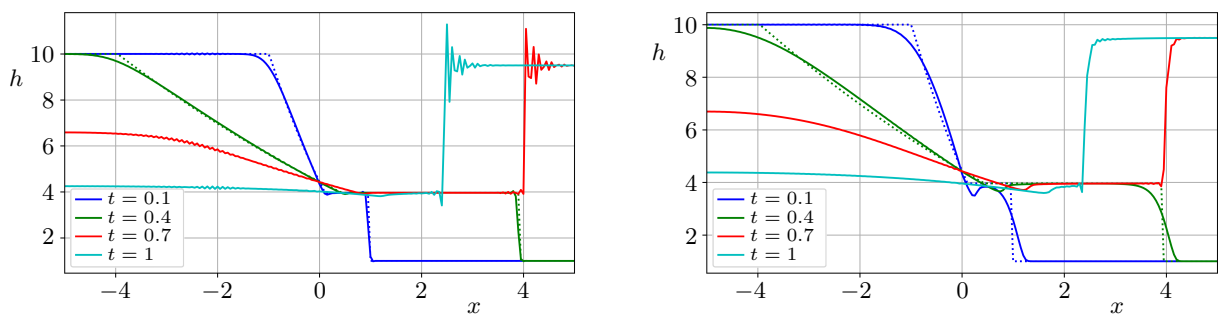


Рис. 4. Влияние весового параметра ($N = 200$, $\tau = 0.005$): $\sigma = 0.75$ (слева), $\sigma = 1.5$ (справа)

Fig. 4. Effect of weight parameter ($N = 200$, $\tau = 0.005$): $\sigma = 0.75$ (left), $\sigma = 1.5$ (right)

Приведем также данные по динамике полной механической энергии в зависимости от различных вычислительных параметров. Влияние весового параметра при использовании расчетных сеток при различном числе ячеек по пространству показано на рис. 5. Наблюдается значительное падение полной энергии со временем, которое обусловлено, прежде всего, аппроксимациями по пространству (последний член в правой части (22)). Дисбаланс энергии более значителен при увеличении σ . Как показывают расчеты, в задачах с более гладкими решениями нарушение закона сохранения полной механической энергии выражено слабее (в этом случае $\delta_h^k \approx 0$, $n = 0, 1, \dots, N$). Расчетные данные для нашей модельной задачи, которые приведены на рис. 6, демонстрируют, что наблюдаемая диссипация полной механической энергии порождена не аппроксимациями по времени и слабо меняется при переходе от расчетной сетки с числом ячеек $N = 100$ к сетке с $N = 200$.

Подобные результаты получены при рассмотрении задачи в двумерном приближении, когда расчетная область Ω является прямоугольником:

$$\Omega = \{x \mid x = \{x_1, x_2\}, \quad -5 < x_1 < 5, \quad -1 < x_2 < 1\}.$$

Начальное условие для уравнений (1), (2) берется в виде

$$h(x, 0) = \begin{cases} 10, & -5 \leq x_1 \leq 0, \quad -1 < x_2 < 1, \\ 1, & 0 < x_1 \leq 5, \quad -1 < x_2 < 1, \end{cases} \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Триангуляция прямоугольника Ω — равномерная с числом ячеек $N_1 = 200$ по переменной x_1 и $N_2 = 40$ — по x_2 . Генерация этой расчетной сетки выполнена стандартными средствами FEniCS. Приближенные решения для определенных моментов времени показаны на рис. 7, 8.

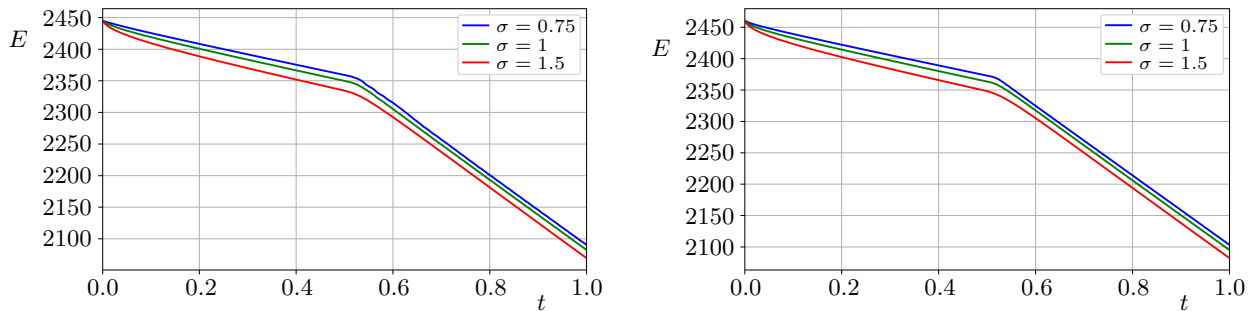


Рис. 5. Динамика полной механической энергии для различных значений весового параметра σ ($\tau = 0.005$): число ячеек $N = 100$ (слева), $N = 200$ (справа)

Fig. 5. Dynamics of the total mechanical energy for different values of the weight parameter σ ($\tau = 0.005$): number of cells $N = 100$ (left), $N = 200$ (right)

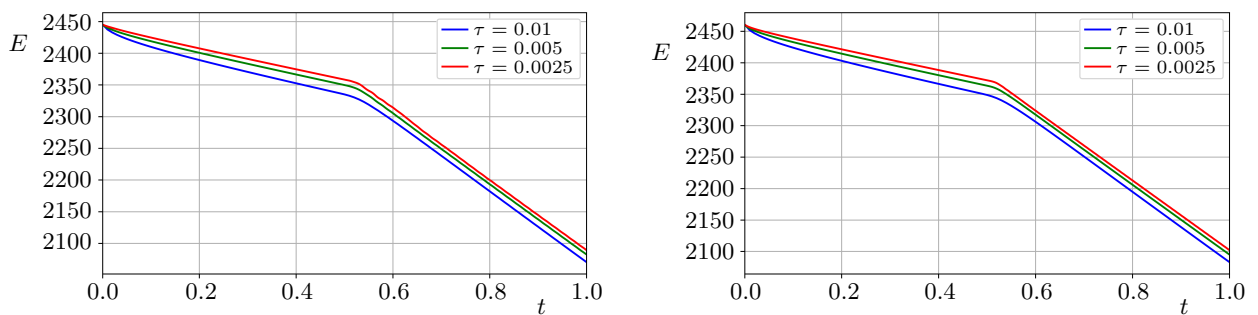


Рис. 6. Динамика полной механической энергии при различных шагах по времени ($\sigma = 1$): число ячеек $N = 100$ (слева), $N = 200$ (справа)

Fig. 6. Dynamics of total mechanical energy at different time steps ($\sigma = 1$): number of cells $N = 100$ (left), $N = 200$ (right)

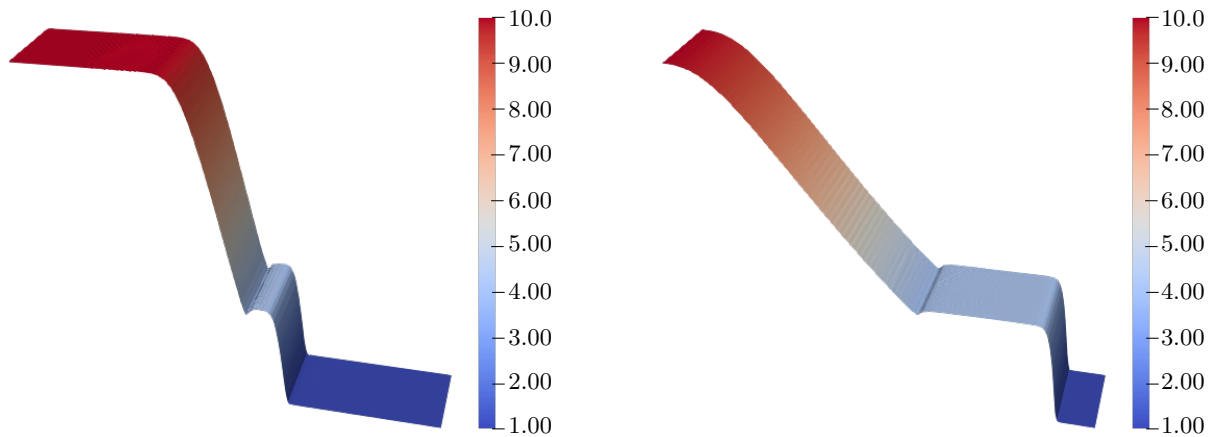


Рис. 7. Высота слоя жидкости на разные моменты времени: $t = 0.1$ (слева), $t = 0.4$ (справа)

Fig. 7. Height of the liquid layer at different times: $t = 0.1$ (left), $t = 0.4$ (right)

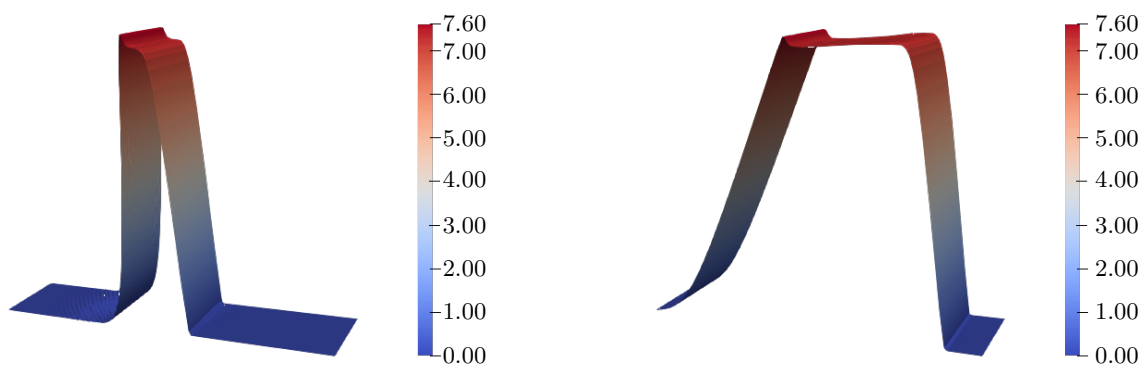


Рис. 8. Скорость на разные моменты времени: $t = 0.1$ (слева), $t = 0.4$ (справа)

Fig. 8. Velocity at different times: $t = 0.1$ (left), $t = 0.4$ (right)

5. Заключение. Результаты проведенного исследования демонстрируют значительный потенциал использования стандартных двухслойных схем с весами при приближенном решении начально-краевых задач для течений несжимаемой жидкости со свободной границей в приближении мелкой воды. Отметим три ключевых момента.

- При записи уравнений в консервативной форме и конечно-элементной аппроксимации по пространству выполняются законы сохранения массы и импульса на дискретном уровне. Закон сохранения полной механической энергии выполняется приближенно и дисбаланс зависит от весового параметра, причем лучшую оценку мы имеем для симметричной схемы (схемы Кранка–Николсон).
- В качестве монотонизатора выступает вес используемой разностной схемы σ . При его увеличении нефизичные осцилляции подавляются. В рассматриваемых модельных задачах с негладкими решениями немонотонность приближенного решения приводит к тому, что при малых σ расчеты на разумных сетках выполнить не удастся.
- Интерес представляет исследование монотонизирующих свойств весового параметра при использовании других аппроксимаций по времени. Среди них особого внимания заслуживает регуляризация симметричной схемы, аналогичная схеме Лакса–Вендроффа.

Список литературы

1. *Batchelor G.K.* An introduction to fluid dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
2. *Ландау Л.Д., Lifshits E.M.* Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
3. *Годунов С.К., Роменский Е.И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.
4. *LeVeque R.J.* Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
5. *Anderson J.D.* Computational fluid dynamics: the basics with applications. New York: McGraw-Hill, 1995.
6. *Wesseling P.* Principles of computational fluid dynamics. Berlin: Springer, 2001.
7. *Katopodes N.D.* Free-surface flow: shallow-water dynamics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2018.
8. *Vreugdenhil C.B.* Numerical methods for shallow-water flow. Dordrecht: Springer, 1994.
9. *Lions P.-L.* Mathematical topics in fluid mechanics. Volume 2. Compressible models. New York: Oxford Univ. Press, 1998.
10. *Feireisl E., Karper T.G., Pokorný M.* Mathematical theory of compressible viscous fluids: analysis and numerics. Cham: Springer, 2016.
11. *Morton K.W.* Numerical solution of convection–diffusion problems. London: Chapman & Hall, 1996.
12. *Самарский А.А., Вабичевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Editorial URSS, 2004.
13. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
14. *Hundsdorfer W., Verwer J.G.* Numerical solution of time-dependent advection–diffusion–reaction equations. Berlin: Springer, 2003. doi 10.1007/978-3-662-09017-6.
15. *Kuzmin D.* A guide to numerical methods for transport equations. Nürnberg: University Erlangen–Nürnberg, 2010. <https://pdf4pro.com/view/a-guide-to-numerical-methods-for-transport-equations-566b18.html>. Cited December 1, 2023.
16. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
17. *Versteeg H.K., Malalasekera W.* An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method. Harlow: Prentice-Hall, 2007.
18. *Ern A., Guermond J.-L.* Theory and practice of finite elements. New York: Springer, 2004. doi 10.1007/978-3-642-33287-6.
19. *Larson M.G., Bengzon F.* The finite element method: theory, implementation, and applications. Berlin: Springer, 2013. doi 10.1007/978-3-642-33287-6.
20. *Donea J., Huerta A.* Finite element methods for flow problems. Chichester: Wiley, 2003. doi 10.1002/0470013826.
21. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P.* The finite element method for fluid dynamics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. doi 10.1016/C2009-0-26328-8.
22. *Vabishchevich P.N.* Two-level schemes for the advection equation // J. Comput. Phys. 2018. **363**. 158–177. doi 10.1016/j.jcp.2018.02.044.
23. *Вабичевич П.Н.* Численные методы решения нестационарных задач. М.: Editorial URSS, 2021.
24. *Ascher U.M.* Numerical methods for evolutionary differential equations. Philadelphia: SIAM Press, 2008.
25. *LeVeque R.J.* Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems. Philadelphia: SIAM Press, 2007.
26. *Samarский А.А., Matus P.P., Vabishchevich P.N.* Difference schemes with operator factors. Dordrecht: Springer, 2002.
27. *Thomé V.* Galerkin finite element methods for parabolic problems. Berlin: Springer, 2006.
28. *Brenner S.C., Scott L.R.* The mathematical theory of finite element methods. New York: Springer, 2008.
29. *Vabishchevich P.N.* Decoupling schemes for predicting compressible fluid flows // Computers & Fluids. 2018. **171**. 94–102. doi 10.1016/j.compfluid.2018.06.012.
30. FEniCS Project. <https://fenicsproject.org/>. Cited December 2, 2023.
31. *Toro E.F.* Shock-capturing methods for free-surface shallow flows. Hoboken: Wiley, 2001.



Информация об авторах

Петр Николаевич Вабищевич — д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, д.1, стр. 52, 119991, Москва, Российская Федерация.

Михаил Михайлович Чернышов — студент; Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Саров, Нижегородская обл., г. Саров, ул. Парковая, д. 8, 607328, Саров, Российская Федерация.

References

1. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).
2. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, Vol. 6: *Fluid Mechanics* (Nauka, Moscow, 1986; Butterworth-Heinemann, Oxford, 1987).
3. S. K. Godunov and E. I. Romenskii, *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws* (Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, 1998; Springer, New York, 2003). doi 10.1007/978-1-4757-5117-8.
4. R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002).
5. J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications* (McGraw-Hill, New York, 1995).
6. P. Wesseling, *Principles of Computational Fluid Dynamics* (Springer, Berlin, 2001).
7. N. D. Katopodes, *Free-Surface Flow: Shallow-Water Dynamics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 2018).
8. C. B. Vreugdenhil, *Numerical Methods for Shallow-Water Flow* (Springer, Dordrecht, 1994).
9. P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Vol. 2: *Compressible Models* (Oxford Univ. Press, New York, 1998).
10. E. Feireisl, T. G. Karper, and M. Pokorný, *Mathematical Theory of Compressible Viscous Fluids: Analysis and Numerics* (Springer, Cham, 2016).
11. K. W. Morton, *Numerical Solution of Convection–Diffusion Problems* (Chapman & Hall, London, 1996).
12. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Convection–Diffusion Problems* (Editorial URSS, Moscow, 2004) [in Russian].
13. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).
14. W. Hundsdorfer and J. G. Verwer, *Numerical Solution of Time-Dependent Advection–Diffusion–Reaction Equations* (Springer, Berlin, 2003). doi 10.1007/978-3-662-09017-6.
15. D. Kuzmin, *A Guide to Numerical Methods for Transport Equations* (University Erlangen–Nürnberg, Nürnberg, 2010). <https://pdf4pro.com/view/a-guide-to-numerical-methods-for-transport-equations-566b18.html>. Cited December 1, 2023.
16. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1989; CRC Press, Boca Raton, 2001). doi 10.1201/9780203908518.
17. H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method* (Prentice-Hall, Harlow, 2007).
18. A. Ern and J.-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements* (Springer, New York, 2004). doi 10.1007/978-1-4757-4355-5.
19. M. G. Larson and F. Bengzon, *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications* (Springer, Berlin, 2013). doi 10.1007/978-3-642-33287-6.
20. J. Donea and A. Huerta, *Finite Element Methods for Flow Problems* (Wiley, Chichester, 2003). doi 10.1002/0470013826.
21. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and P. Nithiarasu, *The Finite Element Method for Fluid Dynamics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 2013). doi 10.1016/C2009-0-26328-8.
22. P. N. Vabishchevich, “Two-Level Schemes for the Advection Equation,” *J. Comput. Phys.* **363**, 158–177 (2018). doi 10.1016/j.jcp.2018.02.044.
23. P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Non-Stationary Problems* (Editorial URSS, Moscow, 2021) [in Russian].

24. U. M. Ascher, *Numerical Methods for Evolutionary Differential Equations* (SIAM Press, Philadelphia, 2008).
25. R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems* (SIAM Press, Philadelphia, 2007).
26. A. A. Samarskii, P. P. Matus, and P. N. Vabishchevich, *Difference Schemes with Operator Factors* (Springer, Dordrecht, 2002).
27. V. Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems* (Springer, Berlin, 2006).
28. S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* (Springer, New York, 2008).
29. P. N. Vabishchevich, “Decoupling Schemes for Predicting Compressible Fluid Flows,” *Computers & Fluids* **171**, 94–102 (2018). doi [10.1016/j.compfluid.2018.06.012](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.06.012).
30. FEniCS Project. <https://fenicsproject.org/>. Cited December 2, 2023.
31. E. F. Toro, *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows* (Wiley, Hoboken, 2001).

Received
November 9, 2023

Accepted for publication
November 30, 2023

Information about the authors

Petr N. Vabishchevich — Dr. Sci., Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia.

Mikhail M. Chernyshov — Student; Sarov Branch of Moscow State University, Parkovaya ulitsa, 8, 607328, Sarov, Russia.